

В. С. ВЛАДИМИРОВ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебника
для студентов физико-математических
факультетов высших учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1981

22.16
В 57
УДК 517

Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — изд. 4-е. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 512 с.

Основная особенность курса — широкое использование концепции обобщенного решения. Поэтому в книге содержится специальная глава, посвященная теории обобщенных функций.

Книга является учебником для студентов и аспирантов — математиков, физиков и инженеров с повышенной математической подготовкой.

Василий Сергеевич Владимиров
УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Редактор В. В. Абгарян
Техн. редактор Е. В. Морозова
Корректор М. А. Мидкевич

ИБ № 11791

Сдано в набор 26.11.80. Подписано в печать 29.07.81. Формат 84×109¹⁶. Бумага 100, № 3. Литературная обработка, высокая печать. Усл. п. л. 26,80. Уч. изд. л. 26,80. Тираж 30 000 экз. Заказ № 1521. Цена 1 р. 20 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы,
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 13.

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный двор имени А. М. Горького» Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 197130, Ленинград, П-130, Чкаловский пр., 15.

Отпечатано в тип. № 2 изд-ва «Наука»,
Москва, Шубинский пер., 10. Зак. 63.

26203—089
В 581. 1702050000
053(07)-81

© «наименование»
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1981

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию	8
Глава I	
Постановка краевых задач математической физики	11
§ 1. Некоторые понятия и предложения теории множеств, теории функций и теории операторов	11
1. Точечные множества в R^n (11). 2. Классы функций $C^k(\Omega)$ и $C^k(\bar{\Omega})$ (13). 3. Пространство непрерывных функций $C(T)$ (13). 4. Интеграл Лебега (16). 5. Интегралы Лебега, зависящие от параметра (23). 6. Интегралы типа потенциала (24). 7. Пространство функций $L_2(\Omega)$ (27). 8. Ортогональные системы (30). 9. Полные ортогональные системы (32). 10. Линейные операторы и функции (33). 11. Линейные уравнения (34). 12. Эрмитов оператор (35).	
§ 2. Основные уравнения математической физики	43
1. Уравнение колебаний (43). 2. Уравнение диффузии (47). 3. Стационарное уравнение (49). 4. Уравнение переноса (51). 5. Уравнение газ-газодинамики (52). 6. Уравнения Максвелла (52). 7. Уравнение Шредингера (54). 8. Уравнение Клейна — Гордона — Фокса и уравнение Дирака (56).	
§ 3. Классификация квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка	55
1. Классификация уравнений в точке (55). 2. Выражение оператора Лапласа в сферических и цилиндрических координатах (56). 3. Характеристические поверхности (характеристики) (59). 4. Канонический вид уравнений с двумя независимыми переменными (61). 5. Пример. Уравнение Трикоми (62).	
§ 4. Постановка основных краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка	68
1. Классификация краевых задач (68). 2. Задача Коши (70). 3. Роль характеристик в постановке задачи Коши (71). 4. Краевая задача для уравнений эллиптического типа (73). 5. Существование задачи (74). 6. Другие краевые задачи (75). 7. Коррентность постановки задач математической физики (76). 8. Теорема Коши — Ковалевской (77). 9. Пример Адамара (79). 10. Классические и обобщенные решения (80).	
Глава II	
Обобщенные функции	82
§ 5. Основные и обобщенные функции	82
1. Введение (82). 2. Пространство основных функций $\mathcal{D}$ (83). 3. Пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'$ (83). 4. Подпространство обобщенных функций $\mathcal{D}'_0$ (83). 5. Носитель обобщенной функции (83). 6. Регулярные обобщенные функции (84). 7. Сами-регулярные обобщенные функции (84). 8. Формулы Стокса (84). 9. Линейная замена переменных в обобщенных функциях (84). 10. Умножение обобщенных функций (101). 11. Углубления (102).	

§ 6. Дифференцирование обобщенных функций	103
1. Производные обобщенной функции (103). 2. Свойства обобщенных производных (104). 3. Преобразование обобщенной функции (107). 4. Примеры, $n=1$ (109). 5. Примеры, $n \geq 2$ (110). 6. Уравнения (124).	
§ 7. Прямое произведение и свертка обобщенных функций	126
1. Определение прямого произведения (126). 2. Коммутативность прямого произведения (126). 3. Дальнейшие свойства прямого произведения (126). 4. Свертка обобщенных функций (127). 5. Свойства свертки (128). 6. Существование свертки (130). 7. Сверточная алгебра обобщенных функций $\mathcal{D}'$ (130). 8. Уравнения в сверточной алгебре $\mathcal{D}'$ (142). 9. Регуляризация обобщенных функций (144). 10. Примеры свертки. Ньютонов потенциал (145). 11. Уравнения (146).	
§ 8. Обобщенные функции медленного роста	149
1. Пространство основных функций $\mathcal{S}$ (149). 2. Пространство обобщенных функций медленного роста $\mathcal{S}'$ (150). 3. Примеры обобщенных функций медленного роста (152). 4. Структура обобщенных функций с точечным носителем (154). 5. Прямое произведение обобщенных функций медленного роста (155). 6. Свертка обобщенных функций медленного роста (157).	
§ 9. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста	158
1. Преобразование Фурье основных функций из $\mathcal{S}$ (158). 2. Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathcal{S}'$ (159). 3. Свойства преобразования Фурье (162). 4. Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем (165). 5. Преобразование Фурье свертки (166). 6. Примеры, $n=1$ (166). 7. Примеры, $n \geq 2$ (170). 8. Упражнения (174).	
§ 10. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление)	175
1. Преобразование Лапласа локально интегрируемых функций (176). 2. Преобразование Лапласа обобщенных функций (176). 3. Свойства преобразования Лапласа (179). 4. Обратное преобразование Лапласа (181). 5. Примеры и приложения (185). 6. Упражнения (188).	
Глава III	
Фундаментальное решение и задача Коши	190
§ 11. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов	190
1. Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений (190). 2. Фундаментальные решения (192). 3. Уравнения с правой частью (194). 4. Метод сдвига (196). 5. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с обыкновенными производными (198). 6. Фундаментальное решение оператора теплопроводности (198). 7. Фундаментальное решение волнового оператора (199). 8. Фундаментальное решение оператора Лапласа (202). 9. Фундаментальное решение оператора Гельмгольца (203). 10. Фундаментальное решение оператора Коши — Римана (206). 11. Фундаментальное решение оператора переноса (206). 12. Упражнения (206).	
§ 12. Волновой потенциал	208
1. Свойства фундаментального решения волнового оператора (208). 2. Дополнительные сведения о свертках (210). 3. Волновой потенциал (212). 4. Поверхностные волновые потенциалы (216).	
§ 13. Задача Коши для волнового уравнения	221
1. Задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (221). 2. Поста-	

вока обобщенной задачи Коши для волнового уравнения (222). 3. Решение обобщенной задачи Коши (224). 4. Решение классической задачи Коши (226). 5. Упражнения (227).	
§ 14. Распространение волн	229
1. Наименьшие волны в области влияния (229). 2. Распространение волн в пространстве (230). 3. Распространение волн на плоскости (232). 4. Распространение волн на прямой (235). 5. Метод распространяющихся волн (238). 6. Метод отражений. Полуобъемная струна (241). 7. Метод отражений. Конечная струна (243). 8. Неприводимые волновые уравнения (245).	
§ 15. Метод Римана	247
1. Решение задачи Гурса (247). 2. Формула Грина (250). 3. Функция Римана (252). 4. Задача Коши (256).	
§ 16. Задача Коши для уравнения теплопроводности	260
1. Тепловой потенциал (260). 2. Поверхностный тепловой интеграл (264). 3. Постановка обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности (265). 4. Решение задачи Коши (266). 5. Упражнения (267).	
Глава IV	
Интегральные уравнения	270
§ 17. Метод последовательных приближений	271
1. Интегральные уравнения с непрерывным ядром (271). 2. Повторные ядра. Резольвента (273). 3. Интегральные уравнения Вильмерса (278). 4. Интегральные уравнения с полярным ядром (280). 5. Упражнения (283).	
§ 18. Теоремы Фредгольма	286
1. Интегральные уравнения с вырожденным ядром (286). 2. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденным ядром (289). 3. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с непрерывным ядром (294). 4. Следствия из теорем Фредгольма (296). 5. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с полярным ядром (298). 6. Упражнения (301).	
§ 19. Интегральные уравнения с эрмитовым ядром	301
1. Интегральные операторы с эрмитовым непрерывным ядром (302). 2. Лемма Арцеля — Асколи (303). 3. Интегральные уравнения с эрмитовым непрерывным ядром (304). 4. Интегральные уравнения с эрмитовым полярным ядром (307).	
§ 20. Теорема Гильберта — Шмидта и ее следствия	308
1. Теорема Гильберта — Шмидта для эрмитова непрерывного ядра (308). 2. Билинейное разложение ядра (312). 3. Билинейное разложение эрмитова непрерывного ядра (313). 4. Решение неоднородного интегрального уравнения с эрмитовым непрерывным ядром (315). 5. Положительно определенное ядро (317). 6. Распространение теорем Гильберта — Шмидта на интегральные уравнения с эрмитовым полярным ядром (318). 7. Теорема Ентца (320). 8. Метод Колоса (322). 9. Теорема Мерсера (323).	
Глава V	
Краевые задачи для уравнений эллиптического типа	327
§ 21. Задача на собственные значения	327
1. Постановка задачи на собственные значения (327). 2. Формулы Грина (328). 3. Свойства оператора L (329). 4. Свойства собственных значений и собственных функций оператора L (331). 5. Физический смысл собственных значений и собственных функций (333).	

§ 22. Задача Штурма — Лиувилля	336
1. Функция Грина (336). 2. Сведение задачи Штурма — Лиувилля к интегральному уравнению (336). 3. Свойства собственных значений и собственных функций (341). 4. Нахождение собственными значениями и собственными функциями (343).	
§ 23. Функции Бесселя	346
1. Определение и простейшие свойства функций Бесселя (346). 2. Свойство ортогональности (347). 3. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя (349). 4. Корни функций Бесселя (350). 5. Краевая задача на собственные значения для уравнения Бесселя (352). 6. Неподорода на краевую задачу для уравнения Бесселя (354). 7. Полнота функций Бесселя (355). 8. Другие связанные функции (357). 9. Упражнения (358).	
§ 24. Гармонические функции	359
1. Формула Грина (360). 2. Распространение формул Грина (362). 3. Теорема о среднем арифметическом (364). 4. Принцип максимума (368). 5. Свойства на принципах максимума (367). 6. Связи между особенностями гармонической функции (368). 7. Обобщенно-гармонические функции (369). 8. Дальнейшие свойства гармонических функций (370). 9. Аналог теоремы Лиувилля (371). 10. Показание гармонической функции на бесконечности (372). 11. Упражнения (374).	
§ 25. Сферические функции	374
1. Определение сферических функций (374). 2. Дифференциальное уравнение для сферических функций (376). 3. Полнота Лежандра (377). 4. Производящая функция (379). 5. Присоединенные функции Лежандра (383). 6. Сферические функции (383). 7. Формула Лапласа (385). 8. Шаровые функции (387). 9. Упражнения (387).	
§ 26. Метод Фурье для задачи на собственные значения	388
1. Общая схема метода Фурье (388). 2. Примеры (390).	
§ 27. Ньютонов потенциал	394
1. Общий потенциал (396). 2. Потенциалы простого и двойного слоя (396). 3. Физический смысл ньютоновых потенциалов (399). 4. Поверхности Лиувилля (400). 5. Свойства потенциалов простого и двойного слоя на поверхности S (405). 6. Разрыв потенциала двойного слоя (407). 7. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя (409). 8. Упражнения (411).	
§ 28. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в пространстве	412
1. Постановка основных краевых задач (412). 2. Теоремы единственности решения краевых задач (413). 3. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям (415). 4. Исследование интегральных уравнений (418). 5. Решение задач Дирихле и Неймана для шара (420).	
§ 29. Функция Грина задачи Дирихле	423
1. Определение и свойства функции Грина (423). 2. Примеры построения функции Грина (метод отражений) (426). 3. Решение краевой задачи с помощью функции Грина (429). 4. Формула Пуассона (430). 5. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению (431). 6. Свойства собственных значений и собственных функций (434). 7. Упражнения (436).	
§ 30. Уравнения Гельмгольца	438
1. Уравнения излучения Зоммерфельда (438). 2. Однородное уравнение Гельмгольца (439). 3. Потенциалы (441). 4. Принцип предельного поглощения (443). 5. Принцип предельной амплитуды (444). 6. Краевые задачи для уравнений Гельмгольца (445). 7. Решение краевых задач для шара (447). 8. Упражнения (448).	

§ 31. Краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости	449
1. Постановка и единственность решения основных краевых задач (449). 2. Логарифмический потенциал (450). 3. Разрешимость краевых задач (454). 4. Решение краевых задач для круга (457). 5. Функция Грина задачи Дирихле (459). 6. Решение задачи Дирихле для однолистной области (461). 7. Упражнения (462).	

Глава VI

Смешанная задача	464
§ 32. Метод Фурье	464
1. Однородное гиперболическое уравнение (465). 2. Неподорода гиперболическое уравнение (467). 3. Параболическое уравнение (468). 4. Уравнение Шредингера (469). 5. Эллиптическое уравнение (470). 6. Примеры (472). 7. Упражнения (473).	
§ 33. Смешанная задача для уравнения гиперболического типа	479
1. Классическое решение. Интеграл энергии (479). 2. Единственность и непрерывная зависимость классического решения (482). 3. Функция, непрерывная в $\mathcal{D}_s$ (485). 4. Обобщенное решение (488). 5. Единственность и непрерывная зависимость обобщенного решения (491). 6. Существование обобщенного решения (492). 7. Существование классического решения (495).	
§ 34. Смешанная задача для уравнения параболического типа	497
1. Классическое решение. Принцип максимума (498). 2. Единственность и непрерывная зависимость классического решения (501). 3. Обобщенное решение (501). 4. Существование обобщенного решения (503). 5. Существование классического решения (504).	
Литература	505
Предметный указатель	509

Построение и исследование математических моделей физических явлений составляет предмет математической физики. Математическая физика развивалась со времен Ньютона параллельно развитию физики и математики. В конце XVII в. было открыто дифференциальное и интегральное исчисление (И. Ньютон, Г. Лейбниц) и сформулированы основные законы классической механики и закон всемирного тяготения (И. Ньютон). В XVIII в. методы математической физики начали формироваться при изучении колебаний струн и стержней, а также задач, связанных с акустикой и гидродинамикой; закладываются основы аналитической механики (Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Д. Бернулли, Ж. Лагранж, П. Лаплас). В XIX в. идеи математической физики получили новое развитие в связи с задачами теплопроводности, диффузии, упругости, оптики, электродинамики, нелинейными волновыми процессами и т. д.; создаются теория потенциала и теория устойчивости движения (Ж. Фурье, С. Пуассон, К. Гаусс, О. Коши, М. В. Остроградский, П. Дирихле, Б. Риман, С. В. Ковалевская, Д. Стокс, А. Пуанкаре, А. М. Липунов, В. А. Стеклов, Д. Гильберт). В XX в. в математическую физику включаются задачи квантовой физики и теории относительности, а также новые проблемы газовой динамики, переноса частиц и физики плазмы.

Многие задачи классической математической физики сводятся к *краевым задачам для дифференциальных (интегро-дифференциальных) уравнений — уравнений математической физики*. Основными математическими средствами исследования этих задач служат теория дифференциальных уравнений (включая родственные области: интегральные уравнения и вариационное исчисление), теория функций, функциональный анализ, теория вероятностей, приближенные методы и вычислительная математика.

Изучение математических моделей квантовой физики потребовало привлечения новых областей математики, таких как теория обобщенных функций, теория функций многих комплексных переменных, топологических и алгебраических методов.

С появлением ЭВМ существенно расширился класс математических моделей, допускающих детальный анализ; появилась реальная возможность ставить вычислительные эксперименты. В этом интенсивном взаимодействии теоретической физики и современной математики создаются качественно новые классы моделей современной математической физики.

Среди задач математической физики выделяется важный класс *корректно поставленных задач*, т. е. задач, для которых решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи. Хотя эти требования на первый взгляд кажутся совершенно естест-

венным, из тем не менее необходимо доказывать в рамках принятой математической модели. Доказательство корректности — это первая апробация математической модели: модель непротиворечива (решение существует), модель однозначно описывает физический процесс (решение единственно), модель мало чувствительна к погрешностям измерений физических величин (решение непрерывно зависит от данных задачи).

В этой книге изучаются в основном корректно поставленные краевые задачи для дифференциальных уравнений классической математической физики. Однако в отличие от традиционных способов изложения уравнений в книге широко используется концепция *обобщенного решения*. Обобщенные решения возникают при изучении интегральных соотношений типа локального баланса, и учет этих решений приводит к обобщенным постановкам краевых задач математической физики.

Точное определение обобщенного решения опирается на понятие *обобщенной производной* и вообще, *обобщенной функции*. Аппарат теории обобщенных функций служит удобным средством для исследования линейных краевых задач математической физики в обобщенной и классической постановках. Поэтому специальная глава в этой книге посвящена изложению теории обобщенных функций.

Ряд разделов книги излагается на языке функционального анализа (на элементарном уровне), что, с одной стороны, подводит читателя к чтению современной научной литературы, а с другой стороны, приводит к значительным сокращениям изложения.

В книге принята следующая схема расположения материала. В главе I излагается постановка и классификация основных краевых задач математической физики, а также приводятся некоторые необходимые для дальнейшего сведения из анализа. Глава II содержит элементы теории обобщенных функций, включая преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). В главе III строятся фундаментальные решения для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и исследуются обобщенная и классическая задачи Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Особенность изложения состоит в том, что в обобщенной постановке задачи Коши начальные условия включаются в мгновенно действующие источники; это позволяет построить ее решение в виде свертки источника с надлежащим образом выбранным фундаментальным решением. Специальный параграф посвящен задаче Коши для уравнения гиперболического типа с двумя переменными (метод Римана). Глава IV содержит теорию интегральных уравнений с ядром. Доказываются теоремы Фредгольма, Гильберта — Шмидта, Ейтча, Келлога и Мерсера.

В главе V рассматриваются задачи на собственные значения для уравнений эллиптического типа, включая задачу Штурма — Лиувилля, а также краевые задачи для уравнений Пуассона и Гельмгольца в пространстве и для уравнения Лапласа на плоскости. Излагается элементарная теория гармонических функций, а также функций Бесселя и сферических функций. В главе VI изучаются смешанные задачи для уравнений гиперболического и параболического типов в классической и обобщенной постановках. Излагается метод Фурье и дается его обоснование.

Многие параграфы книги содержат задачи для упражнений. Ряд задач сформулирован в виде теорем, которые являются существенным дополнением к основному материалу. Для упражнений можно также рекомендовать «Сборник задач по уравнениям математической физики» В. С. Владимиров, В. П. Михайлова, А. А. Пашарина, Х. Х. Каримовой, Ю. В. Сидорова, М. И. Шабунина, Наука, 1974.

Эта книга является расширенным изложением лекций по курсу «Уравнения математической физики», читанных автором в течение многих лет студентам Московского физико-технического института. Она рассчитана на студентов и аспирантов — математиков, физиков и инженеров с повышенной математической подготовкой.

Пользуясь случаем выразить искреннюю благодарность всем лицам, чья конструктивная критика способствовала улучшению настоящего и предыдущих изданий книги. В особенности я благодарен Н. Н. Боголюбову, С. Л. Соболеву, В. П. Михайлову, Л. Д. Кудряшину, Б. М. Степанову, Х. Х. Каримовой, Ю. Н. Дроздинову, В. А. Ильину, И. А. Клиринову, В. В. Жаринову, Ю. П. Кривенкову и В. Д. Чарушикову.

Я также весьма благодарен Н. Я. Владимировой за помощь при оформлении рукописи и чтение корректур.

1979 г.

В. С. Владимиров

ГЛАВА I

ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Некоторые понятия и предложения теории множеств, теории функций и теории операторов

Пусть A — произвольное множество. Если элемент a содержится (не содержится) в множестве A , то это будем записывать так: $a \in A$ ($a \notin A$). Пусть B — другое множество. Обозначаем $A \subset B$ включение A в B , $A = B$ — совпадение A с B , $A \cup B$ — объединение A и B , $A \cap B$ — пересечение A и B , $A \setminus B$ — дополнение B до A (рис. 1), $A \times B$ — произведение A и B (множество пар (a, b) , $a \in A, b \in B$), $\emptyset$ — пустое множество.



Рис. 1.

1. Точечные множества в R^n . Обозначим n -мерное вещественное евклидово пространство через R^n , а его точки через $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, y , z и т. д., где $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ — координаты точки x . Символами (x, y) и $|x|$ обозначим скалярное произведение и длину (норму) в R^n :

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Таким образом, число $|x - y|$ есть евклидово расстояние между точками x и y .

Множество точек x из R^n , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < R$, называется открытым шаром радиуса R с центром в точке x_0 . Этот шар будем обозначать $U(x_0; R)$; $U_R = U(0; R)$.

Последовательность точек $x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})$, $k = 1, 2, \dots$, называется сходящейся к точке x в R^n , $x_k \rightarrow x$, $k \rightarrow \infty$, если $|x_k - x| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Последователь-

ность x_k , $k=1, 2, \dots$, называется *сходящейся к себе* в R^n , если $|x_k - x_p| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$.

Следующее предложение выражает свойство полноты пространства R^n (принцип сходимости Коши). Для того чтобы последовательность точек сходилась в R^n , необходимо и достаточно, чтобы она сходилась к себе в R^n .

Множество называется *ограниченным* в R^n , если существует шар, содержащий это множество.

Следующее предложение выражает свойство компактности пространства R^n (теорема Больцано — Вейерштрасса). Из всякого бесконечного ограниченного множества в R^n можно выбрать сходящуюся последовательность.

Точка x_0 называется *внутренней точкой* множества, если существует шар $U(x_0; \epsilon)$, содержащийся в этом множестве. Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние. Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить кусочно-гладкой кривой, лежащей в этом множестве. Связное открытое множество называется *областью*. Точка x_0 называется *предельной точкой* множества A , если существует последовательность x_k , $k=1, 2, \dots$, такая, что $x_k \in A$, $x_k \neq x_0$, $x_k \rightarrow x_0$, $k \rightarrow \infty$. Если к множеству A добавить все его предельные точки, то полученное множество называется *замыканием* множества A и обозначается $\bar{A}$; ясно, что $A \subset \bar{A}$. Если множество совпадает со своим замыканием, то оно называется *замкнутым*. Замкнутое ограниченное множество называется *компактом*. *Окрестностью* множества A называется всякое открытое множество, содержащее A ; ϵ -*окрестностью* A_ϵ множества A называется объединение шаров $U(x; \epsilon)$, когда x пробегает A : $A_\epsilon = \bigcup_{x \in A} U(x; \epsilon)$.

Функция $\chi_A(x)$, равная 1 при $x \in A$ и 0 при $x \notin A$, называется *характеристической функцией* множества A .

Справедливо следующее предложение о покрытии (лемма Гейне — Бореля). Если компакт K покрыт системой открытых шаров, то из этого покрытия можно выбрать конечную подсистему, покрывающую K .

Пусть G — область. Точки замыкания $\bar{G}$, не принадлежащие G , образуют замкнутое множество S , называемое *границей* области G , так что $S = \bar{G} \setminus G$. Например, границей открытого шара $U(x_0; R)$ является сфера $|x -$

$-x_0| = R$. Эту сферу будем обозначать $S(x_0; R)$; $S_R = S(0; R)$.

Будем говорить, что поверхность S принадлежит классу C^r , $r \geq 1$, если в некоторой окрестности каждой точки $x_0 \in S$ она представляется уравнением $\omega_{x_0}(x) = 0$, причем $\text{grad } \omega_{x_0}(x) \neq 0$ и функция $\omega_{x_0}(x)$ непрерывна вместе со всеми производными до порядка r включительно в упомянутой окрестности. Поверхность S называется *кусочно-гладкой*, если она состоит из конечного числа поверхностей класса C^1 .

Впредь мы будем рассматривать только области с кусочно-гладкими границами; через $n = n_x$ обозначим единичный вектор внешней нормали к границе S в точке $x \in S$. Пусть точка x_0 лежит на кусочно-гладкой поверхности S . *Окрестностью* точки x_0 на поверхности S называется та связная часть множества $S \cap U(x_0; R)$, которая содержит точку x_0 .

Ограниченная область G' называется *подобластью*, строго лежащей в области G , если $G' \subset G$; при этом пишут $G' \Subset G$. В силу леммы Гейне — Бореля существует такое число $\epsilon > 0$, что $G'_\epsilon \Subset G$ (рис. 2).

2. **Классы функций $C^p(G)$ и $C^p(\bar{G})$.** Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — целочисленный вектор с неотрицательными составляющими α_j (мультииндекс). Через $D^\alpha f(x)$ обозначаем производную функции $f(x)$ порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$:

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D^0 f(x) = f(x);$$

$$D = (D_1, D_2, \dots, D_n), \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Для низших производных мы иногда будем употреблять и такие обозначения: f_{x_1} , $f_{x_1 x_1}$ и т. д. Мы будем пользоваться также следующими сокращенными обозначениями:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!.$$

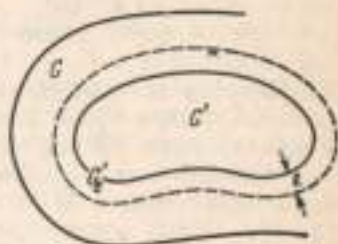


Рис. 2.

Множество (комплексных) функций f , непрерывных вместе с производными $D^\alpha f(x)$, $|\alpha| \leq p$ ($0 \leq p < \infty$), в области G , образует класс функций $C^p(G)$. Функции f класса $C^p(G)$, у которых все производные $D^\alpha f(x)$, $|\alpha| \leq p$, допускают непрерывное продолжение на замыкание $\bar{G}$, образуют класс функций $C^p(\bar{G})$; при этом под значением $D^\alpha f(x)$, $x \in S$, $|\alpha| \leq p$, понимаем $\lim D^\alpha f(x')$ при $x' \rightarrow x$, $x' \in G$. Класс функций, принадлежащих $C^p(\bar{G})$ при всех p , обозначим через $C^\infty(\bar{G})$; аналогично определяется и класс функций $C^\infty(G)$.

Таким образом, класс $C^p(G)$ состоит из всех непрерывных функций в G , а класс $C^p(\bar{G})$ можно отождествить с множеством всех непрерывных функций на $\bar{G}$. Для сокращения записи обозначаем $C(G) = C^0(G)$, $C(\bar{G}) = C^0(\bar{G})$. Иногда аргумент G или $\bar{G}$ у класса C^p будем опускать.

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором множестве, содержащем область G . В этом случае принадлежность f классу $C^p(\bar{G})$ означает, что сужение f на $\bar{G}$ принадлежит $C^p(\bar{G})$. Например, функция $H(x) = 0$, $x < 0$; $H(0) = \frac{1}{2}$; $H(x) = 1$, $x > 0$, принадлежит классам $C^\infty(x < 0)$ и $C^\infty(x > 0)$, причем если H рассматривается как функция класса $C^\infty(x < 0)$, то ее значение в 0 следует считать равным 0, а если H — функция класса $C^\infty(x > 0)$, то ее значение в 0 следует считать равным 1 (в соответствии с определениями).

Введенные классы функций представляют собой линейные множества, т. е. из принадлежности функций f и g какому-либо из этих классов следует принадлежность этому же классу и любой их линейной комбинации $\lambda f + \mu g$, где λ и μ — произвольные комплексные числа.

Функция f называется кусочно-непрерывной в R^n , если существует конечное или счетное число областей G_k , $k = 1, 2, \dots$, без общих точек с кусочно-гладкими границами таких, что каждый шар покрывается конечным числом замкнутых областей $\bar{G}_k$ и $f \in C(\bar{G}_k)$, $k = 1, 2, \dots$

Кусочно-непрерывная функция называется финитной, если она обращается в нуль вне некоторого шара.

Пусть $\varphi \in C(R^n)$. Носителем непрерывной функции φ называется замыкание множества тех точек, где $\varphi(x) \neq 0$; носитель φ обозначаем $\text{supp } \varphi$.

Таким образом, функция $\varphi(x)$ финитна тогда и только тогда, когда $\text{supp } \varphi$ ограничен.

3. Пространство непрерывных функций $C(T)$. Пусть T — замкнутое множество, например замыкание $\bar{G}$ или граница S области G . Обозначим через $C(T)$ класс непрерывных и ограниченных на T функций. Наблюдим класс $C(T)$ нормой, положив

$$\|f\|_C = \sup_{x \in T} |f(x)|, f \in C(T). \quad (1)$$

Норма (1) обладает следующими тремя характерными для нормы свойствами:

- $\|f\|_C \geq 0$; $\|f\|_C = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$;
- $\|\lambda f\|_C = |\lambda| \|f\|_C$, где λ — любое комплексное число;
- $\|f + g\|_C \leq \|f\|_C + \|g\|_C$ (неравенство треугольника).

Вообще всякое линейное множество, снабженное нормой, обладающей свойствами а) — с), называется линейным нормированным пространством.

Таким образом, $C(T)$ — линейное нормированное пространство.

Последовательность функций f_k , $k = 1, 2, \dots$, из $C(T)$ называется сходящейся к функции $f \in C(T)$ в пространстве $C(T)$, $f_k \rightarrow f$, $k \rightarrow \infty$ в $C(T)$, если $\|f_k - f\|_C \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Очевидно, сходимость $f_k \rightarrow f$, $k \rightarrow \infty$ в $C(T)$ эквивалентна равномерной сходимости последовательности функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, к функции $f(x)$ на множестве T :

$$f_k(x) \xrightarrow{\text{равн.}} f(x), k \rightarrow \infty.$$

Последовательность функций f_k , $k = 1, 2, \dots$, из $C(T)$, называется сходящейся в себе в $C(T)$, если $\|f_k - f_p\|_C \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$.

Следующее предложение выражает свойство полноты пространства $C(T)$ (теорема Коши). Для того чтобы последовательность функций из $C(T)$ сходилась в $C(T)$, необходимо и достаточно, чтобы она сходилась в себе в $C(T)$.

Справедливы следующие полезные предложения.

Теорема Вейерштрасса. Если G — ограниченная область и $f \in C^p(\bar{G})$, то для любого $\epsilon > 0$ существует полином P такой, что

$$\|D^\alpha f - D^\alpha P\|_C < \epsilon \text{ при всех } |\alpha| \leq p.$$

Лемма Дини*). Если монотонная последовательность непрерывных функций на компакте K сходится в каждой точке к непрерывной функции на K , то она сходится равномерно на K .

Ряд, составленный из функций $u_k \in C(T)$, называется регулярно сходящимся на T , если ряд из абсолютных величин $|u_k(x)|$ сходится в $C(T)$, т. е. сходится равномерно на T .

Множество $\mathcal{A} \subset C(T)$ называется равномерно-непрерывным на T , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число δ_ε , что при всех $f \in \mathcal{A}$ имеет место неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, как только $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$, $x_1, x_2 \in T$.

Функция $f \in C(T)$ называется непрерывной по Гельдеру на T , если существуют такие числа $C > 0$ и α , $0 < \alpha \leq 1$, что при всех $x_1 \in T$ и $x_2 \in T$ справедливо неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C |x_1 - x_2|^\alpha;$$

если $\alpha = 1$, то функция $f(x)$ называется непрерывной по Липшицу на T .

Пусть функции $f(x)$ и $\omega(x)$ заданы в окрестности точки x_0 (конечной или бесконечно удаленной). Будем писать:

$$f(x) = O[\omega(x)] \text{ или } f(x) = o[\omega(x)], \quad x \rightarrow x_0,$$

если отношение $\frac{f(x)}{\omega(x)}$ ограничено или стремится к 0 при $x \rightarrow x_0$ соответственно.

4. **Интеграл Лебега.** Говорят, что множество $A \subset R^n$ имеет меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ оно может быть покрыто шарами суммарного объема $< \varepsilon$.

Из этого определения вытекает, что всякое подмножество множества меры нуль имеет меру нуль и объединение не более чем счетного числа множеств меры нуль также имеет меру нуль. Например, всякое счетное множество и всякая кусочно-гладкая поверхность имеют меру нуль.

Говорят, что некоторое свойство выполняется почти везде в области $G \subset R^n$, если множество точек области G , которые не обладают этим свойством, имеет меру нуль.

*) См., например, В. И. Смирнов [2], гл. I.

при этом вместо «почти везде в R^n » будем говорить просто «почти везде».

Считаем, что все функции заданы во всем пространстве R^n и почти везде конечны.

Функция f называется измеримой, если она совпадает почти везде с пределом почти везде сходящейся последовательности кусочно-непрерывных функций.

Из этого определения следует: если функции f и g измеримы, то функции $f+g$, fg , $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $|f|$ и $|f/g|$, если $g \neq 0$, также измеримы; всякая функция, совпадающая почти везде с пределом почти везде сходящейся последовательности измеримых функций, измерима.

Множество $A \subset R^n$ называется измеримым, если его характеристическая функция $\chi_A(x)$ (см. § 1.1)*) измерима.

Неизмеримые функции (и множества) устроены весьма неправильно, и ни одна из них не построена в явном виде; можно только теоретически доказать их существование, используя так называемую аксиому выбора. Это говорит о том, что все функции и множества, которые нам могут встретиться, будут измеримы. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, не оговаривая этого каждый раз, что все рассматриваемые множества измеримы, а функции измеримы и почти везде конечны.

Пусть $f(x)$ — кусочно-непрерывная финитная функция. Элемент объема в R^n обозначим через $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$, так что n -кратный интеграл Римана функции f по R^n сокращенно запишем в виде

$$\int f(x) dx = \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Пусть (вещественная) функция $f(x)$ совпадает почти везде с пределом неубывающей последовательности кусочно-непрерывных функций $f_k(x)$, $k=1, 2, \dots$ с ограниченной последовательностью интегралов (Римана) $\int f_k(x) dx$, $k=1, 2, \dots$. Предел неубывающей ограниченной последовательности этих интегралов называется **интегралом Лебега функции f** и обозначается символом $\int f(x) dx$,

*) Ссылка вида § 1.2 означает пункт 2 § 1.

так что

$$\int f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx.$$

Класс таких функций обозначим через $\mathcal{L}^+$.

Чтобы это определение было корректным, нужно доказать, что интеграл Лебега функции $f \in \mathcal{L}^+$ не зависит от последовательности $\{f_k\}$.

Прежде всего докажем: если $f \in \mathcal{L}^+$, $f(x) \geq 0$ почти везде и $\{f_k\}$ — последовательность, определяющая интеграл Лебега функции f , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx \geq 0. \quad (2)$$

Для доказательства (2) возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть числа $R > 0$ и $M > 0$ таковы, что $f_k(x) = 0$, $|x| > R$ и $f_k(x) \geq -M$, $x \in U_R$, так что и

$$f_k(x) \geq 0, \quad |x| > R, \quad f_k(x) \geq -M, \quad x \in U_R, \quad k=1, 2, \dots \quad (3)$$

Обозначим через A множество тех точек шара U_R , в которых разрывна хотя бы одна из функций $f_k(x)$, $k=1, 2, \dots$ или $f_k(x) \neq f(x)$, $k \rightarrow \infty$. Множество A имеет меру нуль и, значит, его можно покрыть шарами $U(x_j; r_j)$, $j=1, 2, \dots$, сумма объемов которых $< \varepsilon$. Итак, на компакте $K = U_R \setminus \bigcup_j U(x_j; r_j)$ функции $f_k(x)$ непрерывны и

$f_k(x) \rightarrow f(x) \geq 0$, $k \rightarrow \infty$, и потому для любой точки x из K найдется такой номер N_x и такое число r_x , что $f_{N_x}(x') \geq -\varepsilon$, $x' \in U(x; r_x) \cap K$. Таким образом, компакт K покрыт системой открытых шаров $U(x; r_x)$, $x \in K$. По лемме Гейне — Бореля из этого покрытия извлечем конечное покрытие, и пусть N_0 — наибольший из соответствующих номеров N_x . Так как функции $f_k(x)$ не убывают, то, в силу выбора номера N_0 ,

$$f_{N_0}(x) \geq f_{N_x}(x) \geq -\varepsilon, \quad x \in K \subset U_R.$$

Отсюда и из (3) при всех $k > N_0$ имеем:

$$\begin{aligned} \int f_k(x) dx &\geq \int f_{N_0}(x) dx \geq \int_{U_R} f_{N_0}(x) dx \geq \\ &\geq -\varepsilon \int_{U_R} dx - M \sum_{j=1}^n \int_{U(x_j; r_j)} dx \geq -\varepsilon \left(\int_{U_R} dx + M \right), \end{aligned}$$

что ввиду произвольности ε и влечет требуемое неравенство (2).

Пусть теперь $\{g_j\}$ — другая последовательность, определяющая интеграл Лебега функции $f \in \mathcal{L}^+$. Тогда из неравенства $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) - g_j(x) dx = \int f(x) - g_j(x) dx \geq 0$ (почти везде) следует, в силу (2), неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) - g_j(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx - \int g_j(x) dx \geq 0,$$

$$j=1, 2, \dots$$

и потому

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx.$$

Меняя ролями последовательности $\{f_k\}$ и $\{g_j\}$, получим обратное неравенство, и, следовательно, справедливо требуемое равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j(x) dx.$$

Вещественная функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Лебегу* (суммируемой), если она представима в виде разности функций класса $\mathcal{L}^+$:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x), \quad f_j \in \mathcal{L}^+, \quad j=1, 2, \quad (4)$$

Число

$$\int f_1(x) dx - \int f_2(x) dx = \int f(x) dx$$

называется *интегралом Лебега функции f* . Класс функций, интегрируемых по Лебегу, обозначим через $\mathcal{L}$. Все функции класса $\mathcal{L}$ измеримы и почти везде конечны.

Чтобы оправдать это определение, нужно показать, что интеграл Лебега функции $f \in \mathcal{L}$ не зависит от представления (4).

Действительно, если

$$f_1 - f_2 = f = g_1 - g_2, \quad f_j \in \mathcal{L}^+, \quad g_j \in \mathcal{L}^+,$$

то $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$. Отсюда и из свойства аддитивности интеграла Лебега для функций класса $\mathcal{L}^+$ вытекает требуемое равенство

$$\int f_1(x) dx - \int f_2(x) dx = \int g_1(x) dx - \int g_2(x) dx.$$

Комплекснозначная функция $f(x)$ называется интегрируемой по Лебегу $f \in \mathcal{L}$, если $\operatorname{Re} f \in \mathcal{L}$ и $\operatorname{Im} f \in \mathcal{L}$; число

$$\int \operatorname{Re} f(x) dx + i \int \operatorname{Im} f(x) dx = \int f(x) dx$$

называется интегралом Лебега функции f .

Будем говорить, что функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на измеримом множестве A , $f \in \mathcal{L}(A)$, если $f \chi_A \in \mathcal{L}$; число

$$\int f(x) \chi_A(x) dx = \int_A f(x) dx$$

называется интегралом Лебега функции f по множеству A .

Функция $f(x)$ называется локально интегрируемой по Лебегу в области G , $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(G)$, если $f \in \mathcal{L}(G')$ для всех измеримых $G' \subseteq G$. Обозначаем: $\mathcal{L}_{\text{loc}}(R^n) = \mathcal{L}_{\text{loc}}$.

В соответствии с этими определениями всякая кусочно-непрерывная финитная функция интегрируема по Лебегу, и ее интегралы Римана и Лебега совпадают. С другой стороны, существуют функции, интегрируемые по Лебегу и неинтегрируемые по Риману, например функция Дирихле:

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ иррационально,} \\ 1, & x \text{ рационально.} \end{cases}$$

Интеграл Лебега функции $f_0(x)$ равен 0 ($f_0 \in \mathcal{L}$).

Можно показать, что если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы по Риману (возможно, в несобственном смысле), то они интегрируемы и по Лебегу, и их интегралы в обоих смыслах совпадают.

Имея в виду этот факт, впредь мы будем называть интегрируемыми по Лебегу функции просто интегрируемыми функциями.

Интеграл Лебега обладает следующими основными свойствами (некоторые из них следуют непосредственно из определений, доказательства других можно найти, например, в книгах Ф. Рисса и Б. Секефальви-Надя [1], гл. II и А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [1], гл. V).

а) Если $f \in \mathcal{L}$, $\int |f(x)| dx = 0$, то $f(x) = 0$ почти везде, и обратно.

б) Если $f \in \mathcal{L}$, то $|f| \in \mathcal{L}$; или f измерима и $|f| \in \mathcal{L}$, то $f \in \mathcal{L}$. При этом справедливо неравенство

$$\left| \int f(x) dx \right| \leq \int |f(x)| dx.$$

в) Если $g \in \mathcal{L}$, f измерима и $|f(x)| \leq g(x)$ почти везде, то $f \in \mathcal{L}$, и справедливо неравенство

$$\int |f(x)| dx \leq \int g(x) dx.$$

Отсюда следует, что всякая ограниченная (измеримая) функция интегрируема по Лебегу на любом ограниченном (измеримом) множестве. В частности, если A — ограниченное (измеримое) множество, то интеграл Лебега

$$\int_A dx = \int \chi_A(x) dx$$

существует; он называется мерой Лебега множества A . Ясно, что мера Лебега ограниченной области с кусочно-гладкой границей совпадает с ее объемом.

д) Интеграл Лебега линейен (аддитивен) относительно подынтегральной функции: если $f \in \mathcal{L}$, $g \in \mathcal{L}$ и λ и μ — комплексные числа, то $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}$ и справедливо равенство

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx.$$

е) Абсолютная непрерывность интеграла Лебега: если $f \in \mathcal{L}(G)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $G' \subseteq G$ (рис. 2), что

$$\int_{G \setminus G'} |f(x)| dx < \varepsilon.$$

ж) О переходе к пределу под знаком интеграла Лебега.

Теорема Лебега. Пусть последовательность (измеримых) функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ сходится почти везде к функции $f(x)$. Если существует функция $g \in \mathcal{L}$ такая, что $|f_k(x)| \leq g(x)$ почти везде, $k = 1, 2, \dots$, то $f \in \mathcal{L}$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx = \int f(x) dx.$$

Теорема Б. Леви. Если неубывающая (почти везде) последовательность $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ функций из $\mathcal{L}$

сходится почти везде к функции $f(x)$ и последовательность интегралов $\int f_k(x) dx$, $k=1, 2, \dots$ ограничена, то $f \in \mathcal{L}$, и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx = \int f(x) dx.$$

г) Замена переменных в интеграле Лебега. Пусть преобразование $x=x(y)$ класса $C^1(G)$, т. е.

$$x_k = x_k(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad k=1, 2, \dots, n, \quad x_k \in C^1(G),$$

взаимно-однозначно отображает область G на область G_1 , и $D\left(\frac{x}{y}\right)$ — якобиан этого преобразования.

Для того чтобы $f(x) \in \mathcal{L}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы $f[x(y)] D\left(\frac{x}{y}\right) \in \mathcal{L}(G_1)$. При этом справедливо равенство

$$\int_G f(x) dx = \int_{G_1} f[x(y)] \left| D\left(\frac{x}{y}\right) \right| dy.$$

б) Теорема Фубини (о перемене порядка интегрирования в интеграле Лебега). Если функция $f(x, y)$, заданная на R^{n+m} , $x \in R^n$, $y \in R^m$, измерима и существует повторный интеграл Лебега функции $|f(x, y)|$

$$\int [|f(x, y)| dx] dy < \infty,$$

то $f \in \mathcal{L}$. Обратно, если $f \in \mathcal{L}$, то интегралы Лебега

$$\int f(x, y) dx, \quad \int f(x, y) dy$$

существуют почти везде, интегрируемы по Лебегу, и справедливы равенства

$$\int \left[\int f(x, y) dy \right] dx = \int f(x, y) dx dy = \int \left[\int f(x, y) dx \right] dy.$$

Отметим, что если функция $f(x, y)$ неинтегрируема, то повторные интегралы могут и не существовать или не

быть равными, например:

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right] dx = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right] dy = -\frac{\pi}{4}.$$

Замечание. Интеграл Лебега по кусочно-гладкой поверхности S строится аналогично. При этом для функций $f(x, y)$, заданных на $R^n \times S$, сохраняется соответствующая теорема Фубини.

5. Интегралы Лебега, зависящие от параметра. Условия, при которых имеет место непрерывность по параметру и возможно дифференцирование под знаком интеграла, для интеграла Лебега менее ограничительны, чем для интеграла Римана.

Из теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла Лебега (см. § 1.4, г)) непосредственно вытекает следующее утверждение.

Пусть функция $f(x, y)$, заданная на $R^n \times A$, $A \subset R^m$, непрерывна по y на множестве A при почти всех $x \in R^n$ и существует интегрируемая функция $g(x)$ такая, что при каждом $y \in A$ $|f(x, y)| \leq g(x)$ почти везде. Тогда интеграл $\int f(x, y) dx$ есть непрерывная функция на A .

Справедлива следующая

Теорема (о дифференцировании под знаком интеграла Лебега). Пусть функция $f(x, t)$, заданная на $R^n \times (a, b)$, имеет непрерывную по t в (a, b) производную $f_t(x, t)$ при почти всех $x \in R^n$ и существует интегрируемая функция $g(x)$ такая, что при каждом $t \in (a, b)$ $|f_t(x, t)| \leq g(x)$ почти везде; пусть, далее, при некотором $t_0 \in (a, b)$ существует интеграл $\int f(x, t_0) dx$. Тогда функция $\int f(x, t) dx \in C^1(a, b)$ и справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \int f(x, t) dx = \int \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx. \quad (5)$$

Доказательство. По предыдущему утверждению функция $\int f_t(x, t) dx$ непрерывна по t в (a, b) . Далее, пользуясь теоремой Фубини (см. § 1.4, б)), при всех

$t \in (a, b)$ имеем

$$\int_a^t \left[\int \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial \tau} dx \right] d\tau = \int \left[\int_a^t \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] dx = \\ = \int f(x, t) dx - \int f(x, t_0) dx,$$

откуда, дифференцируя по t , получаем равенство (5) и остальные утверждения теоремы.

6. **Интегралы типа потенциала.** Пусть функция $\rho(y)$ (абсолютно) интегрируема на ограниченной области $G \subset R^n$ и обращается в нуль вне G . Интеграл

$$I(x) = \int \frac{\rho(y) dy}{|x-y|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < n,$$

называется *интегралом типа потенциала*. Такие интегралы часто встречаются в математической физике.

Докажем сначала справедливость оценки

$$\int_{\partial_R} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \leq C_\alpha R^{n-\alpha}, \quad x \in R^n. \quad (6)$$

Действительно, если $|x| \geq 2R$, то $|x-y| \geq |x| - |y| > R$ при всех $|y| < R$, и поэтому

$$\int_{\partial_R} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{1}{R^\alpha} \int_{\partial_R} dy = \frac{\sigma_n}{n} R^{n-\alpha};$$

если же $|x| < 2R$, то $|x-y| \leq |x| + |y| < 3R$ и

$$\int_{\partial_R} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} = \int_{U(R, R)} \frac{d\omega}{|\xi|^\alpha} \leq \int_{U(2R, 2R)} \frac{d\omega}{|\xi|^\alpha} = \frac{\sigma_n}{n-\alpha} (3R)^{n-\alpha}.$$

Здесь σ_n — площадь поверхности единичной сферы в R^n . Оценка (6) доказана.

Из (6) вытекает, что при всех $R > 0$ существует повторный интеграл

$$\int \rho(y) \left| \int \frac{dx}{|x-y|^\alpha} \right| dy \leq C_\alpha R^{n-\alpha} \int \rho(y) dy.$$

А тогда, по теореме Фубини (см. § 1.4, б)), интеграл $I(x)$ существует почти всюду и представляет собой локально интегрируемую функцию в R^n (см. § 1.4).

Вне области G интеграл $I(x)$, в силу результатов § 1.5, есть бесконечно дифференцируемая функция и все ее производные получают дифференцированием под знаком интеграла

$$D^\beta I(x) = \int \rho(y) D_x^\beta \frac{1}{|x-y|^\alpha} dy, \quad x \in R^n \setminus \bar{G}.$$

Докажем, что при всех β

$$D^\beta I(x) = O(|x|^{-\alpha-|\beta|}), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Действительно, пусть $G \subset U_R$ и $|x| > R$; тогда $|x-y| \geq |x| - |y| \geq |x| - R$ при всех $y \in G$. Отсюда, принимая во внимание оценку

$$\left| D_x^\beta \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right| \leq \frac{K_\beta}{|x-y|^{\alpha+|\beta|}},$$

при $|x| > R$ получим

$$|D^\beta I(x)| \leq K_\beta \int \frac{|\rho(y)| dy}{|x-y|^{\alpha+|\beta|}} \leq \frac{K_\beta}{(|x|-R)^{\alpha+|\beta|}} \int |\rho(y)| dy,$$

откуда и следует (7) (см. § 1.3).

Теорема. Пусть функция ρ ограничена, $|\rho(y)| \leq M$ почти везде в G . Тогда интеграл $I \in C^p(R^n)$, где p — наибольшее целое число такое, что $\alpha + p < n$. Соответствующие производные функции $I(x)$ получают дифференцированием под знаком интеграла.

Доказательство. Докажем, что $I(x)$ — непрерывная функция в R^n . Фиксируем $x_0 \in R^n$ и возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$|I(x_0) - I(x)| \leq \int \rho(y) \left| \frac{1}{|x_0-y|^\alpha} - \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right| dy \leq \\ \leq M \int_{U(x_0, \eta)} \left[\frac{1}{|x_0-y|^\alpha} + \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right] dy + \\ + M \int_{G \setminus U(x_0, \eta)} \left| \frac{1}{|x_0-y|^\alpha} - \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right| dy.$$

Первое слагаемое справа, в силу оценки (6), не превосходит $2MC_\alpha \eta^{n-\alpha}$ и потому может быть сделано $< \frac{\varepsilon}{2}$ при

достаточно малом η . Во втором слагаемом подынтегральная функция равномерно непрерывна по (x, y) в области $|x - x_0| \leq \frac{\eta}{2}$, $|y - x_0| \geq \eta$, $y \in G$ и обращается в нуль при $x = x_0$; поэтому этот интеграл может быть сделан $< \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $x \in U(x_0; \delta)$, если δ достаточно мало, $\delta \leq \frac{\eta}{2}$. Итак, нашлось такое число δ , что $|I(x_0) - I(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ при всех $|x - x_0| < \delta$. Это и значит, что функция $I(x)$ непрерывна в (произвольной) точке $x_0 \in R^n$, т. е. $I \in C(R^n)$.

Пусть $\alpha + 1 < n$. Продифференцируем подынтегральное выражение в $I(x)$ по x_i , $i = 1, \dots, n$, и рассмотрим функции

$$I_i(x) = \int_G \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-y|^\alpha} dy = \alpha \int_G \rho(y) \frac{y_i - x_i}{|x-y|^{\alpha+1}} dy.$$

В силу оценки

$$\left| \frac{y_i - x_i}{|x-y|^{\alpha+1}} \right| \leq \frac{1}{|x-y|^{\alpha+1}}$$

рассуждение, полностью аналогичное тому, которое мы только что проделали для интеграла $I(x)$, показывает, что функции $I_i(x)$ непрерывны в R^n .

Докажем, что

$$I_{x_i}(x) = I_i(x), \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Для этого применим то же рассуждение, что и при доказательстве теоремы § 1.5. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} I_i(x) dx_i &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_G \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-y|^\alpha} dy \right] dx_i = \\ &= \int_G \rho(y) \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-y|^\alpha} dx_i \right] dy = \end{aligned}$$

$$= I(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, \dots, x_n) - I(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^*, \dots, x_n),$$

откуда, дифференцируя по ξ_i , получим равенство (8). Законность перемены порядка интегрирования в преды-

дущих равенствах вытекает из существования повторного интеграла

$$\alpha \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_G \frac{\rho(y)}{|x-y|^{\alpha+1}} dy \right] dx_i \leq M \alpha |\xi_i - x_i^*| C_{\alpha+1} R^{n-\alpha-1}$$

в силу теоремы Фубини (см. § 1.4, h)). Здесь мы пользовались оценкой (б), предполагая, что $G \subset U_R$.

Таким образом, мы доказали, что $I \in C^1(R^n)$ и допустимо дифференцирование один раз под знаком интеграла $I(x)$. Если же $\alpha + 2 < n$, то, применяя предыдущие рассуждения к функциям $I_i(x)$, установим, что $I \in C^2(R^n)$ и допустимо дифференцирование два раза под знаком интеграла $I(x)$; и т. д. Теорема доказана.

Пусть функции $\mathcal{K}(x, y)$, $\mathcal{K}_1(x, y)$ и $\mathcal{K}_2(x, y)$ непрерывны на $G \times G$. Аналогично предыдущему устанавливается, что интегралы

$$\int_G \frac{\mathcal{K}(x, y)}{|x-y|^\alpha} dy \quad \text{и} \quad \int_G \frac{\mathcal{K}_1(x, y') \mathcal{K}_2(y', y)}{|x-y'|^{\alpha_1} |y'-y|^{\alpha_2}} dy'$$

непрерывны на G и $G \times G$, если $\alpha < n$ и $\alpha_1 + \alpha_2 < n$ соответственно.

Замечание. Все сказанное об интеграле $I(x)$ без существенных изменений переносится и на интеграл типа потенциала вида

$$\int_S \frac{\rho(y)}{|x-y|^\alpha} dS_y, \quad 0 < \alpha < n-1,$$

где S — ограниченная кусочно-гладкая поверхность и ρ — ограниченная функция на S .

7. Пространство функций $\mathcal{L}_2(G)$. Совокупность всех функций f , для которых функция $|f(x)|^2$ интегрируема на области G , обозначим через $\mathcal{L}_2(G)$.

Множество функций $\mathcal{L}_2(G)$ — линейное.

Действительно, если $f \in \mathcal{L}_2(G)$ и $g \in \mathcal{L}_2(G)$, то из неравенства

$$|\lambda f + \mu g|^2 \leq 2|\lambda|^2 |f|^2 + 2|\mu|^2 |g|^2$$

вытекает, что и их любая линейная комбинация $\lambda f + \mu g$ также принадлежит $\mathcal{L}_2(G)$.

Установим важное неравенство (*неравенство Коши—Буняковского*): если f и $g \in \mathcal{L}_2(G)$, то

$$\left| \int_G f(x) g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_G |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_G |g(x)|^2 dx}.$$

Действительно, поскольку f и $g \in \mathcal{L}_2(G)$, то при всех действительных λ $|f| + \lambda |g| \in \mathcal{L}_2(G)$, а потому

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_G (|f(x)| + \lambda |g(x)|)^2 dx = \\ &= \int_G |f(x)|^2 dx + 2\lambda \int_G |f(x)g(x)| dx + \lambda^2 \int_G |g(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Следовательно, дискриминант этой квадратичной формы неотрицателен, т. е.

$$\left(\int_G |f(x)g(x)| dx \right)^2 - \int_G |f(x)|^2 dx \int_G |g(x)|^2 dx \leq 0,$$

откуда и вытекает требуемое неравенство Коши—Буняковского.

Отметим дискретный аналог неравенства Коши—Буняковского. Обозначим через l_2 множество последовательностей комплексных чисел $a = \{a_1, a_2, \dots\}$, для которых

$$|a|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty. \text{ Если } a = \{a_k\} \in l_2 \text{ и } b = \{b_k\} \in l_2, \text{ то}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2}.$$

Если $f \in \mathcal{L}_2(G)$ и G —ограниченная область, то функция $f(x)$ интегрируема на G .

Действительно, применяя неравенство Коши—Буняковского при $g \equiv 1$, получим

$$\int_G |f(x)| dx \leq \sqrt{\int_G |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_G 1 dx} < \infty. \quad (9)$$

На множестве функций $\mathcal{L}_2(G)$ введем скалярное произведение и норму по формулам

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_G f(x) \bar{g}(x) dx, \\ \|f\| &= \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_G |f(x)|^2 dx}, \end{aligned}$$

превращая тем самым $\mathcal{L}_2(G)$ в (линейное) нормированное пространство. Здесь $\bar{g}(x)$ —функция, комплексно сопряженная с $g(x)$.

Очевидно, введенное скалярное произведение обладает свойствами:

$$(f, g) = \overline{(g, f)}, \quad (\lambda f + \mu g, h) = \lambda (f, h) + \mu (g, h).$$

Кроме того, в терминах нормы и скалярного произведения неравенство Коши—Буняковского принимает вид

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|, \quad f, g \in \mathcal{L}_2(G).$$

Из этого неравенства вытекает следующее *неравенство Минковского*:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \quad f, g \in \mathcal{L}_2(G). \quad (10)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= (f + g, f + g) = (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g) \leq \\ &\leq \|f\|^2 + |(f, g)| + |(g, f)| + \|g\|^2 \leq \\ &\leq \|f\|^2 + \|f\| \|g\| + \|g\| \|f\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что норма $\|\cdot\|$ удовлетворяет условиям а)–с) § 1.3.

Последовательность функций $f_k, k=1, 2, \dots$, из $\mathcal{L}_2(G)$ называется *сходящейся* к функции $f \in \mathcal{L}_2(G)$ в пространстве $\mathcal{L}_2(G)$ (или *в среднем в G*), если $\|f_k - f\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$; при этом будем писать

$$f_k \rightarrow f, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{L}_2(G).$$

Следующее предложение выражает свойство полноты пространства $\mathcal{L}_2(G)$ (теорема Рисса—Фишера*): если последовательность функций $f_k, k=1, 2, \dots$, из $\mathcal{L}_2(G)$ сходится в себе в $\mathcal{L}_2(G)$, т. е. $\|f_k - f_p\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty$, то существует функция $f \in \mathcal{L}_2(G)$ такая, что $\|f_k - f\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$; при этом функция f единственна с точностью до значений на множестве меры 0.

Пространство $\mathcal{L}_2(G)$ относится к классу так называемых *гильбертовых пространств*.

Множество функций $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}_2(G)$ называется *плотным* в $\mathcal{L}_2(G)$, если для любой $f \in \mathcal{L}_2(G)$ существует последо-

* См. Ф. Рисс и Б. Секефальи-Надь [1], гл. II.

зательность функций из $\mathcal{H}$, сходящаяся к f в $\mathcal{L}_2(G)$. Например, множество $C(G)$ плотно в $\mathcal{L}_2(G)$, откуда следует, что и множество полиномов плотно в $\mathcal{L}_2(G)$, если G — ограниченная область (в силу теоремы Вейерштрасса (см. § 1.3)).

8. Ортонормальные системы. Функции f и g из $\mathcal{L}_2(G)$ называются *ортгогоналными*, если $(f, g) = 0$; функция f из $\mathcal{L}_2(G)$ называется *нормированной*, если $\|f\| = 1$. Системы функций $\{\varphi_k\}$ из $\mathcal{L}_2(G)$ называется *ортонормальной* в $\mathcal{L}_2(G)$, если $(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl}$, где δ_{kl} — символ Кронекера: $\delta_{kl} = 0$, $k \neq l$, $\delta_{kk} = 1$.

Примером ортонормальной системы в $\mathcal{L}_2(-\pi, \pi)$ является тригонометрическая система

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad k=0, \pm 1, \dots$$

Конечная или счетная система функций $\{\varphi_k\}$ называется *линейно независимой*, если для любого конечного набора чисел $\{c_k\}$, $\sum_k c_k \neq 0$, невозможно тождество

$$\sum_k c_k \varphi_k(x) = 0.$$

Всякая ортонормальная система $\{\varphi_k\}$ состоит из линейно независимых функций.

Действительно, в противном случае при некоторых (комплексных) числах $\{c_k\}$, из которых только конечное число отлочно от нуля, мы имели бы равенство $\sum_k c_k \varphi_k = 0$, откуда, в силу ортонормальности системы $\{\varphi_k\}$, получили бы

$$0 = \left(\sum_k c_k \varphi_k, \varphi_l \right) = \sum_k (c_k \varphi_k, \varphi_l) = \sum_k c_k (\varphi_k, \varphi_l) = c_l.$$

Всякая система $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ линейно независимых функций из $\mathcal{L}_2(G)$ преобразуется в ортонормальную систему $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ следующим процессом ортогонализации Шмидта:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}, \quad \varphi_2 = \frac{\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1) \varphi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1) \varphi_1\|}, \dots \\ \varphi_k &= \frac{\psi_k - (\psi_k, \varphi_1) \varphi_1 - \dots - (\psi_k, \varphi_{k-1}) \varphi_{k-1}}{\|\psi_k - (\psi_k, \varphi_1) \varphi_1 - \dots - (\psi_k, \varphi_{k-1}) \varphi_{k-1}\|}, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Пример. Если в пространстве $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ ортогонализировать по Шмидту систему степеней $1, x, x^2, \dots$, то получится система нормированных полиномов Лежандра.

Пусть система функций φ_k , $k=1, 2, \dots$, ортонормальна в $\mathcal{L}_2(G)$ и $f \in \mathcal{L}_2(G)$. Числа (f, φ_k) называются *коэффициентами Фурье*, а формальный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k \quad (12)$$

— *рядом Фурье* функции f по ортонормальной системе $\{\varphi_k\}$.

Если система функций φ_k , $k=1, 2, \dots$, ортонормальна в $\mathcal{L}_2(G)$, то для каждой $f \in \mathcal{L}_2(G)$ и любых (комплексных) чисел $a_1, a_2, \dots, a_N$, $N=1, 2, \dots$, справедливо равенство

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right\|^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^N |(f, \varphi_k) - a_k|^2. \quad (13)$$

Действительно, обозначая

$$f_N = f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k, \quad c_k = (f, \varphi_k) - a_k, \quad (14)$$

получим при $i=1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} (f_N, \varphi_i) &= \\ &= \left(f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k, \varphi_i \right) = (f, \varphi_i) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) (\varphi_k, \varphi_i) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right\|^2 &= \left\| f_N + \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \right\|^2 = \\ &= \left(f_N + \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k, f_N + \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \right) = (f_N, f_N) + \\ &+ \sum_{k=1}^N (f_N, c_k \varphi_k) + \sum_{k=1}^N (c_k \varphi_k, f_N) + \sum_{k, l=1}^N (c_k \varphi_k, c_l \varphi_l) = \\ &= \|f_N\|^2 + \sum_{k, l=1}^N c_k c_l (\varphi_k, \varphi_l) = \|f_N\|^2 + \sum_{k=1}^N |c_k|^2, \end{aligned}$$

откуда, в силу (14), вытекает равенство (13).

Из равенства (13) вытекает неравенство

$$\left| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right|^2 \leq \left| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right|^2. \quad (15)$$

Далее, полагая в (13) $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, N$, получаем равенство

$$\left| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N |(f, \varphi_k)|^2. \quad (16)$$

Из равенства (16) вытекает неравенство

$$\sum_{k=1}^N |(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2, \quad (17)$$

называемое *неравенством Бесселя*.

Из неравенства Бесселя и из теоремы Рисса — Фишера (см. § 1.7) следует, что ряд Фурье (12) сходится в $\mathcal{L}_2(G)$ к некоторой функции f_0 из $\mathcal{L}_2(G)$ (но не обязательно к f).

Кроме того, из равенства (16) и из теоремы Рисса — Фишера (см. § 1.7) вытекает такое предложение. Для того, чтобы ряд Фурье (12) сходился к функции f в $\mathcal{L}_2(G)$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство Парсона — Стеклова (уравнение замкнутости)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 = \|f\|^2. \quad (18)$$

9. Полные ортонормальные системы. Пусть система функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ортонормальна в $\mathcal{L}_2(G)$. Если для любой $f \in \mathcal{L}_2(G)$ ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_k\}$ сходится к f в $\mathcal{L}_2(G)$, то эта система называется *полной (замкнутой)* в $\mathcal{L}_2(G)$ (ортонормальным базисом в $\mathcal{L}_2(G)$). Примером полной ортонормальной системы в $\mathcal{L}_2(0, 2\pi)$ служит тригонометрическая система. Из этого определения и из результатов § 1.8 вытекает

Теорема 1. Для того чтобы ортонормальная система $\{\varphi_k\}$ была полной в $\mathcal{L}_2(G)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции f из $\mathcal{L}_2(G)$ было выполнено равенство Парсона — Стеклова (уравнение замкнутости) (18).

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема 2. Для того чтобы ортонормальная система $\{\varphi_k\}$ была полной в $\mathcal{L}_2(G)$, необходимо и достаточно, чтобы

каждую функцию f из множества $\mathcal{M}$, плотного в $\mathcal{L}_2(G)$, можно было сколь угодно точно приблизить в $\mathcal{L}_2(G)$ линейными комбинациями функций этой системы.

Необходимость условия очевидна; докажем его достаточность. Пусть $f \in \mathcal{L}_2(G)$ и $\varepsilon > 0$ — любое число. Так как $\mathcal{M}$ плотно в $\mathcal{L}_2(G)$, то существует $f_0 \in \mathcal{M}$ такая, что

$$\|f - f_0\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (19)$$

По условию функция f_0 сколь угодно точно приближается в $\mathcal{L}_2(G)$ линейными комбинациями функций системы $\{\varphi_k\}$. Поэтому найдутся такие числа $m, c_1, c_2, \dots, c_m$, что

$$\left\| f_0 - \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (19), в силу неравенства Минковского, получаем

$$\left\| f - \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k \right\| \leq \|f - f_0\| + \left\| f_0 - \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Но тогда, в силу неравенства (15), и по-прежнему

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\| < \varepsilon, \quad N \geq m,$$

что и требовалось установить.

Следствие. Если G — ограниченная область, то в $\mathcal{L}_2(G)$ существует счетная полная ортонормальная система полиномов.

Действительно, множество полиномов с рациональными коэффициентами плотно в $\mathcal{L}_2(G)$ (см. § 1.7), счетно и его можно сделать ортонормальным, используя процесс ортогонализации Шмидта (см. § 1.8).

Лемма. Пусть области $G \subset R^n$ и $D \subset R^m$ ограничены, система функций $\varphi_j(y)$, $j = 1, 2, \dots$, ортонормальна и полна в $\mathcal{L}_2(D)$ и при каждом $j = 1, 2, \dots$ система функций $\varphi_{kj}(x)$, $k = 1, 2, \dots$, ортонормальна и полна в $\mathcal{L}_2(G)$. Тогда система функций

$$\chi_{kj}(x, y) = \varphi_{kj}(x) \varphi_j(y), \quad k, j = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

ортонормальна и полна в $\mathcal{L}_2(G \times D)$.

Доказательство. Ортонормальность системы $\{\chi_{kj}\}$ в $\mathcal{L}_2(G \times D)$ устанавливается легко, а именно:

$$\begin{aligned}(\chi_{kj}, \chi_{k'j'}) &= \int_{G \times D} \chi_{kj} \bar{\chi}_{k'j'} dx dy = \\&= \int_G \varphi_{kj} \bar{\varphi}_{k'j'} dx \int_D \psi_j \bar{\psi}_{j'} dy = (\varphi_{kj}, \varphi_{k'j'}) (\psi_j, \psi_{j'}) = \\&= (\varphi_{kj}, \varphi_{k'j'}) \delta_{jj'} = (\varphi_{kj}, \varphi_{k'j'}) \delta_{jj'} = \delta_{kk'} \delta_{jj'}.\end{aligned}$$

Докажем полноту этой системы в $\mathcal{L}_2(G \times D)$. Так как $C(\bar{G} \times D)$ плотно в $\mathcal{L}_2(G \times D)$ (см. § 1.7) то, по теореме 2, для этого достаточно установить справедливость равенства Парсеваля — Стеклова для всех $f \in C(\bar{G} \times D)$. Пусть $f \in C(\bar{G} \times D)$. Так как система $\{\psi_j\}$ полна в $\mathcal{L}_2(D)$, то при каждом $x \in \bar{G}$ справедливо равенство Парсеваля — Стеклова (см. § 1.8)

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x)|^2 = \int_D |f(x, y)|^2 dy, \quad (21)$$

где

$$a_j(x) = \int_D f(x, y) \bar{\psi}_j(y) dy. \quad (22)$$

В силу ограниченности области D функции ψ_j интегрируемы на D (см. § 1.7), и, поскольку $f \in C(\bar{G} \times D)$, $a_j \in C(\bar{G})$ (см. § 1.5).

Так как при каждом $j=1, 2, \dots$ система $\{\varphi_{kj}\}$ полна в $\mathcal{L}_2(G)$, то справедливо равенство Парсеваля — Стеклова (см. § 1.8)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 = \int_G |a_j(x)|^2 dx, \quad (23)$$

где, в силу (22), (20) и теоремы Фубини (см. § 1.4),

$$\begin{aligned}a_{kj} &= (a_j, \varphi_{kj}) = \\&= \int_G a_j \bar{\varphi}_{kj} dx = \int_G \left[\int_D f(x, y) \bar{\psi}_j(y) dy \right] \bar{\varphi}_{kj}(x) dx = \\&= \int_{G \times D} f(x, y) \bar{\varphi}_{kj}(x) \bar{\psi}_j(y) dx dy = \\&= \int_{G \times D} f \bar{\chi}_{kj} dx dy = (f, \chi_{kj}). \quad (24)\end{aligned}$$

По лемме Дини (см. § 1.3) ряд (21) сходится равномерно на $\bar{G}$. Интегрируя этот ряд почленно по области G и пользуясь равенствами (23) и (24), для функции f получаем требуемое равенство Парсеваля — Стеклова

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(f, \chi_{kj})|^2 = \int_G \int_D |f(x, y)|^2 dx dy = \|f\|^2.$$

Лемма доказана.

Замечание. Все сказанное о пространстве $\mathcal{L}_2(G)$ переносится и на пространства $\mathcal{L}_2(G; \rho)$ или $\mathcal{L}_2(S)$ со скалярными произведениями

$$(f, g)_{\rho} = \int_G \rho(x) f(x) \bar{g}(x) dx, \quad f, g \in \mathcal{L}_2(G; \rho);$$

$$(f, g) = \int_S f(x) \bar{g}(x) dS, \quad f, g \in \mathcal{L}_2(S),$$

где вес $\rho \in C(\bar{G})$, $\rho(x) > 0$, $x \in \bar{G}$ и S — кусочно-гладкая поверхность.

10. Линейные операторы и функционалы. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^*$ — линейные множества. Оператор L , преобразующий элементы множества $\mathcal{M}$ в элементы множества $\mathcal{M}^*$, называется *линейным*, если для любых элементов f и g из $\mathcal{M}$ и комплексных чисел λ и μ справедливо равенство

$$L(\lambda f + \mu g) = \lambda Lf + \mu Lg.$$

При этом множество $\mathcal{M} = \mathcal{M}_L$ называется *областью определения* оператора L . Если $Lf = f$ при всех $f \in \mathcal{M}$, то оператор L называется *тождественным* (единичным) оператором. Единичный оператор будем обозначать через I .

Пусть на линейных множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^*$ определены сходимости элементов с непрерывными линейными комбинациями, например, если $f_k \rightarrow f$ и $g_k \rightarrow g$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{M}$, то и $\lambda f_k + \mu g_k \rightarrow \lambda f + \mu g$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{M}$. Линейный оператор L , переводящий $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}^*$, называется *непрерывным* из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}^*$, если из сходимости $f_k \rightarrow f$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{M}$ следует сходимость $Lf_k \rightarrow Lf$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{M}^*$. Отсюда вытекает: для того чтобы линейный оператор L был непрерывным из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}^*$, необходимо и достаточно, чтобы $Lf_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{M}^*$, когда скоро $f_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^*$ — линейные нормированные пространства с нормами $\| \cdot \|_{\mathcal{M}}$ и $\| \cdot \|_{\mathcal{M}^*}$ соответственно (например,

$\mathfrak{L}^* = C(T)$, $\mathfrak{L} = \mathcal{L}_2(G)$. Линейный оператор L , переводящий $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{L}^*$, называется *ограниченным* из $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{L}^*$, если существует такое число $C > 0$, что для любого $f \in \mathfrak{L}$ справедливо неравенство

$$\|Lf\|_{\mathfrak{L}^*} \leq C\|f\|_{\mathfrak{L}}. \quad (25)$$

Из этих определений вытекает: если линейный оператор L ограничен из $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{L}^*$, то он и непрерывен из $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{L}^*$. Действительно, если $f_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathfrak{L}$, т. е.

$$\|f_k\|_{\mathfrak{L}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{то } \|Lf_k\|_{\mathfrak{L}^*} \leq C\|f_k\|_{\mathfrak{L}} \rightarrow 0$$

и потому $Lf_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathfrak{L}^*$. Это и значит, что оператор L непрерывен из $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{L}^*$.

Множество $\mathfrak{B}$ линейного нормированного пространства $\mathfrak{L}$ называется *ограниченным* в $\mathfrak{L}$, если существует такое число A , что $\|f\|_{\mathfrak{L}} \leq A$ при всех $f \in \mathfrak{B}$.

Пусть линейный оператор L переводит $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{L}^*$, и линейный оператор K переводит $\mathfrak{L}^*$ в $\mathfrak{L}$. Линейный оператор $KLf = K(Lf)$, переводящий $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{L}$, называется *произведением* KL операторов K и L ; в частности, $K^0f = K(K^{-1}f) = K^{-1}(Kf)$, $K^1 = K$, $K^0 = I$.

Частным случаем линейных операторов являются линейные функционалы. Если линейный оператор l преобразует множество элементов $\mathfrak{L}$ в множество комплексных чисел $\mathbb{C}$, $f \in \mathfrak{L}$, то l называется *линейным функционалом* на множестве $\mathfrak{L}$. Значение функционала l на элементе f — комплексное число lf — будем обозначать через (l, f) . Таким образом, непрерывность линейного функционала l означает следующее: если $f_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathfrak{L}$, то последовательность комплексных чисел (l, f_k) , $k \rightarrow \infty$, стремится к 0.

Будем говорить, что последовательность $l_1, l_2, \dots$ линейных функционалов на $\mathfrak{L}$ *слабо сходится* к (линейному) функционалу l на $\mathfrak{L}$, если она сходится к l на каждом элементе f из $\mathfrak{L}$, т. е. $(l_k, f) \rightarrow (l, f)$, $k \rightarrow \infty$.

Линейный функционал l на множестве $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{L}$ называется *продолжением* линейного функционала l , заданного на $\mathfrak{L}$, если $(\tilde{l}, f) = (l, f)$, $f \in \mathfrak{L}$.

Примеры линейных операторов и функционалов.

а) Линейный оператор вида

$$Kf = \int_G \mathcal{K}(x, y)f(y)dy, \quad x \in G, \quad (26)$$

называется (линейным) *интегральным оператором*, а функция $\mathcal{K}(x, y)$ — его *ядром*. Если ядро $\mathcal{K} \in \mathcal{L}_2(G \times G)$,

$$\int_{G \times G} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy = C^2 < \infty, \quad (27)$$

то оператор K ограничен (и, следовательно, непрерывен) из $\mathcal{L}_2(G) = \mathfrak{L}$ в $\mathcal{L}_2(G) = \mathfrak{L}^*$.

Действительно, применяя неравенство Коши — Буняковского, теорему Фубини (см. § 1.4) и пользуясь (27), при всех $f \in \mathcal{L}_2(G)$ получим неравенство

$$\begin{aligned} \|Kf\|^2 &= \int_G \left| \int_G \mathcal{K}(x, y)f(y)dy \right|^2 dx \leq \\ &\leq \int_G \left[\int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \right] \left[\int_G |f(y)|^2 dy \right] dx = C^2 \|f\|^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|Kf\| \leq C\|f\|, \quad f \in \mathcal{L}_2(G), \quad (28)$$

которое и означает, что оператор K ограничен из $\mathcal{L}_2(G)$ в $\mathcal{L}_2(G)$.

Аналогично, линейный оператор A

$$(Aa)_k = \sum_{l=1}^{\infty} A_{kl}a_l, \quad k=1, 2, \dots, \quad (26')$$

для которого

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} |A_{kl}|^2 = C^2 < \infty, \quad (27')$$

ограничен (и стало быть непрерывен) из l_2 в l_2 (см. § 1.7), причем

$$\|Aa\| \leq C\|a\|, \quad a = \{a_k\} \in l_2. \quad (28')$$

б) Линейный оператор вида

$$Lf = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} f(x), \quad \sum_{|\alpha| \leq m} |a_{\alpha}(x)| \neq 0, \quad m > 0, \quad (29)$$

называется (линейным) *дифференциальным оператором порядка m* , а функции $a_{\alpha}(x)$ — его *коэффициентами*. Если коэффициенты $a_{\alpha}(x)$ — непрерывные функции на области $G \subset R^n$, то оператор L переводит $C^m(G) = \mathfrak{L}$ в $C(G) = \mathfrak{L}^*$. Однако оператор L не является непрерывным из $C(G)$

в $C(\bar{G})$. В самом деле, последовательность

$$f_k(x) = \frac{1}{k} e^{ik(x, \alpha)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad \text{в } C(\bar{G}),$$

в то время как последовательность

$$Lf_k = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha f_k(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (i\alpha)^k k^{|\alpha|-1} e^{ik(x, \alpha)}$$

не имеет предела в $C(\bar{G})$. Отметим попутно, что оператор L определен не на всем пространстве $C(\bar{G})$, а лишь на его части — на множестве функций $C^\infty(\bar{G})$.

с) Линейный оператор

$$Lf = \sum_{|\alpha| \leq m} \left[\int_{\bar{G}} K_\alpha(x, y) D^\alpha f(y) dy + a_\alpha(x) D^\alpha f(x) \right] \quad (30)$$

называется (линейным) *интегро-дифференциальным оператором*.

д) Примером линейного непрерывного функционала l на $\mathcal{L}_2(\bar{G})$ служит скалярное произведение $(l, f) = (f, g)$, где g — фиксированная функция из $\mathcal{L}_2(\bar{G})$. Линейность этого функционала следует из линейности скалярного произведения по первому аргументу (см. § 1.7), а в силу неравенства Коши — Буняковского он ограничен:

$$|(l, f)| = |(f, g)| \leq \|g\| \|f\|,$$

и, следовательно, непрерывен.

11. **Линейные уравнения.** Пусть L — линейный оператор с областью определения $\mathcal{M}_L$. Уравнение

$$Lu = F \quad (31)$$

называется *линейным* (неоднородным) *уравнением*. В уравнении (31) заданный элемент F называется *свободным членом* (или *правой частью*), а неизвестный элемент u из $\mathcal{M}_L$ — *решением* этого уравнения. Если в уравнении (31) свободный член F положить равным нулю, то полученное уравнение

$$Lu = 0 \quad (32)$$

называется *линейным однородным уравнением*, соответствующим уравнению (31).

В силу линейности оператора L совокупность решений однородного уравнения (32) образует линейное множество;

в частности, $u=0$ всегда является решением этого уравнения.

Всякое решение u линейного неоднородного уравнения (31) (если оно существует) представляется в виде суммы частного решения u_0 этого уравнения и общего решения $\bar{u}$ соответствующего линейного однородного уравнения (32),

$$u = u_0 + \bar{u}. \quad (33)$$

Действительно, если u — произвольное решение уравнения (31), $Lu = F$, $u \in \mathcal{M}_L$, а u_0 — частное решение этого уравнения, $Lu_0 = F$, $u_0 \in \mathcal{M}_L$, то, в силу линейности оператора L , их разность $u - u_0 = \bar{u} \in \mathcal{M}_L$ и удовлетворяет однородному уравнению (32):

$$L\bar{u} = L(u - u_0) = Lu - Lu_0 = F - F = 0.$$

Этим доказано представление (33) для решения u .

Отсюда непосредственно выводим: для того чтобы решение уравнения (31) было единственным в $\mathcal{M}_L$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение (32) имело только нулевое решение в $\mathcal{M}_L$.

Пусть однородное уравнение (32) имеет только нулевое решение в $\mathcal{M}_L$. Обозначим через $\mathcal{R}_L$ область значений оператора L , т. е. (линейное) множество элементов вида $\{Lf\}$, где f пробегает $\mathcal{M}_L$. Тогда для любого $F \in \mathcal{R}_L$ уравнение (31) имеет единственное решение $u \in \mathcal{M}_L$, и, таким образом, возникает некоторый оператор, сопоставляющий каждому элементу F из $\mathcal{R}_L$ элемент u из $\mathcal{M}_L$ — решение уравнения (31). Этот оператор называется *обратным оператором* к оператору L и обозначается через L^{-1} , так что

$$u = L^{-1}F. \quad (34)$$

Оператор L^{-1} , очевидно, является линейным и преобразует $\mathcal{R}_L$ на $\mathcal{M}_L$. Непосредственно из определения оператора L^{-1} , а также из соотношений (31) и (34) вытекает:

$$LL^{-1}F = F, \quad F \in \mathcal{R}_L; \quad L^{-1}Lu = u, \quad u \in \mathcal{M}_L,$$

т. е.

$$LL^{-1} = I \quad \text{и} \quad L^{-1}L = I.$$

Если линейный оператор L имеет обратный L^{-1} , то системы функций $\{\varphi_k\}$ и $\{L\varphi_k\}$ одновременно линейно незави-

симы. (При этом, естественно, предполагается, что все $\varphi_k \in \mathcal{M}_L$.)

Действительно, если система $\{\varphi_k\}$ линейно зависима, то при некоторых $\{c_k\}$, из которых только конечное число отлично от нуля, мы имели бы $\sum_k c_k \varphi_k = 0$, откуда, применяя оператор L , получим $\sum_k c_k L\varphi_k = 0$, т. е. система $\{L\varphi_k\}$ линейно зависима. Обратно, если система $\{L\varphi_k\}$ линейно зависима, $\sum_k c_k L\varphi_k = 0$, то, применяя оператор L^{-1} , получим

$$\sum_k c_k L^{-1}L\varphi_k = \sum_k c_k \varphi_k = 0,$$

так что система $\{\varphi_k\}$ линейно зависима.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$Lu = \lambda u, \quad (35)$$

где λ — комплексный параметр. Это уравнение имеет нулевое решение при всех λ . Может случиться, что при некоторых λ оно имеет ненулевые решения из $\mathcal{M}_L$. Те комплексные значения λ , при которых уравнение (35) имеет ненулевые решения из $\mathcal{M}_L$, называются *собственными значениями* оператора L , а соответствующие решения — *собственными элементами* (функциями), соответствующими этому собственному значению. Полное число r ($1 \leq r \leq \infty$) линейно независимых собственных элементов, соответствующих данному собственному значению λ , называется *кратностью* этого собственного значения; если кратность $r = 1$, то λ называется *простым собственным значением*.

Если кратность r собственного значения λ оператора L конечна и $u_1, u_2, \dots, u_r$ — соответствующие линейно независимые собственные элементы, то любая их линейная комбинация

$$u_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_r u_r, \quad (36)$$

также является собственным элементом, соответствующим этому собственному значению, и формула (36) дает общее решение уравнения (35). Отсюда и из формулы (33) вытекает: если решение уравнения

$$Lu = \lambda u + f \quad (37)$$

существует, то его общее решение представляется формулой

$$u = u^* + \sum_{k=1}^r c_k u_k, \quad (38)$$

где u^* — частное решение (38) и c_k , $k = 1, 2, \dots, r$, — произвольные постоянные.

12. Эрмитовы операторы. Линейный оператор L , переводящий $\mathcal{M}_L \subset \mathcal{L}_2(G)$ в $\mathcal{L}_2(G)$ называется *эрмитовым*, если его область определения $\mathcal{M}_L$ плотна в $\mathcal{L}_2(G)$ и для любых f и g из $\mathcal{M}_L$ справедливо равенство

$$(Lf, g) = (f, Lg). \quad (39)$$

Выражения (Lf, g) и (Lf, f) называются соответственно *билинейной* и *квадратичной* формами, порожденными оператором L .

Для того чтобы линейный оператор L был эрмитовым, необходимо и достаточно, чтобы порожденная им квадратичная форма (Lf, f) , $f \in \mathcal{M}_L$, принимала только вещественные значения.

Действительно, если оператор L эрмитов, то в силу (39),

$$(Lf, f) = \overline{(f, Lf)} = \overline{(Lf, f)}, \quad f \in \mathcal{M}_L,$$

так что квадратичная форма (Lf, f) принимает только вещественные значения.

Обратно, если квадратичная форма (Lf, f) принимает только вещественные значения, то при всех f и g из $\mathcal{M}_L$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[(Lg, f) - (Lf, g)] &= \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{i} [(L(f + ig), f + ig) - (Lf, f) - (Lg, g)] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[(Lg, f) + (Lf, g)] &= \\ &= \operatorname{Im}[(L(f + g), f + g) - (Lf, f) - (Lg, g)] = 0 \end{aligned}$$

и, стало быть,

$$\begin{aligned} (Lf, g) &= \operatorname{Re}(Lf, g) + i \operatorname{Im}(Lf, g) = \\ &= \operatorname{Re}(Lg, f) - i \operatorname{Im}(Lg, f) = \overline{(Lg, f)} = (f, Lg), \end{aligned}$$

так что оператор L эрмитов.

Линейный оператор L , переводящий $\mathcal{M}_L \subset \mathcal{L}_2(G)$ в $\mathcal{L}_2(G)$ называется *положительным*, если $\mathcal{M}_L$ плотна

в $\mathcal{L}_2(G)$ и

$$(Lf, f) \geq 0, \quad f \in \mathcal{L}_2.$$

Из доказанного утверждения следует, что всякий положительный оператор эрмитов.

Теорема. Если оператор L эрмитов (положительный), то все его собственные значения вещественны (неотрицательны), а собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть λ_0 — собственное значение и u_0 — соответствующая нормированная собственная функция эрмитова оператора L , $Lu_0 = \lambda_0 u_0$. Умножая скалярно это равенство на u_0 , получим

$$(Lu_0, u_0) = (\lambda_0 u_0, u_0) = \lambda_0 (u_0, u_0) = \lambda_0 \|u_0\|^2 = \lambda_0. \quad (40)$$

Но для эрмитова (положительного) оператора квадратичная форма (Lf, f) принимает только вещественные (неотрицательные) значения, и, стало быть, в силу (40), λ_0 — вещественное (неотрицательное) число.

Докажем, что любые собственные функции u_1 и u_2 , соответствующие различным собственным значениям λ_1 и λ_2 , ортогональны. Действительно, из соотношений

$$Lu_1 = \lambda_1 u_1, \quad Lu_2 = \lambda_2 u_2,$$

из вещественности λ_1 и λ_2 и из эрмитовости оператора L получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \lambda_1 (u_1, u_2) &= (\lambda_1 u_1, u_2) = (Lu_1, u_2) = (u_1, Lu_2) = \\ &= (u_1, \lambda_2 u_2) = \lambda_2 (u_1, u_2), \end{aligned}$$

т. е.

$$\lambda_1 (u_1, u_2) = \lambda_2 (u_1, u_2).$$

Отсюда, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, вытекает, что $(u_1, u_2) = 0$. Теорема доказана.

Предположим, что множество собственных значений эрмитова оператора L не более чем счетно, а каждое собственное значение — конечной кратности. Перенумеруем все его собственные значения: $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, повторяя λ_k столько раз, какова его кратность. Соответствующие собственные функции обозначим через $u_1, u_2, \dots$, так чтобы каждому собственному значению соответствовала только одна собственная функция u_k :

$$Lu_k = \lambda_k u_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (41)$$

Собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению, можно выбрать ортонормальными, используя процесс ортогонализации Шмидта (см. § 1.8). При этом опять получатся собственные функции, соответствующие тому же самому собственному значению. По теореме § 1.12 собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Таким образом, если система собственных функций $\{u_k\}$ эрмитова оператора L не более чем счетна, то ее можно выбрать ортонормальной:

$$(Lu_k, u_l) = \lambda_k (u_k, u_l) = \lambda_k \delta_{kl}. \quad (42)$$

Замечание. Все сказанное в §§ 1.7—1.9, 1.12 о пространстве $\mathcal{L}_2(G)$ с очевидными изменениями справедливо и для его дискретного аналога l_2 , и тем более для всех конечномерных подпространств пространства l_2 .

§ 2. Основные уравнения математической физики

Математическое описание многих физических процессов приводит к дифференциальным и интегральным уравнениям или даже к интегро-дифференциальным уравнениям. Весьма широкий класс физических процессов описывается линейными дифференциальными уравнениями второго порядка (см. § 1.10)

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = F(x). \quad (1)$$

В этом параграфе мы рассмотрим характерные физические процессы, сводящиеся к различным краевым задачам для дифференциальных уравнений.

1. Уравнение колебаний. Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран и трехмерных объектов) и физики (электромагнитные колебания) описываются уравнением колебаний вида

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t), \quad (2)$$

где неизвестная функция $u(x, t)$ зависит от n ($n=1, 2, 3$) пространственных координат $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и времени t ; коэффициенты ρ , p и q определяются свойствами среды, где происходит колебательный процесс; свободный член

$F(x, t)$ выражает интенсивность внешнего возмущения. В уравнении (2), в соответствии с определением операторов div и grad ,

$$\text{div}(p \text{ grad } u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Продemonстрируем вывод уравнения (2) на примере малых поперечных колебаний струны. Струной называется натянутая нить, не сопротивляющаяся изгибу.

Пусть в плоскости (x, u) струна совершает малые поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью x . Величину отклонения струны от положения равновесия в точке x в момент времени t обозначим через $u(x, t)$, так что $u = u(x, t)$ есть уравнение струны в момент времени t . Ограничиваясь рассмотрением лишь малых колебаний струны, мы будем пренебрегать величинами высшего порядка малости по сравнению с $\text{tg } \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Так как струна не сопротивляется изгибу, то ее натяжение $T(x, t)$ в точке x в момент времени t направлено по касательной к струне в точке x (рис. 3). Любой участок струны (a, b) после отклонения от положения равновесия в рамках нашего приближения не изменит своей длины:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx \approx b - a,$$

и, следовательно, в соответствии с законом Гука, величина натяжения $|T(x, t)|$ будет оставаться постоянной, не зависящей от x и t , $|T(x, t)| = T_0$. Обозначим через $F(x, t)$ плотность внешних сил, действующих на струну в точке x в момент времени t и направленных перпендикулярно оси x в плоскости (x, u) . Наконец, пусть $\rho(x)$ обозначает линейную плотность струны в точке x , так что приближенно $\rho(x) \Delta x$ — масса элемента струны $(x, x + \Delta x)$.

Составим уравнение движения струны. На ее элемент $(x, x + \Delta x)$ действуют силы натяжения $T(x + \Delta x, t)$, $-T(x, t)$ (рис. 3) и внешняя сила, сумма которых, согласно законам Ньютона, должна быть равна произведению массы этого элемента на его ускорение. Проектируя

это векторное равенство на ось u , на основании всего сказанного получим равенство

$$T_0 \sin \alpha|_{x+\Delta x} - T_0 \sin \alpha|_x + F(x, t) \Delta x = \rho(x) \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Но в рамках нашего приближения

$$\sin \alpha = \frac{\text{tg } \alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} \approx \text{tg } \alpha = \frac{\partial u}{\partial x},$$

а потому из (3) имеем

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + F(x, t),$$

откуда при $\Delta x \rightarrow 0$ следует равенство

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F. \quad (4)$$

Это и есть уравнение малых поперечных колебаний струны. При $F \neq 0$ колебания струны называются вынужденными, а при $F = 0$ — свободными.

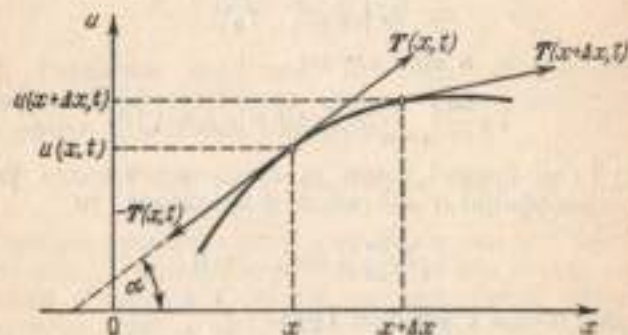


Рис. 3.

Если плотность ρ постоянна, $\rho(x) = \rho$, то уравнение колебаний струны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (5)$$

где $f = \frac{F}{\rho}$, а $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ — постоянная. Уравнение (5) мы будем также называть одномерным волновым уравнением.

Уравнение вида (2) описывает также *малые продольные колебания упругого стержня*

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t), \quad (6)$$

где $S(x)$ — площадь поперечного сечения стержня и $E(x)$ — модуль Юнга в точке x .

Из физических соображений следует, что для однозначного описания процесса колебаний струны или стержня необходимо дополнительно задать величины смещения u и скорости $\dot{u}$ в начальный момент времени (*начальные условия*) и режим на концах (*граничные условия*).

Примеры граничных условий.

а) Если конец x_0 струны или стержня движется по закону $\mu(t)$, то

$$u|_{x=x_0} = \mu(t).$$

б) Если на правый конец x_0 струны действует заданная сила $v(t)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \frac{v(t)}{T_0}.$$

Действительно, в этом случае

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \simeq T_0 \sin \alpha|_{x=x_0} = v(t).$$

с) Если правый конец x_0 стержня закреплен упруго и α — коэффициент жесткости закрепления, то

$$E \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u|_{x=x_0} = 0$$

в соответствии с законом Гука.

Аналогично выводится *уравнение малых поперечных колебаний мембраны*

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + F. \quad (7)$$

Если плотность ρ постоянна, то уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho}, \quad (8)$$

будем называть *двумерным волновым уравнением*.

Трехмерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f \quad (9)$$

описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Этому уравнению удовлетворяют плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а также составляющие напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы (см. § 2.6).

Мы будем записывать волновые уравнения (5), (8) и (9) единой формулой:

$$\square_a u = f, \quad (10)$$

где $\square_a$ — *волновой оператор (оператор Даламбера)*:

$$\square_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \quad (\square = \square_1),$$

Δ — *оператор Лапласа*:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

2. **Уравнение диффузии.** Процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде описываются следующим *общим уравнением диффузии*:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t). \quad (11)$$

Выведем *уравнение распространения тепла*. Обозначим через $u(x, t)$ температуру среды в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t . Считая среду изотропной, обозначим через $\rho(x)$, $c(x)$ и $k(x)$ соответственно ее плотность, удельную теплоемкость и коэффициент теплопроводности в точке x . Обозначим через $F(x, t)$ интенсивность источников тепла в точке x в момент времени t . Подсчитаем баланс тепла в произвольном объеме V за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$. Обозначим через S границу V , и пусть n — внешняя нормаль к ней. Согласно закону Фурье через поверхность S в объем V поступает количество тепла

$$Q_1 = \int_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS \Delta t = \int_V (k \operatorname{grad} u, n) dS \Delta t,$$

равное, в силу формулы Гаусса — Остроградского,

$$Q_1 = \int_V \operatorname{div} (k \operatorname{grad} u) dx \Delta t.$$

За счет тепловых источников в объеме V возникает количество тепла

$$Q_2 = \int_V F(x, t) dx \Delta t.$$

Так как температура в объеме V за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ выросла на величину

$$u(x, t + \Delta t) - u(x, t) \approx \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t,$$

то для этого необходимо затратить количество тепла

$$Q_3 = \int_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx \Delta t.$$

С другой стороны, $Q_3 = Q_1 + Q_2$ и потому

$$\int_V \left[\operatorname{div} (k \operatorname{grad} u) + F - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx \Delta t = 0,$$

откуда, в силу произвольности объема V , получаем уравнение распространения тепла:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (k \operatorname{grad} u) + F(x, t). \quad (12)$$

Если среда однородна, т. е. c , ρ и k — постоянные, то уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad (13)$$

где

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f = \frac{F}{c\rho}.$$

Уравнение (13) называется *уравнением теплопроводности*. Число n пространственных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ в этом уравнении может быть любым.

Как и в случае уравнения колебаний, для полного описания процесса распространения тепла необходимо задать начальное распределение температуры u в среде

(начальное условие) и режим на границе этой среды (граничное условие).

Примеры граничных условий. а) Если на границе S поддерживается заданное распределение температуры u_0 , то

$$u|_S = u_0. \quad (14)$$

б) Если на S поддерживается заданный поток тепла u_1 , то

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = u_1. \quad (15)$$

в) Если на S происходит теплообмен согласно закону Ньютона, то

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0) \Big|_S = 0, \quad (16)$$

где h — коэффициент теплообмена и u_0 — температура окружающей среды.

Аналогично выводится и уравнение диффузии частиц. При этом вместо закона Фурье нужно пользоваться законом Нэрста для потока частиц через элемент поверхности ΔS за единицу времени: $\Delta Q = -D \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S$, где $D(x)$ — коэффициент диффузии и $u(x, t)$ — плотность частиц в точке x в момент времени t . Уравнение для плотности u будет иметь вид (11), где ρ обозначает коэффициент пористости, $\rho = D$ и q характеризует поглощение среды.

3. **Стационарное уравнение.** Для стационарных процессов $F(x, t) = F(x)$, $u(x, t) = u(x)$ уравнения колебаний (2) и диффузии (11) принимают вид

$$-\operatorname{div} (\rho \operatorname{grad} u) + qu = F(x). \quad (17)$$

При $\rho = \text{const}$ и $q = 0$ уравнение (17) называется *уравнением Пуассона*:

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{\rho}; \quad (18)$$

при $f = 0$ уравнение (18) называется *уравнением Лапласа*:

$$\Delta u = 0. \quad (19)$$

Для полного описания стационарного процесса необходимо еще задать режим на границе — одно из граничных условий (14) — (16).

Пусть в волновом уравнении (10) внешнее возмущение $f(x, t)$ периодическое с частотой ω и амплитудой $a^2 f(x)$,

$$f(x, t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}.$$

Если искать периодические возмущения $u(x, t)$ с той же частотой и неизвестной амплитудой $u(x)$,

$$u(x, t) = u(x) e^{i\omega t},$$

то для функции $u(x)$ получим стационарное уравнение

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (20)$$

называемое *уравнением Гельмгольца*.

К крайним задачам для уравнения Гельмгольца приводят задачи на рассеяние (дифракцию). Например, пусть

задана приходящая (из бесконечности) плоская волна $e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}, x)}$, $|\mathbf{k}|=1$, $k>0$, которая подвергается изменению из-за наличия некоторого препятствия на границе S ограниченной области G (рис. 4). Препятствие можно задавать, например, с помощью условия $u|_S=0$ или

$\frac{\partial u}{\partial n}|_S=0$. Это препятствие порождает рассеянную волну $v(x)$. Эта волна вдали от рассеивающих центров будет близка к расходящейся сферической волне

$$v(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right) \frac{e^{ik|x|}}{|x|} + o(|x|^{-1}). \quad (21)$$

Поэтому при $|x| \rightarrow \infty$ волна $v(x)$ должна удовлетворять условиям вида

$$v(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial v(x)}{\partial |x|} - ikv(x) = o(|x|^{-1}), \quad (22)$$

называемыми *условиями излучения Зоммерфельда*. Суммарное же возмущение $u(x)$ вне области G складывается из плоской и рассеянной волн:

$$u(x) = e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}, x)} + v(x). \quad (23)$$

Отметим попутно, что функция $f(s)$, $s = \frac{x}{|x|}$, фигурирующая в (21), называется *амплитудой рассеяния*; она зависит, кроме того, от падающего импульса ka .

4. Уравнение переноса. Если длина свободного пробега частиц значительно больше их размеров, то для описания процесса распространения частиц вместо уравнения диффузии используется более точное уравнение, так называемое *уравнение переноса (кинетическое уравнение)*. Выпишем уравнение переноса при следующих предположениях: 1) Скорости всех частиц одинаковы и равны v . 2) Столкновения частиц между собой пренебрежимо редки. 3) Частицы сталкиваются с неподвижными ядрами среды; $f(x)$ — их средняя длина свободного пробега в точке x . 4) При столкновении частицы с неподвижным ядром в точке x происходит одно из следующих трех случайных событий: а) с вероятностью $p_1(x)$ частица рассеивается на ядре, отскакивая от него, как упругий шарик; б) с вероятностью $p_2(x)$ частица захватывается ядром; в) с вероятностью $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ частица делит ядро, в результате чего появляется $v(x) \geq 1$ таких же частиц (при этом считается, что частица, разделившая ядро, исчезает). 5) Распределение частиц по направлениям как после рассеяния, так и после деления равномерное (изотропное).

Обозначим через $n(x, s, t)$ плотность частиц в точке x , летящих в направлении $s = (s_1, s_2, s_3)$, $|s|=1$, в момент времени t и через $F(x, s, t)$ — плотность источников. Тогда функция $\psi = \psi(x, s, t)$ — поток частиц — удовлетворит следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} + (s, \text{grad } \psi) + \alpha \psi = \frac{\alpha h}{4\pi} \int_{S_1} \psi(x, s', t) ds' + F, \quad (24)$$

где $\alpha = \frac{1}{f}$, $h = p_1 + vp_2$. Это есть односкоростное уравнение переноса для процессов с изотропным рассеянием. Вывод более общих уравнений переноса и их исследование см. Г. И. Марчук [1] и В. С. Владимиров [1].

Если процесс переноса стационарный,

$$F(x, s, t) = f(x, s), \quad \psi(x, s, t) = \psi(x, s),$$

то уравнение переноса (24) принимает вид

$$(s, \text{grad } \psi) + \alpha \psi = \frac{\alpha h}{4\pi} \int_{S_1} \psi(x, s') ds' + f. \quad (25)$$

Для полного описания процесса переноса частиц необходимо задать начальное распределение потока частиц ψ в среде (начальное условие) и режим на границе этой среды (граничное условие). Например, если область G , где происходит процесс переноса, выпуклая, то граничное условие вида

$$\psi(x, s, t) = 0, \quad x \in S, \quad (s, n_x) < 0, \quad (26)$$

выражает отсутствие падающего потока частиц на область G (рис. 5).

Наконец, отметим, что уравнение переноса описывает процессы переноса нейтронов в ядерном реакторе, переноса лучистой энергии, прохождения γ -квантов через вещество, движения газов и другие.

5. Уравнения газо-гидродинамики. Рассмотрим движение идеальной жидкости (газа), т. е. жидкости, в которой отсутствуют силы вязкости. Пусть $V(x, t) = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости движения жидкости, $\rho(x, t)$ — ее плотность, $p(x, t)$ — давление, $I(x, t)$ — интенсивность источников и $F(x, t) = (F_1, F_2, F_3)$ — интенсивность массовых сил. Тогда эти величины удовлетворяют следующей

нелинейной системе уравнений, называемых уравнениями гидродинамики (газовой динамики):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = I, \quad (27)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V, \operatorname{grad}) V + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = F. \quad (28)$$

Уравнения (27) и (28) называются соответственно уравнениями неразрывности и уравнением движения Эйлера. Чтобы замкнуть эту систему уравнений, необходимо еще задать связь между давлением и плотностью:

$$\Phi(p, \rho) = 0, \quad (29)$$

так называемое уравнение состояния. Например, для несжимаемой жидкости уравнение состояния имеет вид $\rho = \text{const}$, а для адиабатического движения газа

$$\rho p^{-\kappa} = \text{const}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v},$$

где c_p и c_v — удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно.

В частности, если жидкость несжимаема ($\rho = \text{const}$) и ее движение потенциально ($V = -\operatorname{grad} u$), то из уравнения неразрывности (27) следует, что потенциал u удовлетворяет уравнению Пуассона (18).

6. Уравнения Максвелла. Пусть в некоторой среде имеется переменное электромагнитное поле. Обозначим: $E(x, t) = (E_1, E_2, E_3)$ — напряженность электрического поля, $H(x, t) = (H_1, H_2, H_3)$ — напряженность магнитного поля, $\rho(x)$ — плотность зарядов, ϵ — диэлектрическая постоянная среды, μ — коэффициент магнитной проницаемости среды, $I(x, t) = (I_1, I_2, I_3)$ — ток проводимости. Тогда эти величины удовлетворяют следующей (линейной) системе дифференциальных

уравнений, называемых уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{div}(\epsilon E) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div}(\mu H) = 0, \quad (30)$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu H)}{\partial t}, \quad (31)$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial(\epsilon E)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} I, \quad (32)$$

где $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек — скорость света в пустоте.

Уравнение (31) выражает закон Фарадея, а уравнение (32) — закон Ампера.

Отметим частные случаи уравнения Максвелла.

а) $\rho = 0$, $\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ и $I = \lambda E$ (закон Ома), $\lambda = \text{const}$. Применяя к уравнениям (31) и (32) оператор rot и пользуясь уравнениями (30), для компонент векторов E и H получим так называемое телеграфное уравнение:

$$\square_a u + \frac{4\pi\lambda}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad a = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (33)$$

б) $I = 0$, $\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$. Вводя четырехкомпонентный электромагнитный потенциал (φ_0, φ) , $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, представим решение уравнений Максвелла в виде

$$E = \operatorname{grad} \varphi_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad H = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \varphi. \quad (34)$$

При этом компоненты электромагнитного потенциала должны удовлетворять волновым уравнениям

$$\square_a \varphi_0 = -\frac{4\pi c^2}{\epsilon^2 \mu} \rho, \quad \square_a \varphi = 0 \quad (35)$$

и условию Лоренца

$$\frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \operatorname{div} \varphi = 0. \quad (36)$$

в) Если процесс стационарный, то уравнения Максвелла превращаются в уравнения электростатики

$$\operatorname{div}(\epsilon E) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} E = 0 \quad (37)$$

и в уравнения магнитостатики

$$\operatorname{div}(\mu H) = 0, \quad \operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} I. \quad (38)$$

При $\epsilon = \text{const}$ электростатический потенциал φ_0 удовлетворяет, в силу (35), уравнению Пуассона (18) при $f = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho$.

При преобразовании уравнений Максвелла мы пользовались следующими формулами векторного анализа:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta I, \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} = 0.$$

7. Уравнение Шредингера. Пусть квантовая частица массы m_0 движется во внешнем силовом поле с потенциалом $V(x)$. Обозначим через $\psi(x, t)$ волновую функцию этой частицы, так что $|\psi(x, t)|^2 \Delta x$ есть вероятность того, что частица будет находиться в окрестности $\Delta(x)$ точки x в момент времени t ; здесь Δx — объем $\Delta(x)$. Тогда функция ψ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + V\psi, \quad (39)$$

где $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$ эрг · сек — постоянная Планка.

Если энергия E частицы имеет определенное значение, то такое состояние ее называется стационарным. В этом случае волновая функция $\psi(x, t)$ имеет вид

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \psi(x),$$

где волновая функция $\psi(x)$, в силу (39), удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + V\psi = E\psi. \quad (40)$$

При $V=0$ (свободная частица) уравнение Шредингера (40) превращается в однородное уравнение Гельмгольца (20).

Как и для уравнения Гельмгольца, в задачах на рассеяние на потенциале V необходимо требовать выполнения условий излучения Зоммерфельда (22) на бесконечности (при $k = \sqrt{2m_0 E} \hbar^{-1}$, $E \geq 0$)*.

8. Уравнение Клейна — Гордона — Фока и уравнение Дирака. Волновая функция $\psi(x_0, x)$, $x_0 = ct$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, где c — скорость света, описывающая свободную релятивистскую (псевдо)скалярную частицу массы m_0 , удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона — Фока

$$(\square + m_0^2) \psi = 0. \quad (41)$$

Для описания свободной релятивистской частицы массы m_0 со спином $1/2$ (электрон, протон, нейтрон, нейтрино и др.) служит четырехкомпонентная волновая функция (спинор)

$$\Psi(x_0, x) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4).$$

Она удовлетворяет уравнению Дирака — системе четырех линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left(i \sum_{k=1}^3 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 \right) \Psi(x_0, x) = 0, \quad (42)$$

*) См. например: Д. И. Баохинцев [1], гл. IV и XIII, А. Мес-сия [1], гл. II.

где I — единичная матрица и γ^k — матрицы Дирака (в реализации Паули)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение Дирака есть результат матричной факторизации уравнения Клейна — Гордона — Фока, ибо*)

$$\left(i \sum_{k=1}^3 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 \right) \left(i \sum_{k=1}^3 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} + m_0 \right) = -(\square + m_0^2) I. \quad (43)$$

§ 3. Классификация квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка

Прежде чем формулировать математические постановки краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка необходимо классифицировать эти уравнения.

1. Классификация уравнений в точке. Рассмотрим квазилинейное (линейное относительно всех старших производных) дифференциальное уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \text{grad } u) = 0 \quad (1)$$

с непрерывными коэффициентами $a_{ij}(x)$. Выясним прежде всего, по какому закону преобразуются коэффициенты a_{ij} при произвольной неособенной замене независимых переменных $y = y(x)$, т. е.

$$y_l = y_l(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad l = 1, 2, \dots, n; \quad (2)$$

$$y_l \in C^2, \quad D = \left(\frac{y_1, y_2, \dots, y_n}{x_1, x_2, \dots, x_n} \right) \neq 0.$$

*) См. Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков [1], § 6.

Так как $D \neq 0$, то в некоторой окрестности можно выразить переменные x через переменные y , $x = x(y)$. Обозначим $u(x(y)) = \hat{u}(y)$; тогда $\hat{u}(y(x)) = u(x)$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_l \partial y_k} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_l} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Подставляя выражения (3) в уравнение (1), получим

$$\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_l \partial y_k} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial y_l} \frac{\partial x_j}{\partial y_k} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_l} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 x_j}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi^*(y, \hat{u}, \text{grad } \hat{u}) = 0. \quad (4)$$

Обозначая теперь через $\hat{a}_{lk}$ новые коэффициенты при вторых производных:

$$\hat{a}_{lk}(y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial x_i}{\partial y_l} \frac{\partial x_j}{\partial y_k}, \quad (5)$$

перепишем уравнение (4) в виде (1):

$$\sum_{k,l=1}^n \hat{a}_{lk}(y) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_l \partial y_k} + \hat{\Phi}(y, \hat{u}, \text{grad } \hat{u}) = 0. \quad (6)$$

Фиксируем точку x_0 ; обозначим $y_0 = y(x_0)$, $\alpha_{il} = \frac{\partial y_l(x_0)}{\partial x_i}$. Тогда формула (5) в точке x_0 запишется в виде

$$\hat{a}_{lk}(y_0) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \alpha_{il} \alpha_{kj}. \quad (7)$$

Полученная формула преобразования коэффициентов a_{ij} в точке x_0 совпадает с формулой преобразования коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) p_i p_j \quad (8)$$

при неособенном линейном преобразовании

$$p_i = \sum_{l=1}^n \alpha_{il} q_l, \quad \det(\alpha_{il}) \neq 0, \quad (9)$$

переводящем форму (8) в форму

$$\sum_{k,l=1}^n \hat{a}_{lk}(y_0) q_l q_k. \quad (10)$$

Итак, чтобы упростить уравнение (1) в точке x_0 с помощью замены переменных (2), достаточно упростить в этой точке квадратичную форму (8) с помощью неособенного линейного преобразования (9). Но в курсе линейной алгебры доказывается, что всегда существует неособенное преобразование (9), при котором квадратичная форма (8) принимает следующий канонический вид:

$$\sum_{l=1}^r q_l^2 - \sum_{l=r+1}^m q_l^2, \quad m \leq n; \quad (11)$$

кроме того, в силу закона инерции квадратичных форм целые числа r и m не зависят от преобразования (9)*. Это позволяет классифицировать дифференциальные уравнения (1) в зависимости от значений, принимаемых коэффициентами a_{ij} в точке x_0 .

Если в квадратичной форме (11) $m = n$ и все слагаемые одного знака (т. е. либо $r = m$, либо $r = 0$), то уравнение (1) называется уравнением эллиптического типа; если $m = n$, но имеются слагаемые разных знаков (т. е. $1 \leq r \leq n-1$), то уравнение (1) — гиперболического типа (при $r=1$ или $r=n-1$ — нормально-гиперболического типа); наконец, если $m < n$, то уравнение (1) — параболического типа (при $m = n-1$ и $r=1$ или $r=n-1$ — нормально-параболического типа).

Подчеркнем, что приведенная классификация зависит от точки x_0 , так как числа r и m зависят от x_0 . Например, уравнение Трикоми

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

* См., например, А. И. Мальцев [1], гл. VI и Д. В. Беклемишев [1], гл. VIII.

— смешанного типа: при $y < 0$ — гиперболического типа, при $y > 0$ — эллиптического типа, а при $y = 0$ — параболического типа.

Пусть коэффициенты a_{ij} в уравнении (1) постоянны, и пусть преобразование (9) приводит квадратичную форму (8) к каноническому виду (11). Тогда линейная замена независимых переменных

$$y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j$$

преобразует уравнение (1) к следующему каноническому виду:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} - \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \Phi(y, u, \text{grad } u) = 0. \quad (13)$$

Примеры. Уравнение Лапласа — эллиптического типа, волновое уравнение — гиперболического типа и уравнение теплопроводности — параболического типа.

2. **Выражение оператора Лапласа в сферических и цилиндрических координатах.** Для иллюстрации преобразований § 3.1 найдем выражение трехмерного оператора Лапласа Δ ($n=3$, $a_{ij} = \delta_{ij}$, $\Phi=0$) в сферических и цилиндрических координатах.

а) **Сферические координаты** (рис. 6):

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta.$$

Имеем

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \quad i=1, 2, 3 \quad \Delta r = \frac{2}{r};$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_3} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \Delta \theta = \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0, \quad \Delta \varphi = 0.$$

Подставляя эти выражения в формулу (4), при $n=3$, $a_{ij} = \delta_{ij}$, и $\Phi=0$ и собирая подобные члены, получим

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (14)$$

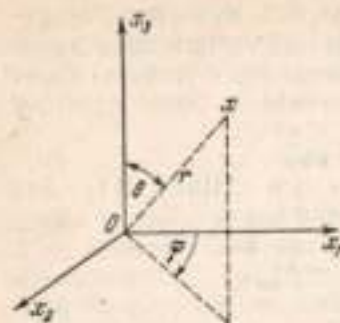


Рис. 6.

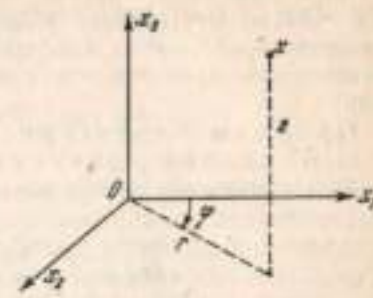


Рис. 7.

б) **Цилиндрические (полярные) координаты** (рис. 7):

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = z.$$

Производя аналогичные, более простые, выкладки, получим

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (15)$$

3. **Характеристические поверхности (характеристики).**

Пусть функция $\omega(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \geq 2$, класса C^2 такова, что на поверхности $\omega(x) = 0$ $\text{grad } \omega(x) \neq 0$ и

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_j} = 0. \quad (16)$$

Тогда поверхность $\omega(x) = 0$ называется *характеристической поверхностью* (или *характеристикой*) квазилинейного дифференциального уравнения (1), а уравнение (16) — *характеристическим уравнением*. При $n=2$ характеристическая поверхность называется *характеристической линией*.

Предположим, что каждая поверхность семейства $\omega(x) = C$, $a < C < b$, есть характеристика уравнения (1). Поскольку на каждой характеристике $\text{grad } \omega \neq 0$, то это семейство заполняет некоторую, достаточно малую, область G , через каждую точку которой проходит одна и только одна характеристика. Пусть $\omega \in C^2(G)$. Тогда, если в преобразовании (2) взять $y_1 = \omega(x)$, то, в силу (5)

и (16), коэффициент $\bar{a}_{11}$ обратится в нуль в соответствующей области $\bar{G}$. Поэтому знание одного или нескольких семейств характеристик дифференциального уравнения дает возможность привести это уравнение к более простому виду.

Примеры характеристик.

а) Волновое уравнение (см. (10) § 2.1). Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0.$$

Поверхность

$$a^2(t-t_0)^2 - |x-x_0|^2 = 0, \quad (17)$$

называемая *характеристическим конусом* с вершиной в точке (x_0, t_0) , есть характеристика волнового уравнения.

Характеристический конус (17) является границей конусов

$$\Gamma^+(x_0, t_0) = [a(t-t_0) > |x-x_0|]$$

и

$$\Gamma^-(x_0, t_0) = [-a(t-t_0) > |x-x_0|],$$

называемых соответственно *конусами будущего и прошлого* с вершиной в точке (x_0, t_0) (рис. 8). Обозначаем $\Gamma^\pm = \Gamma^\pm(0, 0)$.

Волновое уравнение имеет и другое семейство характеристических поверхностей — семейство касательных плоскостей к характеристическим конусам

$$at + (x, b) = C, \quad (18)$$

где $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, b_i и C — любые вещественные числа, причем $|b| = 1$.

б) Уравнение теплопроводности (см. (13) § 2.2). Его характеристиками, очевидно, является семейство плоскостей $t = C$.

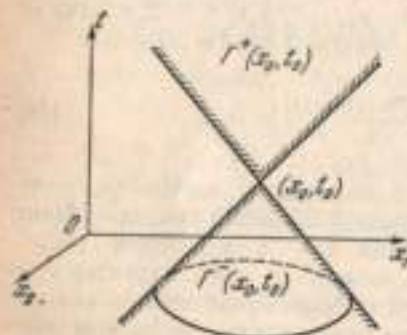


Рис. 8.

с) Уравнение Пуассона (см. (18) § 2.3). Оно не имеет (вещественных) характеристик, ибо из характеристического уравнения

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0 \quad \text{на} \quad \omega = 0$$

вытекает, что $\text{grad } \omega = 0$ на $\omega = 0$, что невозможно.

4. Канонический вид уравнений с двумя независимыми переменными. В § 3.1 рассмотрен способ приведения квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка к каноническому виду в каждой отдельной точке, где задано это уравнение. В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли одним и тем же преобразованием (2) привести уравнение (1) к каноническому виду (13) в достаточно малой окрестности каждой точки? Чтобы такое приведение можно было сделать для любого уравнения, необходимо, чтобы число условий

$$\bar{a}_{ik} = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, n;$$

$$\bar{a}_{il} = \epsilon_l \bar{a}_{1l}, \quad l = 2, 3, \dots, n; \quad \bar{a}_{11} \neq 0,$$

где $\epsilon_l = 0, \pm 1$, не превосходило числа неизвестных функций y_l , $l = 1, 2, \dots, n$:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 \leq n, \quad \text{т. е. } n \leq 2.$$

Покажем, что для $n=2$ (и, очевидно, для $n=1$) это приведение всегда можно сделать.

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0, \quad (19)$$

причем предполагаем, что коэффициенты a , b и c принадлежат классу C^2 в некоторой окрестности и нигде в ней не обращаются в нуль одновременно. Для определенности можно считать, что $a \neq 0$ в этой окрестности. Действительно, в противном случае может оказаться, что $c \neq 0$. Но тогда, меняя местами x и y , получим уравнение, у которого $a \neq 0$. Если же a и c обращаются в нуль одновременно в какой-либо точке, то $b \neq 0$ в окрестности

этой точки. В таком случае после деления на $2b$ уравнение (19) уже будет иметь канонический вид (26).

Переходя к новым переменным

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad \xi \in C^2, \quad \eta \in C^2, \quad D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) \neq 0, \quad (20)$$

приведем уравнение (19) к виду

$$a \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + 2b \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + c \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} + \bar{\Phi}(\xi, \eta, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}) = 0, \quad (21)$$

где, в силу (5),

$$\begin{aligned} a &= a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \\ b &= a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ c &= a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Потребуем, чтобы функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ обращали в нуль коэффициенты $\bar{a}$ и $\bar{c}$, т. е., в силу (22), удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned} a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 &= 0, \\ a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как $a \neq 0$, то уравнения (23) эквивалентны линейным уравнениям

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda_1(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} + \lambda_2(x, y) \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{b - \sqrt{d}}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{b + \sqrt{d}}{a}, \\ \lambda_2 - \lambda_1 &= \frac{2\sqrt{d}}{a}, \quad d = b^2 - ac. \end{aligned} \quad (25)$$

Согласно классификации, изложенной в § 3.1, возможны следующие три типа уравнений (19):

I. Гиперболический тип, если $d > 0$.

II. Параболический тип, если $d = 0$.

III. Эллиптический тип, если $d < 0$.

Рассмотрим отдельно все эти три случая.

I. Гиперболический тип, $d > 0$. В этом случае уравнение (19) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{\Phi} = 0. \quad (26)$$

Отметим, что замена переменных $\rho = \xi + \eta$, $\sigma = \xi - \eta$ приводит уравнение (19) к другому, эквивалентному, каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma^2} + \Phi_1 = 0. \quad (27)$$

Для доказательства представления (26) установим существование хотя бы одной пары решений ξ, η уравнений (24), удовлетворяющих условиям (20). Отметим, что λ_1 и $\lambda_2 \in C^2$. Установим сначала связь этих решений с характеристиками уравнения (19).

Предположим, что существуют решения уравнений (24) такие, что $\text{grad } \xi \neq 0$ и $\text{grad } \eta \neq 0$ в рассматриваемой окрестности. Тогда, по определению (см. § 3.3), кривые

$$\xi(x, y) = C_1, \quad \eta(x, y) = C_2 \quad (28)$$

определяют два семейства характеристик уравнения (19).

Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма. Пусть функция $\omega(x, y)$ класса C^1 такова, что $\frac{\partial \omega}{\partial y} \neq 0$. Для того чтобы семейство кривых $\omega(x, y) = C$ давало характеристики уравнения (19), необходимо и достаточно, чтобы выражение $\omega(x, y) = C$ было общим интегралом одного из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y). \quad (29)$$

Уравнения (29) называются дифференциальными уравнениями характеристик уравнения (19).

Доказательство. Пусть $\omega(x, y) = C$ — семейство характеристик уравнения (19). Из условия $\frac{\partial \omega}{\partial y} \neq 0$ следует, что кривые $\omega(x, y) = C$ заполняют некоторую окрестность. Поэтому функция ω удовлетворяет в этой окрестности одному из уравнений (24), например уравнению

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \lambda_1(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \quad (24')$$

Далее, на каждой характеристике $\omega(x, y) = C$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (30)$$

Отсюда и из (24') заключаем, в силу условия $\frac{\partial \omega}{\partial y} \neq 0$, что $\omega(x, y) = C$ есть общий интеграл первого из уравнений (29).

Обратно, если $\omega(x, y) = C$ есть общий интеграл одного из уравнений (29), например уравнения $y' = \lambda_1(x, y)$, то, в силу (30), на каждой линии $\omega(x, y) = C$ выполняется соотношение (24'). Но по теореме существования и единственности решения для обыкновенных дифференциальных уравнений через каждую точку из рассматриваемой окрестности проходит одна интегральная кривая $\omega(x, y) = C$ этого уравнения. Поэтому уравнение (24') удовлетворяется во всех точках этой окрестности. Отсюда заключаем, поскольку $\omega \in C^1$, $\frac{\partial \omega}{\partial y} \neq 0$, что кривые $\omega(x, y) = C$ являются характеристиками уравнения (19). Лемма доказана.

На основании доказанной леммы общие интегралы уравнений (29): $\xi(x, y) = C_1$ и $\eta(x, y) = C_2$ такие, что ξ и $\eta \in C^1$, $\frac{\partial \xi}{\partial x} \neq 0$ и $\frac{\partial \eta}{\partial y} \neq 0$, определяют два семейства характеристик уравнения (19). Как следует из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений*), такие интегралы существуют в, возможно, меньшей окрестности. При этом, поскольку $\lambda_i \in C^1$, то ξ и $\eta \in C^2$ и, в силу (29) и (25),

$$D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} (\lambda_2 - \lambda_1) = \\ = 2 \frac{\sqrt{a}}{a} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \neq 0. \quad (31)$$

Таким образом, семейства характеристик (28) образуют семейства координатных линий (рис. 9) и функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ можно принять за новые переменные. При этом в уравнении (21) будет $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$ и, в силу (22) и (29),

$$\tilde{b} = [a\lambda_1\lambda_2 - b(\lambda_1 + \lambda_2) + c] \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{2d}{a} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \neq 0.$$

Разделив уравнение (21) на коэффициент $2\tilde{b} \neq 0$, получим уравнение в канонической форме (26).

*) См., например, Л. С. Понтрягин [1], гл. IV.

II. Параболический тип. Пусть $d=0$ в некоторой окрестности. Тогда уравнение (19) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \tilde{\Phi} = 0. \quad (32)$$

В этом случае, в силу (25), $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{b}{a} \in C^1$, так что дифференциальные уравнения (24) совпадают и сводятся к одному уравнению

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{b}{a} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0. \quad (33)$$

Поэтому имеется одно семейство $\xi(x, y) = C_1$ характеристик уравнения (19), определяемое, в силу леммы, общим интегралом уравнения $y' = \frac{b}{a}$ таким,

что $\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0$; при этом $\xi \in C^2$.

В качестве второго семейства координатных линий выберем прямые $x = C_2$. В результате замена переменных

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = x, \quad D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) = -\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0$$

дает, в силу (22) и (33),

$$\tilde{a} = 0, \quad \tilde{b} = a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \tilde{c} = a.$$

Разделив уравнение (21) на коэффициент $\tilde{c} = a \neq 0$, получим уравнение в канонической форме (32).

III. Эллиптический тип, $d < 0$. Пусть коэффициенты a, b и c уравнения (19) — аналитические функции переменных (x, y) в окрестности некоторой точки (см. § 4.8). Тогда это уравнение приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \tilde{\Phi} = 0. \quad (34)$$

В этом случае, в силу (25), коэффициенты λ_1 и λ_2 уравнений (24) — аналитические функции, причем при вещественных (x, y) $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$. Из теоремы Коши — Ковалевской

вытекает (см. § 4.8), что в достаточно малой окрестности существует аналитическое решение $\omega(x, y)$ уравнения *)

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \lambda_1(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad (24')$$

удовлетворяющее условию $\frac{\partial \omega}{\partial y} \neq 0$. Положим

$$\xi = \frac{\omega(x, y) + \bar{\omega}(x, y)}{2}, \quad \eta = \frac{\omega(x, y) - \bar{\omega}(x, y)}{2i}, \quad (35)$$

где $\bar{\omega} = \xi - i\eta$ — функция, комплексно сопряженная с $\omega = \xi + i\eta$; она удовлетворяет второму из уравнений (24):

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + \lambda_2(x, y) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = 0.$$

Функции ξ и $\eta \in C^\infty$ и, в силу (35) и (31), их якобиан отличен от нуля:

$$D\left(\frac{\xi}{x, y}\right) = D\left(\frac{\xi + \eta}{\omega, \bar{\omega}}\right) D\left(\frac{\omega, \bar{\omega}}{x, y}\right) = -\frac{1}{2i} \frac{\sqrt{d}}{a} \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = -\frac{\sqrt{-d}}{a} \left| \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|^2 \neq 0.$$

Поэтому функции ξ и η можно взять за новые переменные. Посмотрим, какой вид примет уравнение (19) в этих переменных. По построению функция ω удовлетворяет уравнению

$$a \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

Отделяя здесь вещественную и мнимую части и пользуясь (35), получим

$$a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2, \\ a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Принимая во внимание формулы (22), заключаем отсюда, что $\bar{a} = \bar{c}$ и $\bar{b} = 0$ в переменных ξ, η . Далее, так как

*) Решение существует и без предположения об аналитичности коэффициентов a, b и c , см. И. Н. Векун [1], гл. II. Предположение об аналитичности коэффициентов позволяет использовать теорему Коши — Ковалевской о разрешимости уравнения (24') с комплексными коэффициентами в классе аналитических функций (при $d < 0$ это уравнение называется уравнением Бельтрами).

$d < 0$ и $\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0$, то $\bar{a} = \bar{c} \neq 0$. Разделив уравнение (21) на $\bar{a} = \bar{c} \neq 0$, приведем его к каноническому виду (34).

5. Пример. Уравнение Трикоми. Как отмечалось в § 3.1, уравнение Трикоми

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

принадлежит к смешанному типу: при $y < 0$ оно гиперболического типа, а при $y > 0$ — эллиптического типа, ибо $d = -y$. Уравнение Трикоми представляет интерес

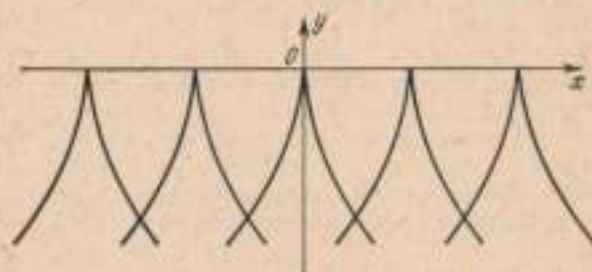


Рис. 10.

для газовой динамики, причем в области гиперболичности $y < 0$ оно соответствует сверхзвуковому движению, а в области эллиптичности $y > 0$ — дозвуковому движению.

При $y < 0$ уравнения характеристик (29) принимают вид $y' = \pm \frac{1}{\sqrt{-y}}$. Поэтому кривые (рис. 10)

$$\frac{3}{2}x + \sqrt{-y^3} = C_1, \quad \frac{3}{2}x - \sqrt{-y^3} = C_2$$

являются характеристиками уравнения Трикоми. Преобразование

$$\xi = \frac{3}{2}x + \sqrt{-y^3}, \quad \eta = \frac{3}{2}x - \sqrt{-y^3}$$

приводит уравнение Трикоми к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2 \partial \eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \xi > \eta.$$

Если же $y > 0$, то, в соответствии с теорией § 3.4, $\omega = \frac{3}{2}x - i\sqrt{y^3}$ и подстановка типа (35):

$$\xi = \frac{3}{2}x, \quad \eta = -\sqrt{y^3},$$

приводит уравнение Трикоми к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \eta < 0.$$

§ 4. Постановка основных краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка

В этом параграфе мы сформулируем математические модели для ряда характерных физических процессов, которые сводятся к различным краевым задачам для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

1. Классификация краевых задач. Как было показано в § 2, линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) \quad (1)$$

описывает процессы колебаний, уравнение

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) \quad (2)$$

описывает процессы диффузии и, наконец, уравнение

$$-\operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} u) + qu = F(x) \quad (3)$$

описывает соответствующие стационарные процессы.

Пусть $G \subset R^n$ — область, где происходит процесс, и S — ее граница, которую считаем кусочно-гладкой поверхностью. Таким образом, G есть область задания уравнения (3). Областью задания уравнений (1) и (2) будем считать цилиндр $U_T = G \times (0, T)$ высоты T и с основанием G . Его граница состоит из боковой поверхности $S \times [0, T]$ и двух оснований: нижнего $G \times \{0\}$ и верхнего $G \times \{T\}$ (рис. 11).

Будем предполагать, что коэффициенты ρ , r и q уравнений (1)–(3) не зависят от времени t ; далее, в соответствии с их физическим смыслом, будем считать, что

$\rho(x) > 0$, $r(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $x \in G$. Наконец, в соответствии с математическим смыслом уравнений (1)–(3), необходимо считать, что $\rho \in C(\bar{G})$, $r \in C^1(\bar{G})$ и $q \in C(\bar{G})$.

При этих предположениях, согласно классификации § 3, уравнение колебаний (1) — гиперболического типа, уравнение диффузии (2) — параболического типа и стационарное уравнение (3) — эллиптического типа. Таким образом, различие в типах рассматриваемых уравнений тесно связано с различием физических процессов, описываемых этими уравнениями.

Как отмечалось в § 2, чтобы полностью описать тот или иной физический процесс, необходимо, кроме самого уравнения, описывающего этот процесс, задать начальное состояние этого процесса (*начальные условия*) и режим на границе той области, в которой происходит этот процесс (*граничные условия*). Математически это связано с неединственностью решения дифференциальных уравнений. Действительно, даже для обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка общее решение зависит от n произвольных постоянных. Для уравнений же в частных производных решение, вообще говоря, зависит от произвольных функций; например, общее решение уравнения $u_x = 0$ в классе функций, зависящих от переменных x и y , имеет вид $u(x, y) = f(y)$, где f — произвольная функция класса C^1 . Поэтому, чтобы выделить решение, описывающее реальный физический процесс, необходимо задавать дополнительные условия. Такими дополнительными условиями и являются *краевые условия*: *начальные* и *граничные* условия. Соответствующая задача называется *краевой задачей*. Различают, таким образом, следующие три основных типа краевых задач для дифференциальных уравнений.

а) *Задача Коши* для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные условия,

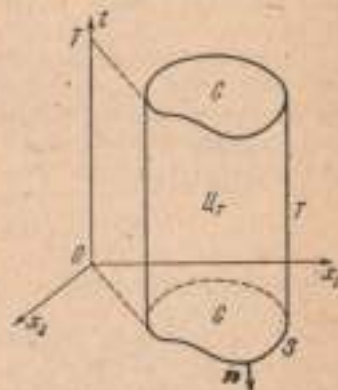


Рис. 11.

область G совпадает со всем пространством R^n , граничные условия отсутствуют.

б) *Краевая задача* для уравнений эллиптического типа: задаются граничные условия на границе S , начальные условия, естественно, отсутствуют.

в) *Смешанная задача* для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются и начальные и граничные условия, $G \neq R^n$.

Опишем подробнее постановку каждой из перечисленных краевых задач для рассматриваемых уравнений (1) — (3).

2. *Задача Коши*. Для уравнения колебаний (1) (гиперболический тип) задача Коши ставится следующим образом: найти функцию $u(x, t)$ класса $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$, удовлетворяющую уравнению (1) в полупространстве $t > 0$ и начальным условиям при $t = +0$:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x). \quad (4)$$

При этом необходимо, чтобы $F \in C(t > 0)$, $u_0 \in C^1(R^n)$, $u_1 \in C(R^n)$.

Для уравнения диффузии (2) (параболический тип) задача Коши ставится так: найти функцию $u(x, t)$ класса $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$, удовлетворяющую уравнению (2) в полупространстве $t > 0$ и начальному условию при $t = +0$:

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (5)$$

При этом необходимо, чтобы $F \in C(t > 0)$, $u_0 \in C(R^n)$.

Приведенная постановка задачи Коши допускает следующее обобщение. Пусть даны квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_{i0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + \Phi\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad (6)$$

кусочно-гладкая поверхность $\Sigma = \{t = \sigma(x)\}$ и функции u_0 и u_1 на Σ (данные Коши). Задача Коши для уравнения (6) состоит в нахождении в некоторой части области

$t > \sigma(x)$, примыкающей к поверхности Σ , решения $u(x, t)$, удовлетворяющего на Σ краевым условиям

$$u|_{\Sigma} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = u_1, \quad (7)$$

где n — нормаль к Σ , направленная в сторону возрастающих t (рис. 12).

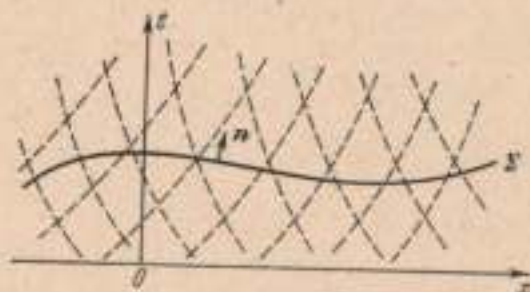


Рис. 12.

3. *Роль характеристик в постановке задачи Коши*. Предположим, что поверхность Σ принадлежит классу C^2 (см. § 1.1) и ни в какой своей точке не касается характеристической поверхности (см. § 3.3) уравнения (6), т. е. на Σ выполнено неравенство

$$a_{00} = 1 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_{i0} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \neq 0. \quad (8)$$

Преобразуем задачу Коши (6) — (7) к задаче Коши, в которой данные Коши заданы на плоскости $\tau = 0$. Для этого вместо переменной t введем новую переменную $\tau = t - \sigma(x)$. При этой замене переменной уравнение (6) для функции

$$\tilde{u}(x, \tau) = u(x, \tau + \sigma(x)) \quad (9)$$

в окрестности поверхности Σ принимает вид (см. § 3.1)

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} = \frac{1}{a_{00}} \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{a_{00}} \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{i0} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial \tau} + \tilde{\Phi}, \quad (10)$$

поскольку, в силу (8), $\partial \sigma / \partial n \neq 0$ на Σ . При этом поверхность Σ переходит в плоскость $\tau = 0$, а краевые условия (7), в силу (9), принимают вид

$$u|_{\tau=0} = u|_{\Sigma} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \tau}|_{\tau=0} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma}. \quad (11)$$

Осталось найти $\frac{\partial u}{\partial n}$ на Σ . Дифференцируя первое из краевых условий (7), $u_0(x) = u(x, \sigma(x))$, по x_i , получим n соотношений на Σ

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Дифференцируя функцию $u(x, t)$ по нормали

$$n = \left(\frac{1}{\Delta}, -\frac{1}{\Delta} \text{grad } \sigma \right), \quad \Delta = \sqrt{1 + |\text{grad } \sigma|^2},$$

и учитывая второе из краевых условий (7), получим еще одно соотношение на Σ :

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}. \quad (13)$$

Система линейных алгебраических уравнений (12)–(13) однозначно разрешима относительно величин $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ в каждой точке поверхности Σ , так как ее определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x_n} & 0 & \dots & 1 \\ \frac{1}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} & \dots & -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \sigma}{\partial x_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \Delta \neq 0.$$

Замечание. С другой стороны, если поверхность Σ совпадает с характеристической поверхностью уравнения (6), то соответствующая задача Коши (6)–(7) может и вовсе не иметь решения, и если и имеет такое, то оно может быть не единственным.

Для доказательства сказанного достаточно привести пример. Рассмотрим задачу Коши для уравнения $u_{xx} = 0$ с данными на характеристике $t = 0$:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x),$$

Если решение поставленной задачи существует, то из уравнения и из второго начального условия вытекает необходимое условие разрешимости ее: $u_1'(x) = 0$. Таким образом, решение задачи может существовать лишь при $u_1(x) = \text{const} = a$. В этом случае, если $u_0 \in C^2$, решение действительно существует и, как легко убедиться, дается формулой

$$u(x, t) = u_0(x) + at + c(t),$$

где $c(t)$ — любая функция класса C^2 ($t \geq 0$), удовлетворяющая условиям $c(0) = c'(0) = 0$. Решение не единственно!

4. Краевая задача для уравнений эллиптического типа. Краевая задача для уравнения (3) (эллиптический тип) состоит в нахождении функции $u(x)$ класса $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, удовлетворяющей в области G уравнению (3) и граничному условию на S вида

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}|_S = v, \quad (14)$$

где α , β и v — заданные непрерывные функции на S , причем $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$.

Выделяют следующие типы граничных условий (14): Граничное условие I рода ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)

$$u|_S = u_0. \quad (15)$$

Граничное условие II рода ($\alpha = 0$, $\beta = 1$)

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = u_1. \quad (16)$$

Граничное условие III рода ($\beta = 1$, $\alpha \geq 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u|_S = u_2. \quad (17)$$

Соответствующие краевые задачи называются *краевыми задачами I, II и III рода*.

Для уравнений Лапласа и Пуассона (см. § 2.3) краевая задача I рода

$$\Delta u = -f, \quad u|_S = u_0 \quad (18)$$

называется *задачей Дирихле*; краевая задача II рода

$$\Delta u = -f, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_S = u_1 \quad (19)$$

называется *задачей Неймана*.

Аналогично ставятся краевые задачи для уравнения (3) и во внешности ограниченной области G (внешние краевые задачи). Отличие состоит в том, что, помимо граничного условия (14) на S , задаются еще условия на бесконечности. Такими условиями, например, могут быть: условия излучения Зоммерфельда (22) § 2.3 — для уравнения Гельмгольца или Шредингера (см. § 2.7); условия вида

$$u(x) = O(1) \quad \text{или} \quad u(x) = o(1), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (20)$$

— для уравнения Пуассона; принадлежность φ к $\mathcal{L}_2(R^3)$ для собственных функций уравнения Шредингера (40) § 2.7 и другие.

5. Смешанная задача. Для уравнения колебаний (1) (гиперболический тип) смешанная задача ставится следующим образом: найти функцию $u(x, t)$ класса $C^2(\bar{U}_T) \cap C^1(\bar{U}_T)$, удовлетворяющую уравнению (1) в цилиндре U_T , начальным условиям (4) при $t=0$, $x \in G$ (на нижнем основании цилиндра U_T) и граничному условию

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = v \quad (14')$$

(на боковой поверхности цилиндра U_T). При этом необходимо должны быть выполнены условия гладкости

$$F \in C(\bar{U}_T), \quad u_0 \in C^1(\bar{G}), \quad u_1 \in C(\bar{G}), \quad v \in C(S \times [0, T])$$

и условия согласованности

$$\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_S = v|_{t=0} \quad (21)$$

Аналогично для уравнения диффузии (2) (параболический тип) смешанная задача ставится так: найти функцию $u(x, t)$ класса $C^2(\bar{U}_T) \cap C(\bar{U}_T)$, $\text{grad}_x u \in C(\bar{U}_T)$, удовлетворяющую уравнению (2) в U_T , начальному условию (5) и граничному условию (14').

Замечание. Решения поставленных краевых задач с гладкостью C^2 вплоть до границы области задания уравнения существуют не всегда. Поэтому иногда приходится отказываться от требования такой гладкости и требовать, например, чтобы решение было только непрерывным вплоть до границ области. Эта постановка является естественной в задачах, не содержащих первых производных в краевых условиях, например, для уравнений (2) и (3) с граничным условием I рода. Если же в краевые условия входят первые производные,

то в каждом конкретном случае необходимо указывать смысл, в котором должны быть выполнены эти краевые условия. Например, для смешанной задачи для уравнения (1) выполнения второго из начальных условий (4) можно требовать в смысле $\mathcal{L}_2(G)$:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} - u_1 \right| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +0; \quad (22)$$

для задачи Неймана для уравнения Лапласа выполнения граничного условия (16) можно требовать в следующем смысле:

$$\frac{\partial u(x')}{\partial n_x} \xrightarrow{x' \in S} u_1(x), \quad x' \rightarrow x, \quad x' \in G, \quad x' \in -n_x. \quad (23)$$

6. Другие краевые задачи. Сформулируем еще две краевые задачи, часто встречающиеся в математической физике.

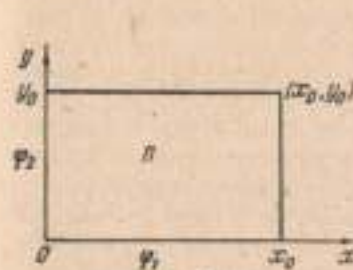


Рис. 13

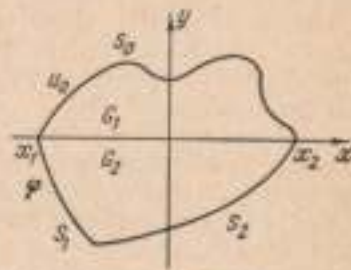


Рис. 14

а) Задача Гурса. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение гиперболического типа с двумя независимыми переменными в каноническом виде (см. § 3.4)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y) \quad (24)$$

с непрерывными коэффициентами a , b и c в замкнутом прямоугольнике $\bar{P}$, $P = (0, x_0) \times (0, y_0)$. Требуется найти функцию $u(x, y)$ класса $C^1(P) \cap C(\bar{P})$, $u_{xy} \in C(P)^*$, удовлетворяющую уравнению (24) в прямоугольнике P и принимающую заданные значения на его сторонах $y=0$, $0 \leq x \leq x_0$ и $x=0$, $0 \leq y \leq y_0$ (рис. 13):

$$u|_{y=0} = \varphi_1(x), \quad u|_{x=0} = \varphi_2(y). \quad (25)$$

* И тогда $u_{xy} = u_{yx}$ в P (см., например, Л. Д. Кудринцев [1], § 21).

При этом необходимо должны быть выполнены условия гладкости

$$f \in C(\Pi), \quad \varphi_1 \in C([0, x_0]), \quad \varphi_2 \in C([0, y_0])$$

и условие согласованности $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

Отметим, что в задаче Гурса задается одно краевое условие на двух пересекающихся характеристиках уравнения (24).

б) Задача Трикоми для уравнения Чаплыгина. Уравнение Чаплыгина имеет вид:

$$K(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (26)$$

где

$$K(0) = 0, \quad K'(y) > 0, \quad y \neq 0;$$

при $K(y) = y$ уравнение (26) превращается в уравнение Трикоми (см. § 3.5).

Пусть односвязная область G в плоскости (x, y) разделена параболической линией $y=0$ уравнения Трикоми на две части: эллиптическую $G_1(y>0)$ и гиперболическую $G_2(y<0)$. Предположим, что область G_1 в $y>0$ ограничена кусочно-гладкой кривой S_0 , которая оканчивается в точках x_1 и x_2 , $x_1 < x_2$, на оси x , а область G_2 в $y<0$ ограничена двумя пересекающимися характеристиками S_1 и S_2 уравнения (26) (ср. § 3.5), проходящими соответственно через точки x_1 и x_2 на оси x (рис. 14).

Требуется найти функцию $u(x, y)$ — класса $C^2(G_1 \cup G_2) \cap C^1(G) \cap C(\bar{G})$, удовлетворяющую уравнению (26) в областях G_1 и G_2 и принимающую на дуге S_0 и на одной из характеристик, например на S_1 , заданные значения

$$u|_{S_0} = u_0, \quad u|_{S_1} = \varphi. \quad (27)$$

При этом необходимо, чтобы $u_0 \in C(S_0)$, $\varphi \in C(S_1)$ и $u_0(x_1) = \varphi(x_1)$.

7. **Корректность постановок задач математической физики.** Поскольку задачи математической физики представляют собой математические модели реальных физических процессов, то их постановки должны удовлетворять следующим естественным требованиям:

а) Решение должно существовать в каком-то классе функций $\mathcal{H}_1$.

б) Решение должно быть единственным в некотором классе функций $\mathcal{H}_2$.

с) Решение должно непрерывно зависеть от данных задачи (начальных и граничных данных, свободного члена, коэффициентов уравнения и т. д.). Непрерывная зависимость решения u от данных задачи $\bar{u}$ означает следующее: пусть последовательность данных $\bar{u}_k$, $k=1, 2, \dots$, в каком-то смысле стремится к $\bar{u}$ и u_k , $k=1, 2, \dots$, — соответствующие решения задачи; тогда должно быть $u_k \rightarrow u$, $k \rightarrow \infty$, в смысле сходимости, выбранной надлежащим образом. Например, пусть задача приводится к уравнению $Lu = F$, где L — линейный оператор, переводящий $\mathcal{H}$ в $\mathcal{F}$, где $\mathcal{H}$ и $\mathcal{F}$ — линейные нормированные пространства. В этом случае непрерывная зависимость решения u от свободного члена F будет обеспечена, если оператор L^{-1} существует и ограничен из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{H}$ (см. §§ 1.10 и 1.11). Требование непрерывной зависимости решения обуславливается тем обстоятельством, что физические данные, как правило, определяются из эксперимента приближенно, и поэтому нужно быть уверенным в том, что решение задачи в рамках выбранной математической модели не будет существенно зависеть от погрешностей измерений.

Задача, удовлетворяющая перечисленным требованиям называется *корректно поставленной* (по Адамару), а множество функций $M_1 \cap M_2$ — классом корректности. Задача, не удовлетворяющая хотя бы одному из условий а) — с), называется *некорректно поставленной*.

К некорректно поставленным задачам часто приводят обратные задачи математической физики: по некоторой информации о решении прямой задачи восстановить некоторые неизвестные физические величины, определяющие эту задачу (источники, краевые условия, коэффициенты уравнения и т. д.).

Новый подход к некорректно поставленным задачам предложен А. Н. Тихоновым [1]*).

В этой книге мы устанавливаем корректность поставленных основных краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка в том или ином классе, а также изучаем качественные свойства решений

* См. также А. Н. Тихонов, В. К. Иванов и М. М. Лаврентьев [1], М. М. Лаврентьев [1], А. Н. Тихонов и В. Я. Арсенин [1].

и методы построения (точных или приближенных) решений этих задач.

Пример. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается (см., например, В. В. Степанов [1], гл. II), что задача Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

поставлена корректно, если функция $f(x, y)$ непрерывна по (x, y) и удовлетворяет условию Липшица по y (см. § 1.3) в некоторой области, содержащей точку (x_0, y_0) .

8. Теорема Коши — Ковалевской. В этом пункте мы выделим довольно общий класс задач Коши, для которых решение существует и единственно. Прежде всего введем два определения*).

1) Система N дифференциальных уравнений с N неизвестными функциями $u_1, u_2, \dots, u_N$

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \Phi_i(x, t, u_1, u_2, \dots, u_N, \dots, D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} u_j, \dots), \quad (28)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

называется нормальной относительно переменной t , если правые части Φ_i не содержат производных порядка выше k_i и производных по t порядка выше $k_i - 1$, т. е.

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k_i, \quad \alpha_0 \leq k_i - 1.$$

Например, волновое уравнение, уравнение Лапласа и уравнение теплопроводности нормальны относительно каждой переменной x ; волновое уравнение, кроме того, нормально относительно t .

2) Функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, называется аналитической в точке x_0 , если в некоторой окрестности этой точки она представляется в виде равномерно сходящегося степенного ряда

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha (x - x_0)^\alpha = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

(точка x_0 может быть и комплексной). Если функция $f(x)$ аналитична в каждой точке области G , то говорят, что она аналитична в области G .

*) Используемые ниже обозначения введены в § 1.2.

Для нормальной относительно t системы уравнений (28) поставим следующую задачу Коши: найти решение $u_1, u_2, \dots, u_N$ этой системы, удовлетворяющее начальным условиям при $t = t_0$:

$$\left. \frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} \right|_{t=t_0} = \Phi_{ik}(x), \quad k = 0, 1, \dots, k_i - 1; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (29)$$

где $\Phi_{ik}(x)$ — заданные функции в некоторой области $G \subset R^n$.

Теорема Коши — Ковалевской. Если все функции $\Phi_{ik}(x)$ аналитичны в некоторой окрестности точки x_0 и все функции $\Phi_i(x, t, \dots, u_1, u_2, \dots, u_N, \dots)$ аналитичны в некоторой окрестности точки

$$(x_0, t_0, \dots, D^\alpha \Phi_{j/\alpha_j}(x_0), \dots),$$

то задача Коши (28) — (29) имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки (x_0, t_0) и притом единственное в классе аналитических функций.

Для доказательства этой теоремы решение $u_1, u_2, \dots, u_N$ в окрестности точки (x_0, t_0) ищется в виде степенных рядов

$$u_i(x, t) = \sum_{\alpha_0 \geq 0, |\alpha| \geq 0} \frac{D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} u_i(x_0, t_0)}{\alpha_0! \alpha!} (t - t_0)^{\alpha_0} (x - x_0)^\alpha. \quad (30)$$

Из начальных условий (29) и из уравнений (28) последовательно определяются все производные $D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} u_i$ в точке (x_0, t_0) . Равномерная сходимость рядов (30) в некоторой окрестности точки (x_0, t_0) доказывается методом мажорант. Единственность построенного решения в классе аналитических функций следует из теоремы единственности для аналитических функций.

Подробные доказательства теоремы Коши — Ковалевской содержатся, например, в книгах И. Г. Петровского [1], Г. Н. Положего [1] и В. П. Михайлова [1].

9. Пример Адамара. Теорема Коши — Ковалевской, несмотря на ее общий характер, полностью не решает вопроса о корректности постановки задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Действительно, эта теорема гарантирует существование и единственность решения лишь в достаточно малой окрест-

ности, или, как говорят, *в малом*; обычно же эти факты требуется установить в наперед заданных (и отнюдь немалых) областях, или, как говорят, *в целом*. Далее, начальные данные и свободный член уравнения, как правило, оказываются неаналитическими функциями. Наконец, может вовсе не быть непрерывной зависимости решения от начальных данных. Это показывает пример, впервые построенный Адамаром (см. Ж. Адамар [1]):

Решение задачи Коши

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_t|_{x=0} = \frac{1}{k} \sin kx$$

для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

есть

$$u_k(x, t) = \frac{\sin kt}{k^2} \sin kx.$$

Если $k \rightarrow +\infty$, то $\frac{1}{k} \sin kx \not\rightarrow 0$; тем не менее при $x \neq j\pi$, $j = 0, \pm 1, \dots$,

$$u_k(x, t) = \frac{\sin kt}{k^2} \sin kx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, задача Коши для уравнения Лапласа поставлена некорректно (в смысле определения § 4.7).

Тем не менее возможны корректные постановки этой задачи. Например, в классе функций, ограниченных фиксированной постоянной, эта задача поставлена корректно при условии, что ее решение существует (последнее требование приводит к вполне определенным ограничениям на множество допустимых начальных данных u_0 и u_1). О корректных постановках задачи Коши для уравнения Лапласа и методах их решения см. М. М. Лаврентьев [1].

10. Классические и обобщенные решения. Изложенные в предыдущих пунктах постановки краевых задач характеризуются тем, что решения их предполагаются достаточно гладкими и они должны удовлетворять уравнению в каждой точке области задания этого уравнения. Такие решения мы будем называть *классическими*, а постановку соответствующей краевой задачи — *классической постановкой*. Таким образом, классические постановки задач уже предполагают достаточную гладкость входящих в задачу данных. Однако, в наиболее интересных задачах эти дан-

ные могут иметь довольно сильные особенности. Поэтому для таких задач классические постановки уже оказываются недостаточными. Чтобы поставить такие задачи, приходится отказываться (частично или полностью) от требований гладкости решения в области или вплоть до границы, вводить так называемые *обобщенные решения*. Но тогда встает вопрос о том, какие функции можно называть решениями уравнения. Чтобы сделать это, необходимо существенно обобщить понятие производной и вообще понятие функции, т. е. ввести так называемые *обобщенные функции*. Изучению этого вопроса целиком посвящается следующая глава.

Обобщенные функции впервые в науку были введены П. Дираком [1] в его квантомеханических исследованиях, в которых систематически использовалась знаменитая δ -функция. Основы математической теории обобщенных функций были заложены С. Л. Соболевым ([2], 1936 г.) и Л. Шварцем ([2], 1950—1951 гг.). В дальнейшем теория обобщенных функций интенсивно развивалась многими математиками. Быстрое развитие теории обобщенных функций стимулировалось главным образом потребностями математической физики, в особенности теорий дифференциальных уравнений и квантовой физики. В настоящее время теория обобщенных функций далеко продвинута вперед, имеет многочисленные применения в физике и математике и прочно вошла в обиход математика, физика и инженера *).

§ 5. Основные и обобщенные функции

1. Введение. Обобщенная функция является обобщением классического понятия функции. Это обобщение, с одной стороны, дает возможность выразить в математической форме такие идеализированные понятия, как, например, плотность материальной точки, плотность точечного заряда или диполя, плотность простого или двойного слоя, интенсивность мгновенного точечного источника, интенсивность силы, приложенной в точке, и т. д. С другой стороны, в понятии обобщенной функции находит отражение тот факт, что реально нельзя, например, измерить плотность вещества в точке, а можно измерить лишь

* См. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов и И. Т. Тодоров [1], И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилор [1], В. С. Владимиров [2, 3], Р. Стрингер, А. Вайтман [1], Р. Йост [1], Г. Бримерман [1], Л. Шварц [1], Л. Хермакдер [1].

его среднюю плотность в достаточно малой окрестности этой точки и объявлять это плотностью в данной точке; грубо говоря, обобщенная функция определяется своими «средними значениями» в окрестностях каждой точки.

Чтобы пояснить сказанное, попытаемся определить плотность, создаваемую материальной точкой массы 1. Считаем, что эта точка совпадает с началом координат.

Чтобы определить эту плотность, распределим (или, как говорят, размажем) массу 1 равномерно внутри шара U_ϵ . В результате получим среднюю плотность

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |x| < \epsilon, \\ 0, & |x| > \epsilon. \end{cases}$$

Примем сначала в качестве искомой плотности (мы ее обозначим через $\delta(x)$) поточечный предел последовательности средних плотностей $f_\epsilon(x)$ при $\epsilon \rightarrow 0$, т. е.

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

От плотности δ естественно требовать, чтобы интеграл от нее по любому объему V давал бы массу вещества, заключенного в этом объеме, т. е.

$$\int_V \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in V, \\ 0, & \text{если } 0 \notin V. \end{cases}$$

Но, в силу (1), левая часть этого равенства всегда равна нулю. Полученное противоречие показывает, что поточечный предел последовательности $f_\epsilon(x)$, $\epsilon \rightarrow 0$, не может быть принят в качестве плотности $\delta(x)$.

Вычислим теперь *слабый предел* последовательности функций $f_\epsilon(x)$, $\epsilon \rightarrow 0$, т. е. для любой непрерывной функции φ найдем предел числовой последовательности $\int f_\epsilon \varphi dx$ при $\epsilon \rightarrow 0$ (см. § 1.10).

Покажем, что

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int f_\epsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Действительно, в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ для любого $\eta > 0$ существует такое $\epsilon_0 > 0$, что

$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$, коль скоро $|x| < \varepsilon_0$. Отсюда при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ получаем

$$\left| \int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \left| \int_{|x|<\varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| < \\ < \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x|<\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)| dx < \eta \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x|<\varepsilon} dx = \eta,$$

что и утверждалось.

Таким образом, слабым пределом последовательности функций $f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, является функционал $\varphi(0)$, сопоставляющий каждой непрерывной функции $\varphi(x)$ число $\varphi(0)$ — значение ее в точке $x=0$. Вот это-то функционал и принимается за определение плотности $\delta(x)$; это и есть известная δ -функция Дирака.

Итак, $f_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, в том смысле, что для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ справедливо предельное соотношение

$$\int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow (\delta, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где символ (δ, φ) обозначает число $\varphi(0)$ — значение функционала δ на функции φ .

Чтобы восстановить теперь полную массу, нужно подействовать функционалом (плотностью) $\delta(x)$ на функцию $\varphi(x) = 1$, $(\delta, 1) = 1(0) = 1$.

Если в точке $x=0$ сосредоточена масса m , то соответствующую плотность следует считать равной $m\delta(x)$. Если масса m сосредоточена в точке x_0 , то ее плотность естественно считать равной $m\delta(x-x_0)$, где $(m\delta(x-x_0), \varphi) = m\varphi(x_0)$. И вообще, если в различных точках x_k , $k=1, 2, \dots, N$, сосредоточены массы m_k , то соответствующая плотность равна

$$\sum_{k=1}^N m_k \delta(x-x_k).$$

Таким образом, плотность, создаваемая материальными точками, не может быть описана в рамках классического понятия функции, и для ее описания следует привлекать объекты более общей математической природы — линейные непрерывные функционалы (обобщенные функции).

2. **Пространство основных функций $\mathscr{D}$.** Уже на примере δ -функции видно, что она определяется посредством непрерывных функций как линейный непрерывный функционал на этих функциях (см. § 1.10). Непрерывные функции, как говорят, являются *основными функциями* для δ -функции. Эта точка зрения и берется за основу определения произвольной обобщенной функции как линейного непрерывного функционала на пространстве достаточно «хороших» (основных) функций. Ясно, что чем уже пространство основных функций, тем больше существует линейных непрерывных функционалов на нем. С другой стороны, запас основных функций должен быть достаточно велик. В этом пункте введем важное пространство основных функций $\mathscr{D}$.

Отнесем к множеству *основных функций* $\mathscr{D} = \mathscr{D}(R^n)$ (см. § 1.2) все *финитные бесконечно дифференцируемые в R^n функции*. Сходимость в $\mathscr{D}$ определим следующим образом. Последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ из $\mathscr{D}$ сходится к функции φ (из $\mathscr{D}$), если: а) существует такое число $R > 0$, что $\text{supp } \varphi_k \subset U_R$; б) при каждом $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$$D^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{x \in K^n} D^\alpha \varphi(x), \quad k \rightarrow \infty.$$

В этом случае будем писать: $\varphi_k \rightarrow \varphi$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathscr{D}$.

Линейное множество $\mathscr{D}$ с введенной в нем сходимостью называется *пространством основных функций $\mathscr{D}$* .

Операция дифференцирования $D^\alpha \varphi(x)$ непрерывна из $\mathscr{D}$ в $\mathscr{D}$.

Действительно, если $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathscr{D}$, то а) $\varphi_k(x) = 0$, $|x| > R$ при некотором $R > 0$ и б) при каждом α

$$D^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{x \in K^n} 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Но тогда: а) $\text{supp } D^\alpha \varphi_k \subset U_R$; б) при каждом α

$$D^\alpha [D^\beta \varphi_k(x)] = D^{\alpha+\beta} \varphi_k(x) \xrightarrow{x \in K^n} 0,$$

если $k \rightarrow \infty$, что, в силу определения сходимости в $\mathscr{D}$, и означает, что $D^\beta \varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathscr{D}$. Это и значит, что оператор D^β непрерывен из $\mathscr{D}$ в $\mathscr{D}$ (см. § 1.10).

Аналогично, операция неособенной линейной замены переменных $\varphi(Ay+b)$ и умножения на функцию $a \in C^\infty(R^n)$, $a(x)\varphi(x)$, непрерывны из $\mathscr{D}$ в $\mathscr{D}$.

Совокупность основных функций, носители которых содержатся в данной области G , обозначим через $\mathcal{D}(G)$; таким образом,

$$\mathcal{D}(G) \subset \mathcal{D}(R^n) = \mathcal{D}.$$

В связи с приведенным определением возникает вопрос: существуют ли основные функции, отличные от тождественного нуля? Ясно, что такие функции не могут быть

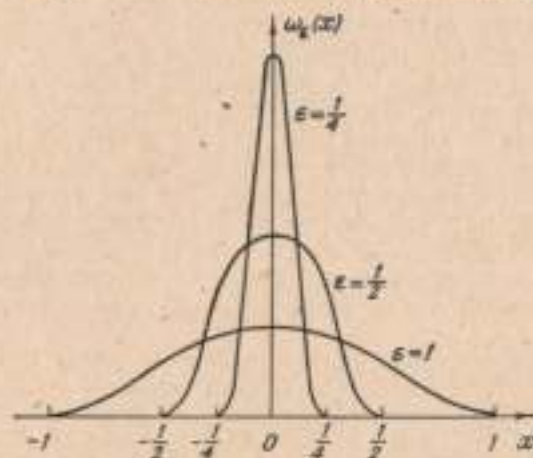


Рис. 15.

аналитическими в R^n (см. § 4.8). Примером основной функции, отличной от нулевой, является «шапочка» (рис. 16)

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Постоянную C_ε выберем так, чтобы

$$\int \omega_\varepsilon(x) dx = 1,$$

т. е.

$$C_\varepsilon \varepsilon^n \int_0^1 e^{-\frac{1}{1-\xi^2}} d\xi = 1.$$

Легко проверить, что

$$\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \omega_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Следующая лемма дает другие многочисленные примеры основных функций.

Лемма 1. Для любой области G и любого числа $\varepsilon > 0$ существует функция $\eta \in C^\infty(R^n)$ такая, что

$$0 \leq \eta(x) \leq 1; \quad \eta(x) = 1, \quad x \in G_\varepsilon; \quad \eta(x) = 0, \quad x \in G_{2\varepsilon}.$$

(График функции $\eta(x)$ при $G = (a, b)$ изображен на рис. 16.)

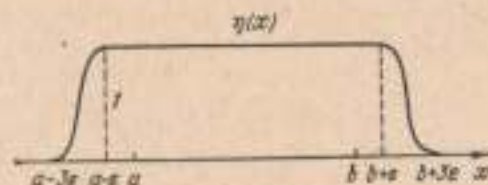


Рис. 16

Доказательство. Пусть $\chi(x)$ — характеристическая функция множества $G_{2\varepsilon}$: $\chi(x) = 1$, $x \in G_{2\varepsilon}$; $\chi(x) = 0$, $x \in G_{2\varepsilon}^c$. Тогда функция

$$\eta(x) = \int \chi(y) \omega_\varepsilon(x-y) dy$$

обладает требуемыми свойствами. Действительно, так как $\omega_\varepsilon \in \mathcal{D}$, $0 \leq \omega_\varepsilon(x)$, $\text{supp } \omega_\varepsilon = U_\varepsilon$, $\int \omega_\varepsilon(x) dx = 1$, то (рис. 17)

$$\eta(x) = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y) dy \in C^\infty(R^n);$$

$$0 \leq \eta(x) \leq \int \omega_\varepsilon(x-y) dy = \int \omega_\varepsilon(\xi) d\xi = 1;$$

$$\eta(x) = \int_{U_\varepsilon(x)} \chi(y) \omega_\varepsilon(x-y) dy =$$

$$= \begin{cases} \int_{U_\varepsilon(x)} \omega_\varepsilon(x-y) dy = \int \omega_\varepsilon(\xi) d\xi = 1, & x \in G_\varepsilon; \\ 0, & x \in G_{2\varepsilon}^c. \end{cases}$$

Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает следствие: если область G ограничена и $G' \subseteq G$, то существует функция $\eta \in \mathcal{D}(G)$ такая, что $0 \leq \eta \leq 1$ и $\eta(x) = 1, x \in G'$.

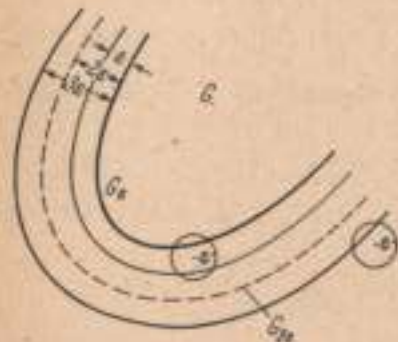


Рис. 17.

Следующая лемма утверждает, что запас основных функций достаточно велик.

Лемма 2. Множество $\mathcal{D}(G)$ плотно в $\mathcal{L}_2(G)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{L}_2(G)$ и $\varepsilon > 0$ — любое число. В силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см.

§ 1.4, е)) существует такая область $G' \subseteq G$, что

$$\int_{G \setminus G'} |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{5}. \quad (2)$$

Так как множество полиномов плотно в $\mathcal{L}_2(G')$ (см. § 1.7), то существует полином P такой, что

$$\int_{G'} |f(x) - P(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{5}. \quad (2')$$

Теперь выберем подобласть $G'' \subseteq G'$, настолько близкую к области G' , чтобы

$$\int_{G \setminus G''} |P(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{5}. \quad (2'')$$

Возьмем функцию η из $\mathcal{D}(G')$ такую, что $0 \leq \eta \leq 1$ и $\eta(x) = 1, x \in G''$ (по следствию из леммы 1 такие функции существуют). Тогда $P\eta \in \mathcal{D}(G)$ и, в силу неравенств (2), (2') и (2''),

$$\begin{aligned} \|f - P\eta\|^2 &= \int |f - P\eta|^2 dx = \int_{G'} |f - P\eta|^2 dx + \int_{G \setminus G'} |f|^2 dx \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{5} + 2 \int_{G'} |f - P|^2 dx + 2 \int_{G'} |P - P\eta|^2 dx < \\ &< \frac{3}{5} \varepsilon^2 + 2 \int_{G \setminus G''} |P|^2 dx < \varepsilon^2, \end{aligned}$$

что и требовалось.

3. Пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'$. Обобщенной функцией называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathcal{D}$. В соответствии с обозначениями § 1.10 значение функционала (обобщенной функции) f на основной функции φ будем записывать (f, φ) . Обобщенную функцию f будем также формально записывать в виде $f(x)$, подразумевая под x аргумент основных функций, на которые действует функционал f .

Расшифруем определение обобщенной функции f .

1) Обобщенная функция f есть функционал на $\mathcal{D}$, т. е. каждой $\varphi \in \mathcal{D}$ сопоставляется (комплексное) число (f, φ) .

2) Обобщенная функция f есть линейный функционал на $\mathcal{D}$, т. е. если $\varphi \in \mathcal{D}$, $\psi \in \mathcal{D}$ и λ, μ — комплексные числа, то

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi).$$

3) Обобщенная функция f есть непрерывный функционал на $\mathcal{D}$, т. е. если $\varphi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$, то $(f, \varphi_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Обозначим через $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(R^n)$ множество всех обобщенных функций.

Множество $\mathcal{D}'$ — линейное, если линейную комбинацию $\lambda f + \mu g$ обобщенных функций f и g определить как функционал, действующий по формуле

$$(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Проверим, что функционал $\lambda f + \mu g$ — линейный и непрерывный на $\mathcal{D}$, т. е. принадлежит $\mathcal{D}'$. Действительно, если $\varphi \in \mathcal{D}$, $\psi \in \mathcal{D}$ и α, β — любые комплексные числа, то по определению,

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g, \alpha\varphi + \beta\psi) &= \lambda(f, \alpha\varphi + \beta\psi) + \mu(g, \alpha\varphi + \beta\psi) = \\ &= \alpha[\lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi)] + \beta[\lambda(f, \psi) + \mu(g, \psi)] = \\ &= \alpha(\lambda f + \mu g, \varphi) + \beta(\lambda f + \mu g, \psi) \end{aligned}$$

и потому этот функционал — линейный. Непрерывность его следует из непрерывности функционалов f и g : если $\varphi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$, то

$$(\lambda f + \mu g, \varphi_k) = \lambda(f, \varphi_k) + \mu(g, \varphi_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Определим сходимость в $\mathcal{D}'$ как слабую сходимость последовательности функционалов (см. § 1.10): последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \dots$ из $\mathcal{D}'$ сходится к обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'$, если для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ $(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$, $k \rightarrow \infty$. В этом случае мы будем писать $f_k \rightarrow f$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'$. Линейное множество $\mathcal{D}'$ с введенной в нем сходимостью называется пространством обобщенных функций $\mathcal{D}'$.

Замечание. Линейные функционалы на $\mathcal{D}$ не обязаны быть непрерывными на $\mathcal{D}$. Однако в явном виде не построено ни одного линейного разрывного функционала на $\mathcal{D}$; можно только теоретически доказать их существование, используя аксиому выбора.

4. Полнота пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'$. Весьма важным является свойство полноты пространства $\mathcal{D}'$.

Теорема. Пусть последовательность $f_1, f_2, \dots$ из $\mathcal{D}'$ такова, что для каждой $\varphi \in \mathcal{D}$ числовая последовательность (f_k, φ) сходится при $k \rightarrow \infty$. Тогда функционал f на $\mathcal{D}$, определенный равенством

$$(f, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

также является линейным и непрерывным на $\mathcal{D}$, т. е. $f \in \mathcal{D}'$.

Доказательство.* Линейность предельного функционала доказывается просто:

$$\begin{aligned} (f, \alpha\varphi + \beta\psi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \alpha\varphi + \beta\psi) = \\ &= \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi) + \beta \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi), \\ \varphi, \psi &\in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Докажем его непрерывность. Пусть $\varphi_v \rightarrow 0$, $v \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$; нам нужно доказать, что $(f, \varphi_v) \rightarrow 0$, $v \rightarrow \infty$ (см. § 5.3). Допуская противное и переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что при всех $v = 1, 2, \dots$ выполнено неравенство $|(f, \varphi_v)| \geq 2a$ при некотором $a > 0$. Так как

$$(f, \varphi_v) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi_v),$$

* Это элементарное доказательство взято из книги Г. Е. Шваца [1], § 9.

то для каждого $v = 1, 2, \dots$ найдется такой номер k_v , что $|(f_{k_v}, \varphi_v)| \geq a$. Но это невозможно в силу леммы, следующей ниже. Полученное противоречие и доказывает непрерывность функционала f . Теорема доказана.

Лемма. Пусть последовательность функционалов $f_1, f_2, \dots$ из $\mathcal{D}'$ удовлетворяет условиям теоремы и последовательность основных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ из $\mathcal{D}$ стремится к 0 в $\mathcal{D}$. Тогда $(f_k, \varphi_k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда, переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что $|(f_k, \varphi_k)| \geq c > 0$. Сходимость φ_k к 0 в $\mathcal{D}$ означает, что а) $\varphi_k(x) = 0$, $|x| > R$ при некотором $R > 0$; б) при каждом α

$$D^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Поэтому, переходя, если нужно, опять к подпоследовательности, можно считать, что

$$|D^\alpha \varphi_k(x)| \leq \frac{1}{2^k}, \quad |\alpha| \leq k = 0, 1, \dots$$

Положим $\psi_k = 2^k \varphi_k$; тогда

$$|D^\alpha \psi_k(x)| \leq \frac{1}{2^k}, \quad |\alpha| \leq k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

$\psi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$ и любой ряд вида $\sum \psi_{k_v}(x)$ сходится в $\mathcal{D}$; в то же время

$$|(f_k, \psi_k)| = 2^k |(f_k, \varphi_k)| \geq 2^k c \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Теперь построим подпоследовательности $\{f_{k_v}\}$ и $\{\psi_{k_v}\}$ следующим образом. Выберем f_{k_1} и ψ_{k_1} такими, чтобы $|(f_{k_1}, \psi_{k_1})| \geq 2$. (Это можно сделать в силу (4).) Пусть f_{k_j} и ψ_{k_j} , $j = 1, \dots, v-1$, уже построены; построим f_{k_v} и ψ_{k_v} . Так как $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$, то $(f_{k_j}, \psi_k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, v-1$, и поэтому найдется такой номер N , что при всех $k \geq N$

$$|(f_{k_j}, \psi_k)| \leq \frac{1}{2^{v-j}}, \quad j = 1, \dots, v-1. \quad (5)$$

Далее, поскольку

$$(f_{k_j}, \psi_{k_j}) \rightarrow (f, \psi_{k_j}), \quad k \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, v-1,$$

то найдется такой номер $N_1 \geq N$, что при всех $k \geq N_1$

$$|(f_k, \psi_{k_j})| \leq |(f, \psi_{k_j})| + 1, \quad j=1, \dots, v-1. \quad (6)$$

Наконец, в силу (4), выберем такой номер $k_v \geq N_1$, что

$$|(f_{k_v}, \psi_{k_v})| \geq \sum_{j=1}^{v-1} |(f, \psi_{k_j})| + 2v. \quad (7)$$

Таким образом, в силу (5)–(7), построенные f_{k_v} и ψ_{k_v} таковы, что

$$|(f_{k_j}, \psi_{k_v})| \leq \frac{1}{2^{v-j}}, \quad j=1, \dots, v-1, \quad (8)$$

$$|(f_{k_v}, \psi_{k_v})| \geq \sum_{j=1}^{v-1} |(f_{k_v}, \psi_{k_j})| + v+1. \quad (9)$$

Положим

$$\psi(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \psi_{k_v}(x).$$

В силу (3) этот ряд сходится в $\mathcal{D}$, и, следовательно, его суммы $\psi \in \mathcal{D}$ и

$$(f_{k_v}, \psi) = (f_{k_v}, \psi_{k_v}) + \sum_{j=1}^{v-1} (f_{k_v}, \psi_{k_j}).$$

Отсюда, принимая во внимание неравенства (8) и (9), получаем

$$\begin{aligned} |(f_{k_v}, \psi)| &\geq |(f_{k_v}, \psi_{k_v})| - \sum_{j=1}^{v-1} |(f_{k_v}, \psi_{k_j})| - \\ &- \sum_{j=v+1}^{\infty} |(f_{k_v}, \psi_{k_j})| \geq v+1 - \sum_{j=v+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-v}} = v, \end{aligned}$$

т. е. $(f_{k_v}, \psi) \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$. Но это противоречит соотношению $(f_k, \psi) \rightarrow (f, \psi)$, $k \rightarrow \infty$, что и доказывает лемму.

5. Носитель обобщенной функции. Обобщенные функции, вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках. Тем не менее можно говорить об обращении в нуль обобщенной функции в области.

Обобщенная функция f обращается в нуль в области G , если $(f, \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(G)$; этот факт будем запи-

сывать так: $f=0$, $x \in G$ или $f(x)=0$, $x \in G$. В соответствии с этим определением, обобщенные функции f и g называются равными в области G , если $f-g=0$, $x \in G$; при этом пишем: $f=g$, $x \in G$. В частности, обобщенные функции f и g называются равными, $f=g$, если для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ $(f, \varphi) = (g, \varphi)$.

Пусть обобщенная функция f обращается в нуль в области G . Тогда она, очевидно, обращается в нуль и в окрестности каждой точки этой области. Справедливо и обратное.

Лемма. Если обобщенная функция f обращается в нуль в окрестности каждой точки области G , то она обращается в нуль и в области G .

Доказательство. Пользуясь предыдущим замечанием, можно считать окрестности шарами. Нам нужно доказать, что $(f, \varphi) = 0$ для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Фиксируем произвольную функцию φ из $\mathcal{D}(G)$. Компакт $\text{supp } \varphi$ содержится в области G .

Поэтому по лемме Гейне–Бореля (см. § 1.1) $\text{supp } \varphi$ можно покрыть конечным числом шаров $U(x_k; r_k)$, $k=1, 2, \dots, N$ (φ), в которых f обращается в нуль. Возьмем уменьшенные шары $U(x_k; r'_k)$, $r'_k < r_k$, $k=1, 2, \dots, N$, все еще покрывающие $\text{supp } \varphi$ (рис. 18). По следствию из леммы 1 § 5.2 существуют основные функции $h_k(x)$ такие, что

$$h_k(x) = 1, \quad x \in U(x_k; r'_k), \quad \text{supp } h_k \subset U(x_k; r_k).$$

Обозначим

$$h(x) = \sum_{k=1}^N h_k(x), \quad \varphi_k(x) = \varphi(x) \frac{h_k(x)}{h(x)}.$$

По построению $h(x) \geq 1$ в окрестности $\text{supp } \varphi$. Поэтому

$$\varphi_k \in \mathcal{D}(U(x_k; r_k)) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x).$$

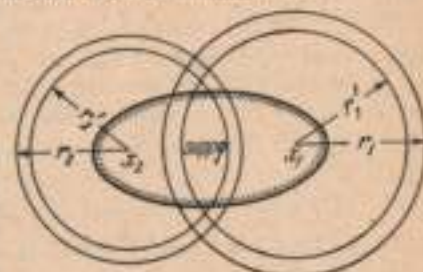


Рис. 18.

Отсюда

$$(f, \varphi) = \left(f, \sum_{k=1}^N \varphi_k \right) = \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) = 0.$$

Лемма доказана.

Пусть $f \in \mathcal{D}'$. Объединение всех окрестностей, где $f=0$, образует открытое множество $\mathcal{O}_f$, которое называется *нулевым множеством* обобщенной функции f . По лемме в каждой области, содержащейся в $\mathcal{O}_f$, $f=0$; далее, $\mathcal{O}_f$ есть наибольшее открытое множество, в котором f обращается в нуль.

Носителем обобщенной функции f называется дополнение $\mathcal{O}_f$ до R^n ; носитель f обозначим $\text{supp } f$, так что $\text{supp } f = R^n \setminus \mathcal{O}_f$; $\text{supp } f$ — замкнутое множество. Если $\text{supp } f$ — ограниченное множество, то обобщенная функция f называется *финитной*.

Из этих определений выводим: а) в любой области, лежащей вне $\text{supp } f$, обобщенная функция f обращается в нуль, т. е.

$$(f, \varphi) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad \text{supp } f \cap \text{supp } \varphi = \emptyset; \quad (10)$$

б) носитель f состоит из тех и только тех точек, ни в какой окрестности которых f не обращается в нуль.

Замечание. Доказанная в этом пункте лемма допускает следующее обобщение. Пусть $f \in \mathcal{D}'$ и G — область в R^n . Тогда f индуцирует линейный функционал f_G на $\mathcal{D}(G)$, действующий по формуле

$$(f_G, \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

Функционал f_G непрерывен на $\mathcal{D}(G)$ в следующем смысле: если $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$ и $\text{supp } \varphi_k \subset G' \in G$, то $(f_G, \varphi_k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Функционал f_G назовем *локальным элементом* обобщенной функции f на G (сужение f на G).

Таким образом, всякая обобщенная функция индуцирует в каждой области свой локальный элемент. Справедливо и обратное: из всякой совокупности согласованных локальных элементов можно «склеить» единую обобщенную функцию. Точнее, справедлива следующая теорема о кусочном склеивании. Пусть семейство областей $\{G_\alpha\}$ покрывает R^n и для каждого α задан линейный непрерывный функционал f_α на $\mathcal{D}(G_\alpha)$, причем если $G_\alpha \cap G_\beta \neq \emptyset$, то $f_\alpha = f_\beta$, $x \in G_\alpha \cap G_\beta$. Тогда существует единственная обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'$, имеющая f_α своими локальными элементами на G_α при всех α .

6. Регулярные обобщенные функции. Простейшим примером обобщенной функции является функционал, поро-

даемый локально интегрируемой в R^n функцией $f(x)$:

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (11)$$

Из свойства линейности интеграла следует линейность этого функционала:

$$\begin{aligned} (f, \lambda\varphi + \mu\psi) &= \int f(x) [\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)] dx \\ &= \lambda \int f(x) \varphi(x) dx + \mu \int f(x) \psi(x) dx = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi), \end{aligned}$$

а из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла следует его непрерывность на $\mathcal{D}$:

$$(f, \varphi_k) = \int_{U_R} f(x) \varphi_k(x) dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

если $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$. Таким образом, функционал (11) определяет обобщенную функцию из $\mathcal{D}'$.

Обобщенные функции, определяемые локально интегрируемыми в R^n функциями по формуле (11), называются *регулярными обобщенными функциями*. Остальные обобщенные функции называются *сингулярными обобщенными функциями*.

Лемма (дю Буа-Реймон). Для того чтобы локально интегрируемая в G функция $f(x)$ обращалась в нуль в области G в смысле обобщенных функций, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = 0$ почти везде в G .

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Докажем его необходимость. Пусть a — произвольная точка области G . Найдется такой замкнутый шар $U(a; \varepsilon)$, который целиком содержится в области G и в котором, следовательно, $f=0$ в смысле § 5.5. Так как при каждом $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ функция

$$\varphi_k(x) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \langle k, x \rangle} \omega_\varepsilon(x - a),$$

где ω_ε — «шапочка» (см. § 5.2), принадлежит $\mathcal{D}(G)$, то

$$(f, \varphi_k) = \int f(x) \omega_\varepsilon(x - a) e^{\frac{i}{\varepsilon} \langle k, x \rangle} dx = 0.$$

Таким образом, все коэффициенты Фурье по тригонометрической системе $\{e^{\frac{i}{\varepsilon} \langle k, x \rangle}\}$ функции $f(x) \omega_\varepsilon(x - a)$, интегрируемой на шаре $U(a; \varepsilon)$, равны нулю. Отсюда сле-

дует*), что эта функция равна нулю почти везде и, стало быть, $f(x) = 0$ почти везде в этом шаре. Так как a — произвольная точка области G , то $f(x) = 0$ почти везде в G . Лемма доказана.

Всякая локально интегрируемая функция в R^n определяет по формуле (11) регулярную обобщенную функцию. Из леммы д-ра Буа-Реймона следует, что всякая регулярная обобщенная функция определяется единственной**) локально интегрируемой в R^n функцией. Следовательно, между локально интегрируемыми в R^n функциями и регулярными обобщенными функциями существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому мы будем отождествлять локально интегрируемую функцию $f(x)$ и порождаемую ею по формуле (11) обобщенную функцию — функционал (f, φ) . В этом смысле «обычные», т. е. локально интегрируемые в R^n , функции являются (регулярными) обобщенными функциями.

Из леммы д-ра Буа-Реймона вытекает также, что оба определения носителя непрерывной функции, данные в § 1.2 и § 5.5, совпадают.

Наконец, отметим, что если последовательность $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, локально интегрируемых функций в R^n сходится равномерно к функции $f(x)$ на каждом компакте, то она сходится к $f(x)$ и в $\mathcal{D}'(R^n)$.

Действительно, для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$(f_k, \varphi) = \int f_k(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int f(x) \varphi(x) dx = (f, \varphi), \quad k \rightarrow \infty.$$

Будем говорить, что обобщенная функция f принадлежит классу $C^p(G)$, $f \in C^p(G)$, если в области G она совпадает с функцией $f_0(x)$ класса $C^p(G)$, т. е. для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$

$$(f, \varphi) = \int f_0(x) \varphi(x) dx.$$

Если к тому же $f_0 \in C^p(G)$, то будем говорить, что f принадлежит классу $C^p(G)$.

7. Сингулярные обобщенные функции. В соответствии с определением, данным в предыдущем пункте, сингулярную обобщенную функцию нельзя отождествить ни с ка-

*) См., например, Г. М. Фихтенгольца [1], т. III, гл. XX и А. Н. Колмогорова и С. В. Фомин [1], гл. VIII.

**) С точностью до значений на множестве меры нуль.

кой локально интегрируемой функцией. Простейшим примером сингулярной обобщенной функции является δ -функция Дирака (см. § 5.1)

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Очевидно, $\delta \in \mathcal{D}'$, $\delta(x) = 0$, $x \neq 0$, так что $\text{supp } \delta = \{0\}$.

Докажем, что $\delta(x)$ — сингулярная обобщенная функция. Пусть, напротив, существует локально интегрируемая в R^n функция $f(x)$ такая, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\int f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (12)$$

Так как $x_1 \varphi(x) \in \mathcal{D}$, если $\varphi \in \mathcal{D}$, то из (12) вытекает

$$\int f(x) x_1 \varphi(x) dx = x_1 \varphi(x) |_{x=0} = 0 = (x_1 f, \varphi)$$

при всех $\varphi \in \mathcal{D}$; здесь x_1 — первая координата x . Таким образом, локально интегрируемая в R^n функция $x_1 f(x)$ равна нулю в смысле обобщенных функций. По лемме д-ра Буа-Реймона, $x_1 f(x) = 0$ почти везде, и, стало быть, $f(x) = 0$ почти везде. Но это противоречит равенству (12). Полученное противоречие и доказывает сингулярность δ -функции.

Пусть $\omega_\varepsilon(x)$ — «шапочка» (см. § 5.2). Докажем, что

$$\omega_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x), \quad \varepsilon \rightarrow +0 \text{ в } \mathcal{D}'. \quad (13)$$

Действительно, по определению сходимости в $\mathcal{D}'$ соотношение (13) эквивалентно равенству

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \omega_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

По непрерывности функции $\varphi(x)$ для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$, коль скоро $|x| < \varepsilon_0$. Отсюда, пользуясь свойствами «шапочки» $\omega_\varepsilon(x)$, при всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ получаем

$$\begin{aligned} \left| \int \omega_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| &\leq \\ &\leq \int \omega_\varepsilon(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx < \eta \int \omega_\varepsilon(x) dx = \eta, \end{aligned}$$

что и утверждалось.

Исходя из вида приближающей последовательности $\omega_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \rightarrow +0$ (рис. 15), обобщенную функцию $\delta(x)$ удобно изображать графически, как это показано на рис. 19.

Обобщением δ -функции является простой слой на поверхности. Пусть S — кусочно-гладкая поверхность и $\mu(x)$ — непрерывная функция, заданная на S . Введем обобщенную функцию $\mu\delta_S$, действующую по правилу

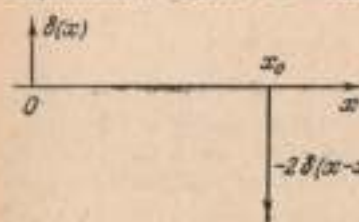


Рис. 19.

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int_S \mu(x) \varphi(x) dS, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Очевидно, $\mu\delta_S \in \mathcal{D}'$; $\mu\delta_S(x) = 0$, $x \notin S$, так что $\text{supp } \mu\delta_S \subset S$. Обобщенная функция $\mu\delta_S$ называется *простым слоем* на поверхности S с плотностью μ .

Замечание. Локально интегрируемые функции и δ -функции описывают распределения (плотности) масс, зарядов, сил и т. д. (см. § 5.1). Поэтому обобщенные функции называются также *распределениями* (distributions, см. Л. Шварц [1, 2]). Если, например, обобщенная функция f есть плотность масс или зарядов, то выражение $(f, 1)$ есть полная масса или заряд соответственно (если f имеет смысл на функции, тождественно равной 1; эта функция не принадлежит $\mathcal{D}$); в частности, $(\delta, 1) = 1$; $(f, 1) = \int f(x) dx$, если f — (абсолютно) интегрируемая функция на R^n .

8. Формулы Сохоцкого. Введем линейный функционал $\mathcal{P} \frac{1}{x}$, действующий по формуле

$$(\mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi) = \text{Vp} \int \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^1).$$

Докажем непрерывность этого функционала на $\mathcal{D}$. Пусть $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$, т. е. $\varphi_k(x) = 0$, $|x| > R$ и $D^m \varphi_k(x) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} |(\mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi_k)| &= |\text{Vp} \int \frac{\varphi_k(x)}{x} dx| = \left| \text{Vp} \int_{-R}^R \frac{\varphi_k(0) + x\varphi_k'(x')}{x} dx \right| \leq \\ &\leq \int_{-R}^R |\varphi_k'(x')| dx \leq 2R \max_{|x| \leq R} |\varphi_k'(x)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{P} \frac{1}{x} \in \mathcal{D}'$.

Обобщенная функция $\mathcal{P} \frac{1}{x}$ совпадает (в смысле § 5.6) с функцией $\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$. Она называется *конечной частью* (partie finie) или *главным значением интеграла* от $\frac{1}{x}$.

Установим теперь равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx = -i\pi\varphi(0) + \text{Vp} \int \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (14)$$

Действительно, если $\varphi(x) = 0$ при $|x| > R$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx = \\ &= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx = \\ &= -2i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arctg \frac{R}{\varepsilon} + \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = \\ &= -i\pi\varphi(0) + \text{Vp} \int \frac{\varphi(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Соотношение (14) означает, что существует предел последовательности $\frac{1}{x + i\varepsilon}$, $\varepsilon \rightarrow +0$ в $\mathcal{D}'$, который мы обозначим $\frac{1}{x + i0}$, и этот предел равен $-i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}$. Итак,

$$\frac{1}{x + i0} = -i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}. \quad (15)$$

Аналогично,

$$\frac{1}{x - i0} = i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}. \quad (15')$$

Формулы (15) и (15') называются *формулами Сохоцкого* ([1], 1873 г.). Они широко используются в квантовой физике.

9. Линейная замена переменных в обобщенных функциях. Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая в R^n функция и $x = Ay + b$, $\det A \neq 0$, — неособенное линейное преобразование пространства R^n на себя. Тогда для любой

$\varphi \in \mathcal{D}$ получим

$$\begin{aligned} (f(Ay+b), \varphi) &= \\ &= \int f(Ay+b) \varphi(y) dy = \frac{1}{|\det A|} \int f(x) \varphi[A^{-1}(x-b)] dx = \\ &= \frac{1}{|\det A|} (f, \varphi[A^{-1}(x-b)]). \end{aligned}$$

Это равенство мы и примем за определение обобщенной функции $f(Ay+b)$ для любой $f(x) \in \mathcal{D}'$:

$$(f(Ay+b), \varphi) = \left(f, \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|} \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (16)$$

Так как операция $\varphi(x) \rightarrow \varphi[A^{-1}(x-b)]$ линейна и непрерывна из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$ (см. § 5.2), то функционал $f(Ay+b)$, определяемый правой частью равенства (16), принадлежит $\mathcal{D}'$.

В частности, если A — вращение, т. е. $A' = A^{-1}$ и $b=0$, то

$$(f(Ay), \varphi) = (f, \varphi(A'x));$$

если A — подобие (с отражением при $c < 0$), $A = cI$, $c \neq 0$, и $b=0$, то

$$(f(cy), \varphi) = \frac{1}{|c^n|} \left(f, \varphi\left(\frac{x}{c}\right) \right);$$

если $A = I$, то

$$(f(y+b), \varphi) = (f, \varphi(x-b)).$$

Обобщенная функция $f(x+b)$ называется *сдвигом* обобщенной функции $f(x)$ на вектор b . Например, $\delta(x-x_0)$ — сдвиг $\delta(x)$ на вектор $-x_0$ — действует по формуле

$$(\delta(x-x_0), \varphi) = (\delta, \varphi(x+x_0)) = \varphi(x_0).$$

Изложенное позволяет определить сферически-симметричные, центрально-симметричные, однородные, периодические, лоренцинвариантные и т. д. обобщенные функции.

Например, обобщенная функция f называется *инвариантной относительно группы Лоренца* (лоренцинвариантной), если $f(Ax) = f(x)$ для всех преобразований A из группы Лоренца (т. е. для всех линейных преобразований A в R^n , сохраняющих квадратичную форму $x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$).

Непосредственно из определения (16) вытекает, что операция линейной замены переменных линейна и непрерывна из $\mathcal{D}'$ в $\mathcal{D}'$:

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(Ay+b) &= \lambda f(Ay+b) + \mu g(Ay+b), \quad f, g \in \mathcal{D}'; \\ f_k(Ay+b) &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}', \text{ если } f_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}'. \end{aligned}$$

10. Умножение обобщенных функций. Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая в R^n функция и $a(x) \in C^\infty(R^n)$. Тогда для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ справедливо равенство

$$(af, \varphi) = \int a(x) f(x) \varphi(x) dx = (f, a\varphi).$$

Это равенство мы и примем за определение произведения af обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'$ с бесконечно дифференцируемой функцией a :

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (17)$$

Так как операция умножения на функцию $a \in C^\infty(R^n)$ линейна и непрерывна из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$ (см. § 5.2), то функционал af , определяемый правой частью равенства (17), принадлежит $\mathcal{D}'$.

Из определения (17) вытекает, что операция умножения на функцию $a \in C^\infty(R^n)$ линейна и непрерывна из $\mathcal{D}'$ в $\mathcal{D}'$:

$$\begin{aligned} a(\lambda f + \mu g) &= \lambda(af) + \mu(ag), \quad f, g \in \mathcal{D}'; \\ af_k &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}', \text{ если } f_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}'. \end{aligned}$$

Если $f \in \mathcal{D}'$, то справедливо равенство

$$f = \eta f, \quad (18)$$

где η — любая функция класса $C^\infty(R^n)$, равная 1 в окрестности носителя f .

Действительно, для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ носители f и $(1-\eta)\varphi$ не имеют общих точек, а потому, в силу (10),

$$(f - \eta f, \varphi) = (f, (1-\eta)\varphi) = 0.$$

Примеры:

$$a) \quad a(x) \delta(x) = a(0) \delta(x),$$

так как при всех $\varphi \in \mathcal{D}$

$$(a\delta, \varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0) \varphi(0) = (a(0) \delta, \varphi).$$

$$b) \quad x \mathcal{D} \frac{1}{x} = 1,$$

так как при всех $\varphi \in \mathcal{D}(R^1)$

$$\left(x\mathcal{D}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \left(\mathcal{D}\frac{1}{x}, x\varphi\right) = \text{Vp} \int \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \int \varphi(x) dx = (1, \varphi).$$

Возникает вопрос: нельзя ли определить произведение любых обобщенных функций так, чтобы это произведение опять было обобщенной функцией? Для локально интегрируемых функций их произведение не обязано быть таковым (например, $(|x|^{-1/2})^2 = |x|^{-1}$ в R^1). Подобное имеет место и для обобщенных функций: Л. Шварцем показано, что такое произведение, которое было бы ассоциативно и коммутативно, определить нельзя. Действительно, если бы оно существовало, то, пользуясь примерами а) и б), мы имели бы противоречивую цепочку равенств:

$$0 = 0\mathcal{D}\frac{1}{x} = (x\delta(x))\mathcal{D}\frac{1}{x} = (\delta(x)x)\mathcal{D}\frac{1}{x} = \delta(x)(x\mathcal{D}\frac{1}{x}) = \delta(x).$$

Чтобы определить однозначно произведение обобщенных функций f и g , достаточно, чтобы они обладали, грубо говоря, свойствами: насколько f «нерегулярна» в окрестности (произвольной) точки, настолько g должна быть «регулярной» в этой окрестности, и наоборот. Например, естественно считать $\delta(x-a)\delta(x-b) = 0$, если $a \neq b$; $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$, если функция $a(x)$ непрерывна в окрестности точки 0.

11. Упражнения. а) Доказать, что функции

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}, \quad \frac{1}{\pi\epsilon} \sin \frac{x}{\epsilon}, \quad \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}, \quad \frac{\epsilon}{\pi x^3} \sin^2 \frac{x}{\epsilon}$$

стремятся к $\delta(x)$ при $\epsilon \rightarrow +0$.

б) Доказать предельные соотношения при $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \frac{e^{ixt}}{x-i0} &\rightarrow 2\pi i\delta(x), & \frac{e^{-ixt}}{x-i0} &\rightarrow 0, \\ \frac{e^{ixt}}{x+i0} &\rightarrow 0, & \frac{e^{-ixt}}{x+i0} &\rightarrow -2\pi i\delta(x), & m e^{ixt} &\rightarrow 0, \quad m \geq 0, \\ (f(t) e^{ixt}) &\rightarrow i\delta(x). \end{aligned}$$

в) Доказать, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x-k)$$

сходится в $\mathcal{D}'$ при любых a_k .

а) Доказать, что $\delta_{SR}(x) \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'$.

б) Доказать, что $\mathcal{D}\frac{\cos kx}{x} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'(R^1)$, где

$$\left(\mathcal{D}\frac{\cos kx}{x}, \varphi\right) = \text{Vp} \int \frac{\cos kx}{x} \varphi(x) dx.$$

в) Пусть $\alpha \in \mathcal{D}'(R^n)$, $\alpha \geq 0$, $\int \alpha(x) dx = 1$. Доказать, что

$$\epsilon^{-n} \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \rightarrow \delta(x), \quad \epsilon \rightarrow +0 \text{ в } \mathcal{D}'.$$

г) Доказать равенство

$$\begin{aligned} (af)(x+h) &= a(x+h)f(x+h), & a &\in C^\infty(R^n), \\ f &\in \mathcal{D}', & h &\in R^n. \end{aligned}$$

д) Пусть f — финитная обобщенная функция в R^1 и η — произвольная функция из $\mathcal{D}(R^1)$, равная 1 в окрестности $\text{supp } f$. Положим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(f(x'), \frac{\eta(x')}{x'-z} \right), \quad z = x + iy.$$

Доказать, что: 1) $F(z)$ не зависит от выбора вспомогательной функции η ; 2) $F(z)$ — аналитическая функция при $z \in \text{supp } f$; 3) $F(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$, $z \rightarrow \infty$; 4) $F(x+ix) - F(x-ix) \rightarrow f(x)$, $x \rightarrow +0$ в $\mathcal{D}'(R^1)$;

5) $\widehat{f^{(k)}}(z) = \widehat{f}^{(k)}(z)$, $k=1, 2, \dots$

Функция $F(z)$ называется *представлением Коши обобщенной функции f^** .

§ 6. Дифференцирование обобщенных функций

Обобщенные функции обладают рядом удобных свойств. Например, при надлежащем обобщении понятия производной любая обобщенная функция оказывается бесконечно дифференцируемой, сходящиеся ряды из обобщенных функций можно почленно дифференцировать бесконечное число раз.

1. Производные обобщенной функции. Пусть $f \in \mathcal{D}'(R^n)$. Тогда при всех α , $|\alpha| \leq p$, и $\varphi \in \mathcal{D}$ справедлива формула интегрирования по частям

$$\begin{aligned} (D^\alpha f, \varphi) &= \int D^\alpha f(x) \varphi(x) dx = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi). \end{aligned}$$

* См. Г. Вейерман [1], ч. II.

Это равенство мы и примем за определение (обобщенной) производной $D^\alpha f$ обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'$:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^\alpha (f, D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (1)$$

Проверим, что $D^\alpha f \in \mathcal{D}'$. Действительно, поскольку $f \in \mathcal{D}'$, то функционал $D^\alpha f$, определяемый правой частью равенства (1), линейный:

$$\begin{aligned} (D^\alpha f, \lambda\varphi + \mu\psi) &= (-1)^\alpha (f, D^\alpha (\lambda\varphi + \mu\psi)) = \\ &= (-1)^\alpha (f, \lambda D^\alpha \varphi + \mu D^\alpha \psi) = \lambda (-1)^\alpha (f, D^\alpha \varphi) + \\ &+ \mu (-1)^\alpha (f, D^\alpha \psi) = \lambda (D^\alpha f, \varphi) + \mu (D^\alpha f, \psi), \end{aligned}$$

и непрерывный:

$$(D^\alpha f, \varphi_k) = (-1)^\alpha (f, D^\alpha \varphi_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

ибо если $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$, то и $D^\alpha \varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$ (см. § 5.2).

В частности, при $f = \delta$ равенство (1) принимает вид

$$(D^\alpha \delta, \varphi) = (-1)^\alpha D^\alpha \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Обозначим $\{D^\alpha f(x)\}$ классическую производную (там, где она существует). Из определения обобщенной производной вытекает, что если обобщенная функция $f \in C^p(G)$, то

$$D^\alpha f = \{D^\alpha f(x)\}, \quad x \in G, \quad |\alpha| \leq p$$

(в смысле определений §§ 5.5 и 5.6).

2. Свойства обобщенных производных. Справедливы следующие свойства операции дифференцирования обобщенных функций.

а) Операция дифференцирования D^α линейна и непрерывна из $\mathcal{D}'$ в $\mathcal{D}'$:

$$D^\alpha (\lambda f + \mu g) = \lambda D^\alpha f + \mu D^\alpha g, \quad f, g \in \mathcal{D}';$$

$$D^\alpha f_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}', \text{ если } f_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}'.$$

Докажем непрерывность. По определению производной при всех $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$(D^\alpha f_k, \varphi) = (-1)^\alpha (f_k, D^\alpha \varphi) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

что и означает, что $D^\alpha f_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'$ (см. § 5.3). Линейность доказывается аналогично.

В частности, если $\omega_\varepsilon(x)$ — «шапочка» (см. § 5.2), то

$$D^\alpha \omega_\varepsilon(x) \rightarrow D^\alpha \delta(x), \quad \varepsilon \rightarrow +0 \text{ в } \mathcal{D}'. \quad (2)$$

Соотношение (2) вытекает из соотношения (13) § 5.7.

Например, $\omega_\varepsilon(x) \rightarrow \delta'(x)$, $\varepsilon \rightarrow +0$ в $\mathcal{D}'$. Последовательность $\omega_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \rightarrow +0$, изображена на рис. 20. Поэтому

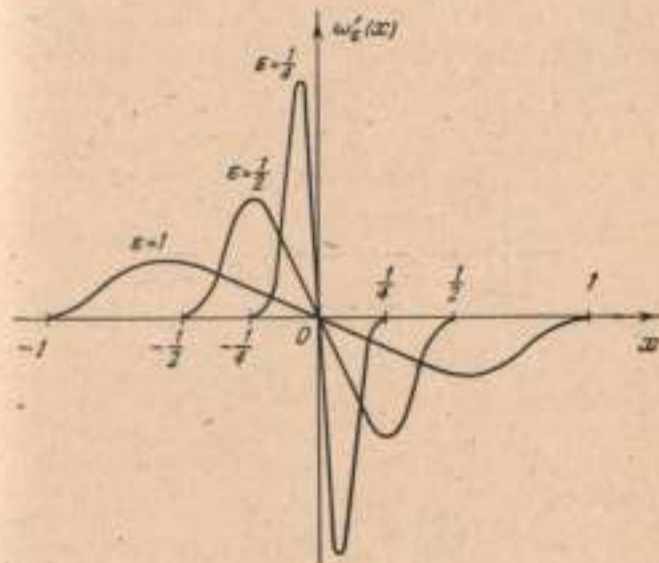


Рис. 20.

обобщенную функцию $\delta'(x)$ удобно изображать графически, как это показано на рис. 21.

б) Любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема.

Действительно, если $f \in \mathcal{D}'$, то $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'$; в свою очередь $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \in \mathcal{D}'$ и т. д.

с) Результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования. Например:

$$D_1(D_2 f) = D_2(D_1 f) = D^{(1,1)} f, \quad f \in \mathcal{D}'. \quad (3)$$

В самом деле, для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ получаем

$$(D^{(1,1)} f, \varphi) = (f, D_1 D_2 \varphi) = (D_1 (D_2 f), \varphi) = (D_2 (D_1 f), \varphi),$$

откуда и вытекают равенства (3) (см. § 5.5).

И вообще

$$D^{\alpha+\beta} f = D^{\alpha} (D^{\beta} f) = D^{\beta} (D^{\alpha} f). \quad (4)$$

д) Если $f \in \mathcal{D}'$ и $a \in C^{\infty}(R^n)$, то справедлива формула Лейбница для дифференцирования произведения af (см. § 5.10).

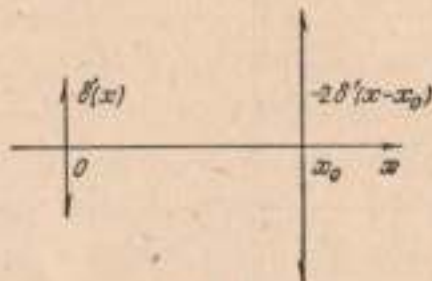


Рис. 21.

Например:

$$\frac{\partial (af)}{\partial x_1} = \frac{\partial a}{\partial x_1} f + a \frac{\partial f}{\partial x_1}. \quad (5)$$

Действительно, если φ — любая основная функция, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial (af)}{\partial x_1}, \varphi \right) &= - \left(af, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = - \left(f, a \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = \\ &= - \left(f, \frac{\partial (a\varphi)}{\partial x_1} - \frac{\partial a}{\partial x_1} \varphi \right) = - \left(f, \frac{\partial (a\varphi)}{\partial x_1} \right) + \left(f, \frac{\partial a}{\partial x_1} \varphi \right) = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, a\varphi \right) + \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi \right) = \left(a \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right) + \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi \right) = \\ &= \left(a \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi \right), \end{aligned}$$

откуда и вытекает равенство (5) (см. § 5.5).

е) Если обобщенная функция $f=0$, $x \in G$, то и $D^{\alpha} f=0$, $x \in G$, так что $\text{supp } D^{\alpha} f \subset \text{supp } f$.

В самом деле, если $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, то $D^{\alpha} \varphi \in \mathcal{D}(G)$, а потому

$$(D^{\alpha} f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^{\alpha} \varphi) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G),$$

что и означает $D^{\alpha} f=0$, $x \in G$ (см. § 5.5).

г) Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x),$$

составленный из локально интегрируемых функций $u_k(x)$, сходится равномерно на каждом компакте, то его можно почленно дифференцировать любое число раз и полученные ряды будут сходиться в $\mathcal{D}'$.

В самом деле, поскольку при любом $R>0$

$$S_p(x) = \sum_{k=1}^p u_k(x) \xrightarrow{|x| \leq R} S(x), \quad p \rightarrow \infty,$$

то $S_p \rightarrow S$, $p \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'$ (см. § 5.6). Но тогда, в силу а),

$$D^{\alpha} S_p = \sum_{k=1}^p D^{\alpha} u_k \rightarrow D^{\alpha} S, \quad p \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}',$$

что и утверждалось.

Отсюда, в частности, вытекает: если

$$|a_k| \leq A |k|^m + B, \quad (6)$$

то тригонометрический ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} \quad (7)$$

сходится в $\mathcal{D}'(R^1)$.

Действительно, в силу (6) ряд

$$\frac{a_0 x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx}$$

сходится равномерно в R^1 ; следовательно, ряд, представляющий его производную порядка $m+2$, сходится в $\mathcal{D}'(R^1)$ и совпадает с рядом (7).

3. Первообразная обобщенной функции. В этом пункте считаем $\alpha=1$. Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет

(единственную с точностью до аддитивной постоянной) первообразную $f^{(-1)}(x)$,

$$f^{(-1)}(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi + C, \quad f^{(-1)'}(x) = f(x).$$

Равенство $f^{(-1)'} = f$ мы и примем за исходное для определения первообразной произвольной обобщенной функции f .

Обобщенная функция $f^{(-1)}$ из $\mathcal{D}'(R^1)$ называется *первообразной обобщенной функции* f из $\mathcal{D}'(R^1)$, если $f^{(-1)'} = f$, т. е.

$$(f^{(-1)}, \varphi') = -(f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (8)$$

Равенство (8) показывает, что функционал $f^{(-1)}$ задан не на всех основных функциях, а только на их первых производных. Наша задача — продолжить этот функционал на все $\mathcal{D}$ (в смысле определения § 1.10), причем так, чтобы продолженный функционал $f^{(-1)}$ был линейным и непрерывным на $\mathcal{D}$, и выяснить степень произвола при таком продолжении.

Предположим сперва, что $f^{(-1)}$ — первообразная f — существует. Построим ее. Пусть φ — произвольная функция из $\mathcal{D}(R^1)$. Представим ее в виде

$$\varphi(x) = \varphi'(x) + \omega_\varepsilon(x) \int \varphi(\xi) d\xi, \quad (9)$$

где $\omega_\varepsilon(x)$ — «шапочка» (см. § 5.2) и

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x [\varphi(x') - \omega_\varepsilon(x') \int \varphi(\xi) d\xi] dx'. \quad (10)$$

Докажем, что $\varphi \in \mathcal{D}$. Действительно, $\varphi \in C^\infty(R^1)$ и $\varphi(x) = 0$, $x < -\max(R, \varepsilon)$, если $\varphi(x) = 0$, $|x| > R$. Далее, при $x > \max(R, \varepsilon)$

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x') dx' - \int_{-\infty}^x \omega_\varepsilon(x') dx' \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi = 0$$

в силу нормировки (3) § 5.2. Таким образом, $\varphi(x) = 0$, $|x| > \max(R, \varepsilon)$. Следовательно, $\varphi \in \mathcal{D}$.

Применяя функционал $f^{(-1)}$ к равенству (9), получим

$$(f^{(-1)}, \varphi) = (f^{(-1)}, \varphi') + (f^{(-1)}, \omega_\varepsilon) \int \varphi(\xi) d\xi,$$

т. е., учитывая (8),

$$(f^{(-1)}, \varphi) = -(f, \varphi) + C \int \varphi(\xi) d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad (11)$$

где обозначено $C = (f^{(-1)}, \omega_\varepsilon)$. Итак, если $f^{(-1)}$ — первообразная f — существует, то она выражается равенством (11), где φ определена формулой (10).

Теперь докажем обратное: при *любой* постоянной C функционал $f^{(-1)}$, определенный равенствами (11) и (10), дает первообразную f .

Действительно, функционал $f^{(-1)}$, очевидно, линейен. Докажем его непрерывность на $\mathcal{D}$. Пусть $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$, т. е. $\varphi_k(x) = 0$, $|x| > R$ и $\varphi_k^{(n)}(x) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. А тогда, по доказанному,

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= \int_{-\infty}^x [\varphi_k(x') - \omega_\varepsilon(x') \int \varphi_k(\xi) d\xi] dx' = 0, \\ |x| &> \max(R, \varepsilon), \end{aligned}$$

и, очевидно, $\varphi_k^{(n)}(x) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, т. е. $\psi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$. Поэтому, в силу непрерывности f на $\mathcal{D}$, имеем

$$(f^{(-1)}, \varphi_k) = -(f, \varphi_k) + C \int \varphi_k(\xi) d\xi \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

что и утверждалось. Следовательно, $f^{(-1)} \in \mathcal{D}'$. Осталось проверить, что $f^{(-1)}$ является первообразной f . В самом деле, заменив в (10) φ на φ' и учитывая, что $\int \varphi'(\xi) d\xi = 0$, получим $\psi = \varphi$, и тогда из (11) вытекает равенство (8), что и требовалось. Таким образом, доказана следующая

Теорема. Любая обобщенная функция f имеет единственную, с точностью до аддитивной постоянной, первообразную, и всякая ее первообразная $f^{(-1)}$ выражается формулой

$$(f^{(-1)}, \varphi) = -(f, \varphi) + (C, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad (12)$$

где φ определяется равенством (10) и C — произвольная постоянная.

Доказанная теорема утверждает, что решение дифференциального уравнения

$$u' = f, \quad f \in \mathcal{D}'(R^1), \quad (13)$$

существует в $\mathcal{D}'(R^1)$ и его общее решение имеет вид $u = f^{(-1)} + C$, где $f^{(-1)}$ — некоторая первообразная f и C — произвольная постоянная. В частности, если f — непрерывная функция, то всякое решение в $\mathcal{D}'$ уравнения (13) — классическое. Например, общее решение уравнений $u' = 0$ в $\mathcal{D}'$ есть произвольная постоянная.



Рис. 22.

Аналогично определяется и первообразная $f^{(-n)}$ порядка n обобщенной функции f , $f^{(-n)}(x) = f$. Применяя доказанную теорему к рекуррентной цепочке для $f^{(-k)}$ — первообразных порядка k , —

$$f^{(-1)'} = f, \\ f^{(-2)'} = f^{(-1)}, \dots, f^{(-n)'} = f^{(-n+1)},$$

закключаем, что $f^{(-n)}$ существует и единственна с точностью до произвольного аддитивного полинома степени $n-1$.

4. Примеры, $n=1$.

а) Вычислим плотность зарядов, соответствующих диполю с электрическим моментом $+1$ в точке $x=0$ на прямой.

Этому диполю приближенно соответствует плотность зарядов $\frac{1}{\varepsilon} \delta(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \delta(x)$, $\varepsilon > 0$ (рис. 22). Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ в $\mathcal{D}'$:

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} \delta(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \delta(x), \varphi \right) = \\ = \frac{1}{\varepsilon} [\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)] \rightarrow \varphi'(0) = (\delta, \varphi') = -(\delta', \varphi),$$

закключаем, что искомая плотность равна $-\delta'(x)$.

Проверим, что полный заряд диполя равен 0:

$$(-\delta'_\varepsilon, 1) = (\delta, 1') = (\delta, 0) = 0,$$

а его момент равен 1:

$$(-\delta'_\varepsilon, x) = (\delta, x') = (\delta, 1) = 1.$$

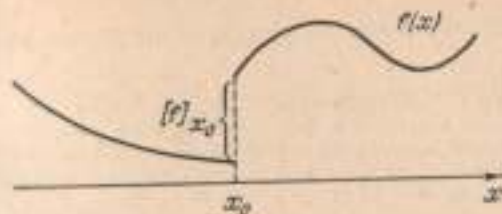


Рис. 23.

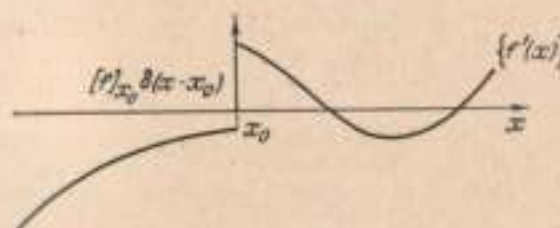


Рис. 24.

б) Пусть функция $f(x)$ такова, что $f \in C^1(x \leq x_0)$ и $f \in C^1(x \geq x_0)$ (рис. 23). Покажем, что (рис. 24)

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x_0} \delta(x-x_0), \quad (14)$$

где $[f]_{x_0}$ — скачок $f(x)$ в точке x_0 :

$$[f]_{x_0} = f(x_0+0) - f(x_0-0).$$

Действительно, если $\varphi \in \mathcal{D}$, то

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int f(x) \varphi'(x) dx = \\ = -[f(x_0+0) - f(x_0-0)] \varphi(x_0) + \int \{f'(x)\} \varphi(x) dx = \\ = ([f]_{x_0} \delta(x-x_0) + \{f'(x)\}, \varphi).$$

В частности, если θ — функция Хевисайда:

$$\theta(x) = 1, \quad x > 0; \quad \theta(x) = 0, \quad x \leq 0,$$

то

$$\theta'(x) = \delta(x). \quad (15)$$

В теории электрических цепей функция Хевисайда называется «единичной ступенькой», а δ -функция — «единичным импульсом». Формула (15) утверждает, что «еди-

ничный импульс» есть производная от «единичной ступеньки».

Замечание. Первообразная δ -функции есть $\delta(x) + C$, где C — произвольная постоянная (см. § 6.3). Таким образом, $\delta(x)$ восстанавливается как первообразная своей обобщенной производной $\delta(x)$; с другой стороны, $\delta(x)$ не восстанавливается как первообразная своей классической производной $[\delta'(x)] = 0, x \neq 0$.

с) Если же функция $f(x)$ имеет изолированные разрывы 1-го рода в точках $\{x_k\}$ и $\{f'(x)\}$ — кусочно-непрерывная функция на R^1 , то формула (14) естественно обобщается:

$$f' = \{f'(x)\} + \sum_k [f]_k \delta(x - x_k). \quad (16)$$

Формулу (16) удобно получать локально, в окрестности каждой точки x_k , с использованием формулы (14) и теоремы «о кусочном склеивании» (см. замечание § 5.5).

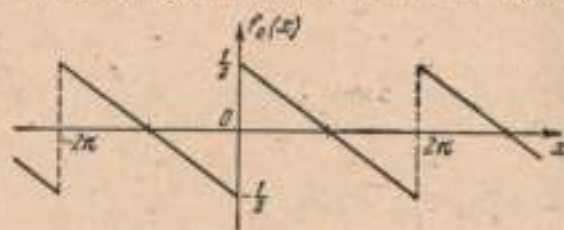


Рис. 25.

В частности, если

$$f_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}, \quad x \in [0, 2\pi),$$

— 2π -периодическая функция (рис. 25), то

$$f'_0 = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi). \quad (17)$$

Мы видим, таким образом, что обобщенные и классические производные, вообще говоря, не совпадают!

д) Докажем формулу

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi). \quad (18)$$

Для этого разложим 2π -периодическую функцию

$$\int_0^x f_0(x') dx' = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi}, \quad x \in [0, 2\pi)$$

(функция f_0 определена в § 6.4, с)) в равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$\int_0^x f_0(x') dx' = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} e^{ikx}.$$

В силу результатов § 6.2, б) этот ряд можно почленно дифференцировать в $\mathcal{D}'$ любое число раз. Дифференцируя его дважды и учитывая (17), получим

$$f'_0 = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq 0} e^{ikx},$$

что и требовалось.

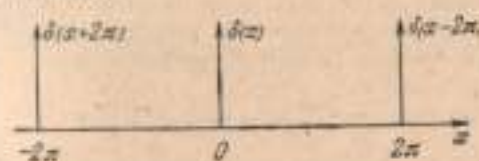


Рис. 26.

Отметим, что левая часть равенства (18) есть ряд Фурье 2π -периодической обобщенной функции $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi)$, график которой изображен на рис. 26.

е) Покажем, что общее решение уравнения

$$x^n u = 0 \quad (19)$$

в $\mathcal{D}'(R^1)$ дается формулой

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(x), \quad (20)$$

где c_k — произвольные постоянные.

Поскольку при всех $\varphi \in \mathcal{D}$ и $k=0, 1, \dots, m-1$

$$(x^m \delta^{(k)}, \varphi) = (\delta^{(k)}, x^m \varphi) = (-1)^k (\delta, (x^m \varphi)^{(k)}) = (-1)^k (x^m \varphi)^{(k)}|_{x=0} = 0,$$

то

$$x^m \delta^{(k)}(x) = 0, \quad k=0, 1, \dots, m-1,$$

и, следовательно, обобщенная функция (20) удовлетворяет уравнению (19).

Докажем, что формула (20) дает общее решение в $\mathcal{D}'$ этого уравнения. Пусть $\eta(x)$ — основная функция, равная 1 в окрестности точки $x=0$. (По лемме 1 § 5.2 такая функция существует.) Тогда любая функция φ из $\mathcal{D}$ представляется в виде

$$\varphi(x) = \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^m \psi(x), \quad (21)$$

где

$$\psi(x) = \frac{1}{x^m} \left[\varphi(x) - \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right].$$

Функция $\psi \in \mathcal{D}$, так как она финитна и бесконечно дифференцируема: бесконечная дифференцируемость ее в точке $x=0$ следует из формулы Тейлора

$$\psi(x) = \sum_{k=m}^N \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} x^{k-m} + O(|x|^{N+1}),$$

справедливой в некоторой окрестности (где $\eta=1$) точки 0 при всех $N \geq m$.

Следовательно, если $u \in \mathcal{D}'$ — решение уравнения (19), то, в силу (21),

$$\begin{aligned} (u, \varphi) &= \left(u, \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) + (u, x^m \psi(x)) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} (u, \eta(x) x^k) + (x^m u, \psi) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k c_k \varphi^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k (\delta^{(k)}, \varphi), \\ c_k &= \frac{(-1)^k}{k!} (u, \eta x^k), \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

Замечание. Полученный результат непосредственно следует из более общего утверждения о том, что всякая обобщенная функция, у которой носитель есть точка, представляется в виде линейной комбинации δ -функции и ее производных в этой точке (см. § 8.4). Отметим, что в классе локально интегрируемых функций уравнение (19) имеет единственное решение $u=0$.



Рис. 27.

г) Проверим, что функция $\delta(t) = \theta(t) Z(t)$, где $Z(t)$ есть решение однородного дифференциального уравнения

$$LZ = Z^{(m)} + a_1(t) Z^{(m-1)} + \dots + a_m(t) Z = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$Z(0) = Z'(0) = \dots = Z^{(m-2)}(0) = 0, \quad Z^{(m-1)}(0) = 1,$$

удовлетворяет уравнению $L\delta = \delta(t)$.

Действительно, пользуясь формулой (14), получаем

$$\begin{aligned} \delta'(t) &= \theta(t) Z'(t), \quad \dots, \quad \delta^{(m-1)}(t) = \theta(t) Z^{(m-1)}(t), \\ \delta^{(m)}(t) &= \delta(t) + \theta(t) Z^{(m)}(t), \end{aligned}$$

откуда

$$L\delta = \theta(t) LZ + \delta(t) = \delta(t),$$

что и утверждалось.

б. Примеры, $n \geq 2$.

а) Обобщением $-\delta'(x)$ является двойной слой на поверхности. Пусть S — кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность, n — нормаль к S (рис. 27) и $v(x)$ — непрерывная функция, заданная на S . Введем обобщенную функцию $-\frac{\partial}{\partial n}(v\delta_S)$, действующую по правилу

$$\left(-\frac{\partial}{\partial n}(v\delta_S), \varphi \right) = \int_S v(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} dS, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Очевидно,

$$-\frac{\partial}{\partial n}(v\delta_S) \in \mathcal{D}', \quad \text{supp} \left[-\frac{\partial}{\partial n}(v\delta_S) \right] \subset S.$$

Обобщенная функция $-\frac{\partial}{\partial n}(v\delta_S)$ называется двойным слоем на поверхности S с плотностью $v(x)$, ориентированным

по нормали n . Эта обобщенная функция описывает плотность зарядов, соответствующую распределению диполей на поверхности S с поверхностной плотностью момента $v(x)$ и ориентированных вдоль заданного направления нормали n на S (ср. § 6.4, а)).

б) Пусть область G имеет кусочно-гладкую границу S и функция $f \in C^1(\bar{G}) \cap C^1(\bar{G}_1)$, где $G_1 = R^n \setminus \bar{G}$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S \cos(n x_i) \delta_S, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (22)$$

где $n = n_x$ — внешняя нормаль к S в точке $x \in S$ и $[f]_S$ — скачок функций f при переходе извне через поверхность S :

$$\lim_{x' \rightarrow x, x' \in G_1} f(x') - \lim_{x' \rightarrow x, x' \in G} f(x') = [f]_S(x), \quad x \in S.$$

Для получения формулы (22) воспользуемся формулой Грина и определением простого слоя (см. § 5.7):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right) &= - \left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = - \int f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx = \\ &= \int \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right\} \varphi(x) dx + \int_S [f]_S(x) \cos(n x_i) \varphi(x) dS = \\ &= \left(\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S \cos(n x_i) \delta_S, \varphi \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

с) Пусть в условиях примера б) функция $f \in C^2(\bar{G}) \cap C^2(\bar{G}_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} ([f]_S \cos(n x_i) \delta_S) + \\ &+ \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} \right]_S \cos(n x_i) \delta_S. \quad (23) \end{aligned}$$

Для получения формулы (23) продифференцируем равенство (22) по x_j и при дифференцировании функции $\left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right\}$ воспользуемся опять формулой (22):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\} + \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} \right]_S \cos(n x_i) \delta_S.$$

Полагая в (23) $i = j$ и суммируя по $i = 1, 2, \dots, n$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta f &= \{\Delta f\} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} ([f]_S \cos(n x_i) \delta_S) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right]_S \cos(n x_i) \delta_S. \quad (24) \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенства

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} ([f]_S \cos(n x_i) \delta_S) = \frac{\partial}{\partial n} ([f]_S \delta_S), \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right]_S \cos(n x_i) \delta_S = \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_S, \quad (26)$$

перепишем формулу (24) в виде

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial n} ([f]_S \delta_S). \quad (27)$$

Докажем формулу (25). При всех $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} ([f]_S \cos(n x_i) \delta_S), \varphi \right) &= - \sum_{i=1}^n \left([f]_S \cos(n x_i) \delta_S, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_S [f]_S \cos(n x_i) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dS = - \int_S [f]_S \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cos(n x_i) dS = \\ &= - \int_S [f]_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \left(\frac{\partial}{\partial n} ([f]_S \delta_S), \varphi \right). \end{aligned}$$

Формула (26) устанавливается аналогично.

Полагая в формуле (27) $f = 0$, $x \in G_1$, получим

$$\Delta f = \{\Delta f\} - \frac{\partial f}{\partial n} \delta_S - \frac{\partial}{\partial n} (f \delta_S). \quad (28)$$

Это есть вторая формула Грина, записанная в терминах обобщенных функций. Применяя обе части равенства (28) к основной функции φ , получим эту формулу в обычной

записи:

$$\int_G (f \Delta \varphi - \varphi \Delta f) dx = \int_S \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS. \quad (29)$$

Если G — ограниченная область, то формула (29) справедлива для всех $\varphi \in C^2(\bar{G})$.

д) Пусть $n=2$. Вычислим $\Delta \ln|x|$. Функция $\ln|x|$ локально интегрируема в R^2 . Если $x \neq 0$, то $\ln|x| \in C^2$, а поэтому $D^2 \ln|x| = \{D^2 \ln|x|\}$ (см. § 6.1). Следовательно, переходя к полярным координатам (см. (15) § 3.2), получаем

$$\Delta \ln|x| = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \ln r}{\partial r} \right) = 0, \quad x \neq 0. \quad (30)$$

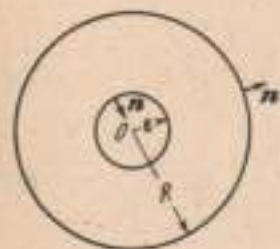


Рис. 28.

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$, $\text{supp } \varphi \subset U_R$. Тогда $(\Delta \ln|x|, \varphi) = (\ln|x|, \Delta \varphi) = \int_R \ln|x| \Delta \varphi(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < R} \ln|x| \Delta \varphi(x) dx$.

Применяя формулу (29) при $f = \ln|x|$ и $G = \{\epsilon < |x| < R\}$ (рис. 28) и учитывая (30), получим, далее

$$\begin{aligned} (\Delta \ln|x|, \varphi) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon < |x| < R} \Delta \ln|x| \varphi dx + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{S_\epsilon} + \int_{S_R} \right) \left(\ln|x| \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \ln|x|}{\partial n} \right) dS \right] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left(-\ln|x| \frac{\partial \varphi}{\partial |x|} + \varphi \frac{1}{|x|} \right) dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{S_\epsilon} \varphi dS = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\epsilon} \int_{S_\epsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)] dS + 2\pi \varphi(0) \right\} = 2\pi \varphi(0) = (2\pi \delta, \varphi). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta \ln|x| = 2\pi \delta(x), \quad n=2. \quad (31)$$

Аналогично при $n \geq 3$ получим

$$\Delta \frac{1}{|x|^{n-2}} = -(n-2) \sigma_n \delta(x), \quad (32)$$

где σ_n — площадь поверхности единичной сферы в R^n :

$$\sigma_n = \int_{S_1} ds = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

Γ — эйлеров интеграл (гамма-функция):

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

е) Проверим, что функции

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad \mathcal{E}^*(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|} \quad (33)$$

при $n=3$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta \mathcal{E} + k^2 \mathcal{E} = \delta(x). \quad (34)$$

Действительно, так как функции $\cos k|x|$ и $|x|^{-1} \sin k|x|$ бесконечно дифференцируемы, то при дифференцировании функции $|x|^{-1} e^{ik|x|}$ можно пользоваться формулой Лейбница (см. § 6.2, d)). Учитывая равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x|} &= -\frac{x_j}{|x|^3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} e^{ik|x|} = \frac{ikx_j}{|x|} e^{ik|x|}, \\ \Delta e^{ik|x|} &= \left(\frac{2ik}{|x|} - k^2 \right) e^{ik|x|} \end{aligned}$$

и пользуясь формулой (32) при $n=3$, получаем

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) \frac{1}{|x|} e^{ik|x|} &= \\ &= e^{ik|x|} \Delta \frac{1}{|x|} + 2 \left(\text{grad } e^{ik|x|}, \text{grad } \frac{1}{|x|} \right) + \\ &+ \frac{1}{|x|} \Delta e^{ik|x|} + \frac{k^2}{|x|} e^{ik|x|} = -4\pi e^{ik|x|} \delta(x) + \\ &+ \left(-\frac{2ik}{|x|^2} + \frac{2ik}{|x|^2} - \frac{k^2}{|x|} + \frac{k^2}{|x|} \right) e^{ik|x|} = -4\pi \delta(x), \end{aligned}$$

что и утверждалось.

г) Пусть

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^{n/2} t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\pi t}}.$$

Докажем, что

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathcal{E} = \delta(x, t). \quad (35)$$

Функция $\mathcal{E}(x, t)$ локально интегрируема в R^{n+1} , поскольку $\mathcal{E} = 0$, $t < 0$; $\mathcal{E} \geq 0$, $t \geq 0$ и при $t > 0$.

$$\begin{aligned} \int \mathcal{E}(x, t) dx &= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} dx = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_i^2}{4a^2 t}} dx_i = 1. \end{aligned} \quad (36)$$

Если $t > 0$, то $\mathcal{E} \in C^\infty$, а поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= \left(\frac{|x|^2}{4a^2 t^2} - \frac{n}{2t} \right) \mathcal{E}, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{2at} \mathcal{E}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x_i^2} = \left(\frac{x_i^2}{4a^2 t^2} - \frac{1}{2at} \right) \mathcal{E}, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathcal{E} &= \left(\frac{|x|^2}{4a^2 t^2} - \frac{n}{2t} \right) \mathcal{E} - \left(\frac{|x|^2}{4a^2 t^2} - \frac{n}{2t} \right) \mathcal{E} = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+1})$. Учитывая равенство (37), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathcal{E}, \varphi \right) &= - \left(\mathcal{E}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi \right) = \\ &= - \int_0^\infty \int \mathcal{E}(x, t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi \right) dx dt = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \int \mathcal{E}(x, t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi \right) dx dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int \mathcal{E}(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) dx + \int_0^\infty \int \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathcal{E} \right) \varphi dx dt \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{E}(x, \varepsilon) \varphi(x, 0) dx + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{E}(x, \varepsilon) [\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)] dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{E}(x, \varepsilon) \varphi(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (38)$$

так как, в силу (36),

$$\left| \int \mathcal{E}(x, \varepsilon) [\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)] dx \right| \leq K\varepsilon \int \mathcal{E}(x, \varepsilon) dx = K\varepsilon.$$

Докажем теперь соотношение

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \rightarrow \delta(x), \quad t \rightarrow +0 \text{ в } \mathcal{D}'(R^n). \quad (39)$$

Действительно, пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}$. Тогда, учитывая, что

$$\begin{aligned} \left| \int \mathcal{E}(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| &\leq \frac{K}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} |x| dx = \\ &= \frac{K a_n}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} r^n dr = \frac{2K a_n \sqrt{ta}}{\pi^{n/2}} \int_0^\infty e^{-u^2} u^n du = C\sqrt{t} \end{aligned}$$

в силу (36), получаем при $t \rightarrow +0$ соотношение (39):

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}(x, t), \varphi) &= \int \mathcal{E}(x, t) \varphi(x) dx = \varphi(0) \int \mathcal{E}(x, t) dx + \\ &+ \int \mathcal{E}(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \rightarrow \varphi(0) = (\delta, \varphi). \end{aligned}$$

Формула (35) следует из соотношений (38) и (39). Отметим, что предельное соотношение (39) справедливо и на ограниченных функциях, непрерывных в точке 0.

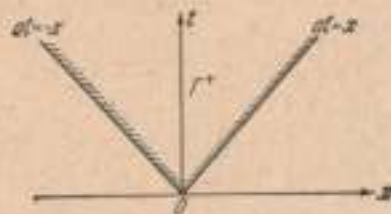


Рис. 29.

г) Пусть $x = x_1$ и

$$\mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|),$$

Докажем, что

$$\square_a \mathcal{E}_1 = \delta(x, t). \quad (40)$$

Функция $\mathcal{E}_1$ локально интегрируема в R^2 и обращается в нуль вне замыкания конуса будущего Γ^+ (рис. 29).

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Тогда

$$\begin{aligned} (\square_a \delta_1, \varphi) &= (\delta_1, \square_a \varphi) = \int \delta_1(x, t) \square_a \varphi(x, t) dx dt = \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{|x|}{a}}^{\frac{|x|}{a}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt dx - \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx dt = \\ &= -\frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(x, \frac{|x|}{a} \right) dx - \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial \varphi(at, t)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(-at, t)}{\partial x} \right] dt = \\ &= -\frac{1}{2a} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(x, \frac{|x|}{a} \right) dx - \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(at, t)}{\partial x} dt - \\ &\quad - \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(-x, \frac{|x|}{a} \right) dx + \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(-at, t)}{\partial x} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial \varphi(at, t)}{\partial t} + a \frac{\partial \varphi(at, t)}{\partial x} \right] dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial \varphi(-at, t)}{\partial t} - a \frac{\partial \varphi(-at, t)}{\partial x} \right] dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\varphi(at, t)}{dt} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\varphi(-at, t)}{dx} = \\ &= -\frac{1}{2} \varphi(0, 0) + \frac{1}{2} \varphi(0, 0) = (\delta, \varphi), \end{aligned}$$

что и доказывает равенство (40).

б) Пусть δ_s — простой слой на сфере $|x| = r$ (см. § 5.7). Установим справедливость соотношения (формула Пишетти)

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \delta_s, -\delta \right) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \Delta \delta, \quad r \rightarrow 0 \text{ в } \mathcal{D}'. \quad (41)$$

Действительно, при всех $\varphi \in \mathcal{D}$ при $r \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \delta_s, -\frac{1}{r^2} \delta, \varphi \right) &= \\ &= -\frac{1}{\sigma_n r^{n+1}} \int_{S_r} \varphi(x) dS - \frac{\varphi(0)}{r^2} = \frac{1}{\sigma_n r^2} \int_{S_r} [\varphi(rs) - \varphi(0)] ds = \\ &= \frac{1}{\sigma_n r^2} \int_{S_r} \left[r \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_k} s_k + \frac{r^2}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_k \partial x_l} s_k s_l + O(r^3) \right] ds \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \Delta \varphi(0) = \frac{1}{2\pi} (\Delta \delta, \varphi), \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \int_{S_1} s_k ds &= 0, \quad \int_{S_1} s_k s_l ds = \delta_{kl} \int_{S_1} s_k^2 ds = \frac{\sigma_n}{n} \delta_{kl}, \\ \int_{S_1} s_k^2 ds &= \sigma_{n-1} \int_0^{\pi} \sin^{n-2} \theta \cos^2 \theta d\theta = \sigma_{n-1} \int_0^1 (1-\mu)^{\frac{n-3}{2}} \mu d\mu = \\ &= \sigma_{n-1} B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)} = \frac{\sigma_n}{n}. \end{aligned}$$

Здесь B — эйлеров интеграл (бета-функция):

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

г) Пусть $n=2$, $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, $dz=dx+i dy$. Дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

называется оператором Коши — Римана. Пусть $f \in C^1(G)$ и $f(x, y)=0$, $z \in G_1$, где $G_1 = R^2 \setminus G$.

Границу S области G предполагаем кусочно-гладкой линией; за положительное направление на S принимаем то направление, при движении по которому область G остается слева, как это принято в ТФКП (рис. 30). Используя

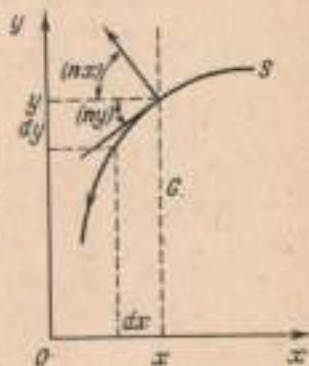


Рис. 30.

формулу (22), выводим

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{i}{2} [\cos(nx) + i \cos(ny)] \delta_z. \quad (42)$$

Применяя обе части равенства (42) к основной функции φ , получаем формулу, аналогичную формуле (29):

$$\begin{aligned} \int_G \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \varphi \right) dx dy &= \frac{1}{2} \int_S f \varphi [\cos(nx) + i \cos(ny)] dS = \\ &= \frac{1}{2} \int_S f \varphi (dy - i dx) = -\frac{i}{2} \int_S f \varphi dz, \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_G \frac{\partial}{\partial z} (f \varphi) dx dy = -\frac{i}{2} \int_S f \varphi dz. \quad (43)$$

б) Докажем, что

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z} = \pi \delta(x, y). \quad (44)$$

Функция $\frac{1}{z}$ локально интегрируема в R^2 . Поэтому, пользуясь формулой (43) при $f = \frac{1}{z}$ и $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ (рис. 28), при всех $\varphi \in \mathcal{D}$, $\text{supp } \varphi \subset U_R$, получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z}, \varphi \right) &= - \left(\frac{1}{z}, \frac{\partial}{\partial z} \varphi \right) = \\ &= - \int_{U_R} \frac{1}{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx dy = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |z| < R} \frac{1}{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx dy = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon < |z| < R} \varphi \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z} dx dy + \frac{i}{2} \left(\int_{S_R} - \int_{S_\varepsilon} \right) \frac{\varphi}{z} dz \right] = \\ &= -\frac{i}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z|=\varepsilon} \varphi(z) \frac{dz}{z} = -\frac{i}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon e^{i\theta}) d\theta = \\ &= \pi \varphi(0) = (\pi \delta, \varphi), \end{aligned}$$

что и требовалось.

6. Упражнения. а) Доказать, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln|x| &= \mathcal{D}' \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} \mathcal{D}' \frac{1}{x} = -\mathcal{D}' \frac{1}{x^2}, \\ \frac{d}{dx} \frac{1}{x \pm i0} &= \mp i \pi \delta(x) - \mathcal{D}' \frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

где

$$\left(\mathcal{D}' \frac{1}{x^2}, \varphi \right) = \text{V.P.} \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx.$$

б) Показать, что следующие справа обобщенные функции являются общими решениями в $\mathcal{D}'(R^1)$ уравнений:

$$\begin{aligned} xu' &= 1, & u &= c_1 + c_2 \delta(x) + \ln|x|, \\ xu' &= \mathcal{D}' \frac{1}{x}, & u &= c_1 + c_2 \delta(x) - \mathcal{D}' \frac{1}{x}, \\ x^2 u' &= 1, & u &= c_1 + c_2 \delta(x) + c_3 \delta'(x) - \mathcal{D}' \frac{1}{x}, \\ xu &= \sin x, & u &= c \delta(x) + \mathcal{D}' \frac{1}{|x|}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}' \frac{1}{|x|}, \varphi \right) &= \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx, \\ (\sin x) u &= 0, \quad u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(x - k\pi). \end{aligned}$$

Обратим внимание, что классические решения дифференциальных уравнений первого порядка содержат лишь одну произвольную постоянную!

с) Доказать равенство

$$a(x) \delta'(x) = -a'(0) \delta(x) + a(0) \delta'(x), \quad a \in C^1(R^1).$$

д) Доказать: если $f \in \mathcal{D}'$ и $f(x) = 0$, $x < x_0$, то существует единственная первообразная f^{-1} , обращающаяся в нуль при $x < x_0$.

е) Доказать равенство

$$(D^\alpha f)(x+h) = D^\alpha f(x+h), \quad f \in \mathcal{D}', \quad h \in R^n.$$

ж) Доказать: если обобщенная функция инвариантна относительно всех сдвигов, то она — постоянная.

з) Доказать, что система обобщенных функций $D^\alpha \delta(x)$, $|\alpha| = m$, $m = 0, 1, \dots$, линейно независима.

и) Доказать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta^{(k)}(x-k)$$

сходится в $\mathcal{D}'$ при любых α_k .

л) Доказать, что общее решение в $\mathcal{D}'$ уравнения $x^m u^{(m)} = 0$, $m > 1$, есть

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta(x) x^{m-1-k} + \sum_{k=m}^{\infty} c_k \delta^{(k-m)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} d_k x^k,$$

где c_k и d_k — произвольные постоянные.

§ 7. Прямое произведение и свертка обобщенных функций

1. **Определение прямого произведения.** Пусть $f(x)$ и $g(y)$ — локально интегрируемые функции в пространствах R^n и R^m соответственно. Функция $f(x)g(y)$ также будет локально интегрируемой в R^{n+m} . Она определяет (регулярную) обобщенную функцию, действующую на основные функции $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}$ по формулам

$$\begin{aligned} (f(x)g(y), \varphi) &= \int f(x)g(y)\varphi(x, y) dx dy = \\ &= \int f(x) \int g(y)\varphi(x, y) dy dx = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g(y)f(x), \varphi) &= \int g(y)f(x)\varphi(x, y) dx dy = \\ &= \int g(y) \int f(x)\varphi(x, y) dx dy = (g(y), (f(x), \varphi(x, y))). \quad (1') \end{aligned}$$

Эти равенства выражают теорему Фубини (см. § 1.4, б)) о совпадении повторных интегралов с кратным. Равенство (1) мы и примем за определение прямого произведения $f(x) \cdot g(y)$ обобщенных функций $f(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$ и $g(y) \in \mathcal{D}'(R^m)$:

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m}). \quad (2)$$

Проверим, что это определение корректно, т. е. что правая часть равенства (2) определяет линейный непрерывный функционал на $\mathcal{D}(R^{n+m})$.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Для любых $g \in \mathcal{D}'(R^m)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ функция $\psi(x) = (g(y), \varphi(x, y))$ принадлежит $\mathcal{D}(R^n)$, причем при всех α

$$D^\alpha \psi(x) = (g(y), D_x^\alpha \varphi(x, y)). \quad (3)$$

Далее, если $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}(R^{n+m})$, то

$$\psi_k(x) = (g(y), \varphi_k(x, y)) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}(R^n).$$

Доказательство. Так как при каждом $x \in R^n$ $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(R^m)$, то функция $\psi(x)$ определена в R^n . Докажем, что она непрерывна в R^n . Фиксируем точку x , и пусть $x_k \rightarrow x$, $k \rightarrow \infty$. Тогда

$$\varphi(x_k, y) \rightarrow \varphi(x, y), \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}(R^m), \quad (4)$$

так как, в силу $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$, носители $\varphi(x_k, y)$ ограничены в R^m независимо от k (рис. 31) и при всех β

$$D_\beta^\beta \varphi(x_k, y) \xrightarrow{\beta \in R^m} D_\beta^\beta \varphi(x, y), \quad k \rightarrow \infty.$$

Поскольку функционал $g(y)$ непрерывен на $\mathcal{D}(R^m)$, то из (4) вытекает непрерывность функции $\psi(x)$ в точке x : $\psi(x_k) = (g(y), \varphi(x_k, y)) \rightarrow (g(y), \varphi(x, y)) = \psi(x)$, $x_k \rightarrow x$.

Докажем теперь формулу (3). Фиксируем точку x и обозначим $h_i = (0, \dots, h, \dots, 0)$. Тогда

$$\chi_h^{(i)}(y) = \frac{1}{h} [\varphi(x + h_i, y) - \varphi(x, y)] \rightarrow \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_i}, \quad (5)$$

$$h \rightarrow 0 \text{ в } \mathcal{D}(R^m),$$

так как, в силу $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$, носители $\chi_h^{(i)}$ ограничены в R^m независимо от h и при всех β

$$D^\beta \chi_h^{(i)}(y) = \frac{1}{h} [D_\beta^\beta \varphi(x + h_i, y) - D_\beta^\beta \varphi(x, y)] \xrightarrow{\beta \in R^m} D_\beta^\beta \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_i},$$

$$h \rightarrow 0.$$

Поскольку $g \in \mathcal{D}'(R^m)$, то, пользуясь (5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x + h_i) - \psi(x)}{h} &= \frac{1}{h} [(g(y), \varphi(x + h_i, y)) - (g(y), \varphi(x, y))] = \\ &= (g(y), \frac{\varphi(x + h_i, y) - \varphi(x, y)}{h}) = (g(y), \chi_h^{(i)}) \rightarrow (g(y), \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_i}), \\ &h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

откуда и вытекает справедливость формулы (3) при $\alpha = (0, \dots, 1, \dots, 0)$:

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} = (g(y), \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_i}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Применяя снова эти рассуждения к полученной формуле, убеждаемся в справедливости формулы (3) при всех α . Так как, вместе с φ , $D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$, то из формулы (3) заключаем по доказанному, что $D^\alpha \psi(x)$ — непрерывная функция в R^n при всех α . Таким образом, $\psi \in C^\infty(R^n)$. Далее, функция $\psi(x)$ финитна в R^n , ибо $\varphi(x, y) = 0, |x| > R$

(рис. 31), а потому $\psi(x) = (g, 0) = 0$ при этих x . Следовательно, $\psi \in \mathcal{D}(R^n)$.

Пусть $\psi_k(x, y) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}(R^{n+m})$. Докажем, что $\psi_k(x) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}(R^n)$. Так как носители $\psi_k(x, y)$ ограничены в R^{n+m} независимо от k , то, как мы видели выше, носители $\psi_k(x)$ также ограничены в R^n независимо от k . Поэтому осталось доказать, что при всех α

$$D^\alpha \psi_k(x) \xrightarrow{x \in R^n} 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Пусть это не так. Тогда найдутся такие число $\varepsilon_0 > 0$, индекс α_0 и последовательность точек x_k , что

$$|D^{\alpha_0} \psi_k(x_k)| \geq \varepsilon_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Так как носители ψ_k ограничены в R^n независимо от k , то из (6) следует, что последовательность x_k , $k = 1, 2, \dots$, также ограничена в R^n . Поэтому по теореме Больцано — Вейерштрасса (см. § 1.1) из нее мож-

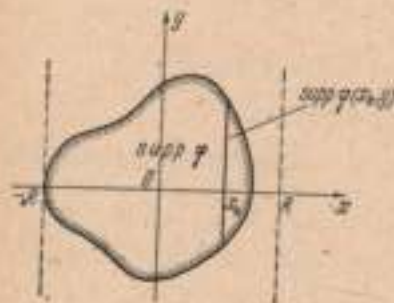


Рис. 31.

но выбрать сходящуюся подпоследовательность $x_{k_l} \rightarrow x_0$, $l \rightarrow \infty$. Но тогда

$$D^{\alpha_0} \psi_{k_l}(x_{k_l}, y) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}(R^n).$$

Отсюда, в силу непрерывности функционала g на $\mathcal{D}(R^m)$, из формулы (3) получаем

$$D^{\alpha_0} \psi_{k_l}(x_{k_l}) = (g(y), D^{\alpha_0} \psi_{k_l}(x_{k_l}, y)) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty,$$

что противоречит неравенствам (6). Лемма доказана.

Вернемся к определению прямого произведения. По только что доказанной лемме $\psi(x) = (g(y), \varphi(x, y)) \in \mathcal{D}(R^n)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$. Следовательно, правая часть равенства (2), равная (f, ψ) , имеет смысл для любых обобщенных функций f и g и, таким образом, определяет функционал на $\mathcal{D}(R^{n+m})$. Далее, из линейности функционалов f и g следует линейность этого функционала.

Докажем, что построенный функционал непрерывен на $\mathcal{D}(R^{n+m})$. Пусть $\psi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}(R^{n+m})$. Тогда по лемме

$$(g(y), \varphi_k(x, y)) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}(R^n),$$

а потому, в силу непрерывности функционала f на $\mathcal{D}(R^n)$, $(f(x), (g(y), \varphi_k(x, y))) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, что и означает непрерывность линейного функционала, стоящего в правой части равенства (2).

Таким образом, функционал $f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$, т. е. является обобщенной функцией.

2. Коммутативность прямого произведения. Пусть даны обобщенные функции $f \in \mathcal{D}'(R^n)$ и $g \in \mathcal{D}'(R^m)$. Наряду с прямым произведением $f(x) \cdot g(y)$, в соответствии с формулой (2), определяется прямое произведение $g(y) \cdot f(x)$:

$$(g(y) \cdot f(x), \varphi) = (g(y), (f(x), \varphi(x, y))), \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m}). \quad (2')$$

Оказывается, что

$$f(x) \cdot g(y) = g(y) \cdot f(x), \quad (7)$$

т. е. операция прямого произведения коммутативна.

Действительно, на основных функциях $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ вида

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^N u_i(x) v_i(y), \quad u_i \in \mathcal{D}(R^n), \quad v_i \in \mathcal{D}(R^m), \quad (8)$$

равенство (7) вытекает из определений (2) и (2'):

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(y), \varphi) &= \left(f, \sum_{i=1}^N u_i(g, v_i) \right) = \sum_{i=1}^N (f, u_i)(g, v_i) = \\ &= \left(g, \sum_{i=1}^N v_i(f, u_i) \right) = (g(y) \cdot f(x), \varphi). \end{aligned}$$

Чтобы распространить равенство (7) на любые основные функции, докажем лемму о том, что множество основных функций вида (8) плотно в $\mathcal{D}(R^{n+m})$ (ср. § 1.7).

Лемма. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ существует последовательность основных функций $\varphi_k(x, y)$, $k = 1, 2, \dots$, вида (8), сходящаяся к $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$.

Доказательство. Пусть носитель $\varphi(x, y)$ содержится в шаре U_R (рис. 32). По теореме Вейерштрасса

(см. § 1.3) существуют полиномы $P_k(x, y)$, $k=1, 2, \dots$ такие, что

$$|D^\alpha \varphi - D^\alpha P_k| < \frac{1}{k} \text{ при всех } |\alpha| \leq k \text{ и } |x|^2 + |y|^2 \leq 8R^2. \quad (9)$$

Пусть $e(x)$ и $h(y)$ — основные функции, равные 1 в шаре радиуса R и 0 вне шара радиуса $2R$ (по лемме 1 § 5.2 такие функции существуют). Тогда последовательность основных функций

$$\varphi_k(x, y) = e(x) h(y) P_k(x, y), \quad k=1, 2, \dots,$$

обладает требуемыми свойствами. Действительно, φ_k имеют вид (8), их носители содержатся в шаре $|x|^2 + |y|^2 \leq 8R^2$ и, в силу (9), при любых α и $k \geq |\alpha|$

$$\begin{aligned} |D^\alpha \varphi - D^\alpha \varphi_k| &= \\ &= |D^\alpha \varphi - D^\alpha (ehP_k)| \leq \frac{C_\alpha}{k}, \\ |x|^2 + |y|^2 &\leq 8R^2, \end{aligned}$$

где C_α — некоторые числа, не зависящие от k . Это значит, что $\varphi_k \rightarrow \varphi$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'(R^{n+m})$. Лемма доказана.

Пусть φ — произвольная основная функция из $\mathcal{D}'(R^{n+m})$. В силу доказанной леммы существует последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ основных функций вида (8), сходящаяся к φ в $\mathcal{D}'(R^{n+m})$. Отсюда, пользуясь непрерывностью на $\mathcal{D}'(R^{n+m})$ функционалов $f(x) \cdot g(y)$ и $g(y) \cdot f(x)$ (см. § 7.1) и доказанным равенством (7) на функциях вида (8), получим равенство (7) и в общем случае:

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(y), \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \varphi_k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (g(y) \cdot f(x), \varphi_k) = (g(y) \cdot f(x), \varphi). \end{aligned}$$

3. Дальнейшие свойства прямого произведения.

а) Операция прямого произведения $f(x) \cdot g(y)$ линейна и непрерывна относительно f (из $\mathcal{D}'(R^n)$ в $\mathcal{D}'(R^{n+m})$) и

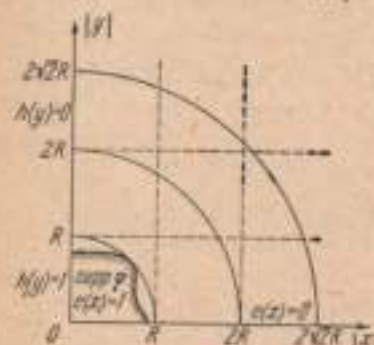


Рис. 32.

относительно g (из $\mathcal{D}'(R^m)$ в $\mathcal{D}'(R^{n+m})$), например:

$$[\lambda f(x) + \mu f_1(x)] \cdot g(y) = \lambda [f(x) \cdot g(y)] + \mu [f_1(x) \cdot g(y)],$$

$$f, f_1 \in \mathcal{D}'(R^n), \quad g \in \mathcal{D}'(R^m);$$

$$f_k(x) \cdot g(y) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}'(R^{n+m}),$$

$$\text{если } f_k \rightarrow 0 \text{ в } \mathcal{D}'(R^n).$$

Докажем непрерывность. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$. По лемме § 7.1 $\psi(x) = (g(y), \varphi(x, y)) \in \mathcal{D}'(R^n)$. Поэтому, пользуясь определением (2) прямого произведения, получаем

$$(f_k(x) \cdot g(y), \varphi) = (f_k(x), (g(y), \varphi(x, y))) =$$

$$= (f_k, \psi) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

что и требовалось.

б) Ассоциативность прямого произведения: если $f \in \mathcal{D}'(R^n)$, $g \in \mathcal{D}'(R^m)$ и $h \in \mathcal{D}'(R^p)$, то

$$f(x) \cdot [g(y) \cdot h(z)] = [f(x) \cdot g(y)] \cdot h(z). \quad (10)$$

Действительно, если $\varphi \in \mathcal{D}'(R^{n+m+p})$, то

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot [g(y) \cdot h(z)], \varphi) &= (f(x), (g(y) \cdot h(z), \varphi)) = \\ &= (f(x), (g(y), (h(z), \varphi))) = \\ &= (f(x) \cdot g(y), (h(z), \varphi)) = ([f(x) \cdot g(y)] \cdot h(z), \varphi). \end{aligned}$$

с) Дифференцирование прямого произведения:

$$D_x^\alpha [f(x) \cdot g(y)] = D_x^\alpha f(x) \cdot g(y). \quad (11)$$

В самом деле, если $\varphi \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$, то (см. § 6.1)

$$\begin{aligned} (D_x^\alpha [f(x) \cdot g(y)], \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} (f(x) \cdot g(y), D_x^\alpha \varphi) = \\ &= (-1)^{|\alpha|} (g(y), (f(x), D_x^\alpha \varphi(x, y))) = \\ &= (g(y), (D_x^\alpha f(x), \varphi)) = (D_x^\alpha f(x) \cdot g(y), \varphi). \end{aligned}$$

д) Умножение прямого произведения: если $a \in C^\infty(R^n)$, то

$$a(x) [f(x) \cdot g(y)] = a(x) f(x) \cdot g(y). \quad (12)$$

Действительно, если $\varphi \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$, то (см. § 5.10)

$$\begin{aligned} (a(x) [f(x) \cdot g(y)], \varphi) &= (f(x) \cdot g(y), a\varphi) = \\ &= (f(x), (g(y), a\varphi(x, y))) = (f(x), a(x) (g(y), \varphi(x, y))) = \\ &= (a(x) f(x), (g(y), \varphi(x, y))) = (a(x) f(x) \cdot g(y), \varphi). \end{aligned}$$

е) Сдвиг прямого произведения:

$$(f \cdot g)(x+h, y) = f(x+h) \cdot g(y). \quad (13)$$

В самом деле, если $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$, то (см. § 5.9)

$$\begin{aligned} ((f \cdot g)(x+h, y), \varphi) &= (f(x) \cdot g(y), \varphi(x-h, y)) = \\ &= (g(y), (f(x), \varphi(x-h, y))) = \\ &= (g(y), (f(x+h), \varphi(x, y))) = (f(x+h) \cdot g(y), \varphi). \end{aligned}$$

г) Говорят, что обобщенная функция вида $f(x) \cdot 1(y)$ не зависит от y . Она действует по правилу: если $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$, то

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot 1(y), \varphi) &= (f(x), \int \varphi(x, y) dy) = (1(y) \cdot f(x), \varphi) = \\ &= \int (f(x), \varphi(x, y)) dy. \end{aligned}$$

Таким образом, получено равенство

$$(f(x), \int \varphi(x, y) dy) = \int (f(x), \varphi(x, y)) dy, \quad (14)$$

справедливое для всех $f \in \mathcal{D}'(R^n)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$.

4. Свертка обобщенных функций. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — локально интегрируемые функции в R^n , причем функция

$$h(x) = \int |g(y) f(x-y)| dy$$

также локально интегрируема в R^n . Сверткой $f * g$ этих функций называется функция

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int f(y) g(x-y) dy = \\ &= \int g(y) f(x-y) dy = (g * f)(x). \quad (15) \end{aligned}$$

Отметим, что свертки $f * g$ и $|f| * |g| = h$ существуют одновременно и удовлетворяют неравенству $|(f * g)(x)| \leq h(x)$ (при почти всех x), так что свертка $f * g$ оказывается также локально интегрируемой функцией в R^n (см. § 1.4, б)). Поэтому она определяет (регулярную) обобщенную функцию, действующую на основные функции $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ по правилу:

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \\ &= \int (f * g)(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int \left[\int g(y) f(\xi-y) dy \right] \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \int g(y) \left[\int f(\xi-y) \varphi(\xi) d\xi \right] dy = \\ &= \int g(y) \left[\int f(x) \varphi(x+y) dx \right] dy \end{aligned}$$

(в силу теоремы Фубини, см. § 1.4, б)), т. е.

$$(f * g, \varphi) = \int f(x) g(y) \varphi(x+y) dx dy, \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^n). \quad (16)$$

Отметим три случая, когда условие локальной интегрируемости функции $h(x)$ выполнено и, стало быть, свертка $f * g$ существует и определяется формулой (15).

1) Одна из функций f или g финитна, например $\text{supp } g \subset U_{R_1}$:

$$\begin{aligned} \int_{U_R} h(x) dx &= \int_{U_{R_1}} |g(y)| \int_{U_R} |f(x-y)| dx dy \leq \\ &\leq \int_{U_{R_1}} |g(y)| dy \int_{U_{R+R_1}} |f(\xi)| d\xi < \infty. \end{aligned}$$

2) Функции f и g обращаются в нуль при $x < 0$ ($n=1$):

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R h(x) dx &= \int_0^R \int_0^x |g(y)| |f(x-y)| dy dx = \\ &= \int_0^R |g(y)| \int_y^R |f(x-y)| dx dy \leq \int_0^R |g(y)| dy \int_0^R |f(\xi)| d\xi < \infty. \end{aligned}$$

3) Функции f и g интегрируемы на R^n :

$$\begin{aligned} \int h(x) dx &= \int |g(y)| \int |f(x-y)| dx dy = \\ &= \int |g(y)| dy \int |f(\xi)| d\xi < \infty, \end{aligned}$$

так что в этом случае свертка $f * g$ интегрируема на R^n .

Будем говорить, что последовательность $\{\eta_k\}$ основных функций из $\mathcal{D}(R^n)$ сходится к 1 в R^n , если:

а) для любого компакта K найдется такой номер N , что $\eta_k(x) = 1$ при всех $x \in K$ и $k \geq N$; б) функции $\{\eta_k\}$ равномерно ограничены в R^n вместе со всеми производными, $|D^\alpha \eta_k(x)| \leq C_\alpha$, $x \in R^n$, $k=1, 2, \dots$, α — любое. Возможный график функций последовательности $\eta_k(x)$, $k=1, 2, \dots$, при $n=1$ изображен на рис. 33.

Отметим, что такие последовательности всегда существуют, например: $\eta_k(x) = \eta\left(\frac{x}{k}\right)$, где $\eta \in \mathcal{D}$, $\eta(x) = 1$ в U_1 .

Докажем, что равенство (16) можно переписать в виде

$$(f * g, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) g(y), \eta_k(x, y) \varphi(x+y)), \quad (16')$$

$$\varphi \in \mathcal{D}(R^n),$$

где $\eta_k(x; y)$, $k=1, 2, \dots$, — любая последовательность, сходящаяся к 1 в R^{2n} .



Рис. 33.

Действительно, по доказанному функция

$$c_0 |f(x)g(y)\varphi(x+y)|$$

интегрируема на R^{2n} и

$$|f(x)g(y)\eta_k(x; y)\varphi(x+y)| \leq c_0 |f(x)g(y)\varphi(x+y)|,$$

$$k=1, 2, \dots$$

Палее,

$$|f(x)g(y)\eta_k(x; y)\varphi(x+y) - f(x)g(y)\varphi(x+y)| \rightarrow 0$$

$$k \rightarrow \infty \text{ почти везде в } R^{2n}.$$

Применяя теорему Лебега (см. § 1.4, i)), получим равенство

$$\int f(x)g(y)\varphi(x+y) dx dy =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int f(x)g(y)\eta_k(x; y)\varphi(x+y) dx dy,$$

что, в силу (15), эквивалентно равенству (16').

Исходя из равенств (16) и (16'), примем следующее определение свертки. Пусть пара обобщенных функций f и g из $\mathcal{D}'(R^n)$ такова, что их прямое произведение $f(x) \cdot g(y)$ допускает продолжение (см. § 1.10) $(f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y))$ на функции вида $\varphi(x+y)$, где φ — любая функция из $\mathcal{D}(R^n)$, в следующем смысле: какова бы ни была последовательность $\{\eta_k\}$ функций из $\mathcal{D}(R^{2n})$, сходящаяся к 1 в R^{2n} , существует предел числовой последовательности

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f(x)g(y)\eta_k(x; y)\varphi(x+y) = (f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y))$$

и этот предел не зависит от последовательности $\{\eta_k\}$. Отметим, что при каждом k функция $\eta_k(x; y)\varphi(x+y)$ принадлежит $\mathcal{D}(R^{2n})$, так что наша числовая последовательность определена.

Сверткой $f * g$ называется функционал

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int f(x)g(y)\eta_k(x; y)\varphi(x+y) dx dy, \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^n). \quad (17)$$

Докажем, что функционал $f * g$ принадлежит $\mathcal{D}'(R^n)$, т. е. является обобщенной функцией. Для этого, в силу полноты пространства $\mathcal{D}'(R^n)$ (см. § 5.4), достаточно установить непрерывность линейных функционалов

$$(f(x) \cdot g(y), \eta_k(x; y)\varphi(x+y)), \quad k=1, 2, \dots, \quad (18)$$

на $\mathcal{D}(R^n)$. Пусть $\varphi_v \rightarrow 0$, $v \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}(R^n)$. Тогда

$$\eta_k(x; y)\varphi_v(x+y) \rightarrow 0, \quad v \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}(R^{2n}),$$

поскольку $\eta_k \in \mathcal{D}(R^{2n})$. Отсюда, в силу непрерывности функционала $f(x) \cdot g(y)$ на $\mathcal{D}(R^{2n})$ (см. § 7.1), получаем

$$(f(x) \cdot g(y), \eta_k(x; y)\varphi_v(x+y)) \rightarrow 0, \quad v \rightarrow \infty,$$

что доказывает непрерывность функционалов (18) на $\mathcal{D}(R^n)$.

Заметим, что, поскольку $\varphi(x+y)$ не принадлежит $\mathcal{D}(R^{2n})$ (она не финитна в R^{2n} !), правая часть равенства (17) существует не для любых пар обобщенных функций f и g , и, таким образом, свертка существует не всегда.

Пример. Свертка любой обобщенной функции f с δ -функцией существует и равна f .

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

Действительно, пусть $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ и $\{\eta_k\}$ — любая последовательность функций из $\mathcal{D}(R^{2n})$, сходящаяся к 1 в R^{2n} . Тогда $\eta_k(x; 0)\varphi(x) \rightarrow \varphi(x)$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}(R^n)$, и поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f(x) \cdot \delta(y) \eta_k(x; y) \varphi(x+y) dx dy =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int f(x) \eta_k(x; 0) \varphi(x) dx = (f, \varphi).$$

Отсюда, в силу определения (17), следует, что свертки $f * \delta$ и $\delta * f$ существуют и равны f , что и утверждалось.

Замечание. Смысл формулы $f = f * \delta$ состоит в том, что всякую обобщенную функцию f можно разложить по δ -функциям, что формально часто записывают так:

$$f(x) = \int f(\xi) \delta(x - \xi) d\xi.$$

Именно эту формулу и имеют в виду, когда говорят, что всякое материальное тело состоит из точечных масс, всякий источник состоит из точечных источников и т. д.

5. Свойства свертки.

а) *Линейность свертки.* Свертка $f * g$ — линейная операция из $\mathcal{D}'$ в $\mathcal{D}'$ относительно f и g в отдельности, например:

$$(\lambda f + \mu f_1) * g = \lambda(f * g) + \mu(f_1 * g), \quad f, f_1, g \in \mathcal{D}',$$

при условии, что свертки $f * g$ и $f_1 * g$ существуют.

Это свойство свертки непосредственно следует из определения (17) и из линейности прямого произведения $f(x) \cdot g(y)$ относительно f и g в отдельности (см. § 7.3, а)).

Отметим попутно, что свертка $f * g$, вообще говоря, не является непрерывной операцией из $\mathcal{D}'$ в $\mathcal{D}'$ относительно f или g , например: $\delta(x-k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'(R^1)$, но

$$1 * \delta(x-k) = 1 \not\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}'(R^1).$$

б) *Коммутативность свертки.* Если свертка $f * g$ существует, то существует и свертка $g * f$ и они равны:

$$f * g = g * f. \quad (19)$$

Это утверждение вытекает из определения свертки и из коммутативности прямого произведения (см. § 7.2):

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x; y) \varphi(x+y)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (g(y) \cdot f(x), \eta_k(x; y) \varphi(x+y)) = (g * f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

в) *Дифференцирование свертки.* Если свертка $f * g$ существует, то существуют свертки $D^\alpha f * g$ и $f * D^\alpha g$, причем

$$D^\alpha f * g = D^\alpha (f * g) = f * D^\alpha g. \quad (20)$$

Это утверждение достаточно доказать для каждой первой производной $D_j, j=1, 2, \dots, n$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ и $\eta_k(x; y), k=1, 2, \dots$, — произвольная последовательность функций из $\mathcal{D}(R^{2n})$, сходящаяся к 1 в R^{2n} . Тогда последовательность $\eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}, k=1, 2, \dots$, функций из $\mathcal{D}(R^{2n})$ также сходится к 1 в R^{2n} . Отсюда, пользуясь

существованием свертки $f * g$ (см. § 7.4), получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} (D_j(f * g), \varphi) &= -(f * g, D_j \varphi) = \\ &= -\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x; y) \frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_j}) = \\ &= -\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \frac{\partial \{\eta_k \varphi(x+y)\}}{\partial x_j} - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \varphi(x+y)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{\partial}{\partial x_j} [f(x) \cdot g(y)], \eta_k \varphi(x+y)) + \\ &+ \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), (\eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}) \varphi(x+y)) - \\ &- \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k \varphi(x+y)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (D_j f(x) \cdot g(y), \eta_k \varphi(x+y)) + \\ &+ (f * g, \varphi) - (f * g, \varphi) = (D_j f * g, \varphi), \end{aligned}$$

откуда и следует первое равенство (20) для D_j . Второе равенство (20) следует из первого и из коммутативности свертки (см. § 7.5, б)):

$$D_j(f * g) = D_j(g * f) = D_j g * f = f * D_j g.$$

Из равенств (20) вытекают равенства

$$D^\alpha f = D^\alpha \delta * f = \delta * D^\alpha f, \quad f \in \mathcal{D}'. \quad (21)$$

Отметим, что существование сверток $D^\alpha f * g$ и $f * D^\alpha g, |\alpha| \geq 1$, недостаточно для существования свертки $f * g$ и справедливости равенства $D^\alpha f * g = f * D^\alpha g$, например: $\delta' * 1 = \delta * 1 = 1$, но $\delta * 1' = \delta * 0 = 0$. Другими словами, операция свертки, вообще говоря, не ассоциативна:

$$(\delta * \delta') * 1 = \delta' * 1 = 1, \quad \text{но} \quad \delta * (\delta' * 1) = \delta * 0 = 0.$$

д) *Сдвиг свертки.* Если свертка $f * g$ существует, то существует и свертка $f(x+h) * g(x)$, причем

$$f(x+h) * g(x) = (f * g)(x+h), \quad h \in R^n, \quad (22)$$

т. е. операции сдвига и свертки коммутируют.

Действительно, пусть $\eta_k(x; y), k=1, 2, \dots$, — любая последовательность функций из $\mathcal{D}(R^{2n})$, сходящаяся к 1 в R^{2n} . Тогда при любом $h \in R^n$ последовательность $\eta_k(x-h; y), k=1, 2, \dots$, сходится к 1 в R^{2n} . Теперь,

пользуясь определениями сдвига (см. § 5.9) и свертки (см. § 7.4), при всех $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ получаем

$$\begin{aligned} ((f * g)(x+h), \varphi) &= (f * g, \varphi(x-h)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x-h; y) \varphi(x-h+y)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x+h) \cdot g(y), \eta_k(x; y) \varphi(x+y)) = \\ &= (f(x+h) * g(x), \varphi), \end{aligned}$$

что и требовалось. Здесь мы воспользовались формулой (13) для сдвига прямого произведения.

6. **Существование свертки.** Установим некоторые достаточные условия (помимо указанных в § 7.4), при которых свертка заведомо существует в $\mathcal{D}'$.

Теорема. Пусть f — произвольная и g — финитная обобщенные функции. Тогда свертка $f * g$ существует в $\mathcal{D}'$ и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \eta(y) \varphi(x+y)), \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad (23)$$

где η — любая основная функция, равная 1 в окрестности носителя g . При этом свертка непрерывна относительно

f и g в отдельности: 1) если $f_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'$, то $f_k * g \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'$; 2) если $g_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'$ и при некотором R $\text{supp } g_k \subset U_R$, то $f * g_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'$.

Доказательство. Пусть $\text{supp } g \subset U_R$, η — функция из $\mathcal{D}(R^n)$, равная 1 в окрестности $\text{supp } g$, и $\text{supp } \eta \subset U_R$. (По лемме 1 § 5.2 такие функции существуют.) Пусть, далее, φ — произвольная функция из $\mathcal{D}(R^n)$, $\text{supp } \varphi \subset U_A$ и $\eta_k(x; y)$, $k=1, 2, \dots$ — последовательность функций из $\mathcal{D}(R^{2n})$, сходящаяся к 1 в R^{2n} (см. § 7.4). Тогда при всех достаточно больших k

$$\eta(y) \eta_k(x; y) \varphi(x+y) = \eta(y) \varphi(x+y). \quad (24)$$

Для доказательства равенства (24) достаточно установить, что функция $\eta(y) \varphi(x+y) \in \mathcal{D}(R^{2n})$. Но это сле-

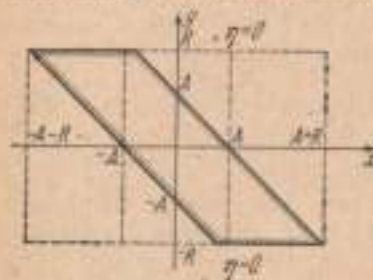


Рис. 34.

дует из того, что она бесконечно дифференцируема и ее носитель содержится в ограниченном множестве (рис. 34):

$$\{(x, y): |x+y| \leq A, |y| \leq R\} \subset U_{A+R} \times U_R.$$

Учитывая теперь соотношение (24) и равенство $g = \eta g$ (см. (8) § 5.10), убеждаемся в справедливости формулы (23):

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x; y) \varphi(x+y)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot \eta(y) g(y), \eta_k(x; y) \varphi(x+y)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta(y) \eta_k(x; y) \varphi(x+y)) = \\ &= (f(x) \cdot g(y), \eta(y) \varphi(x+y)), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Непрерывность свертки $f * g$ относительно f и g вытекает из представления (23) и из непрерывности прямого

произведения $f(x) \cdot g(y)$ относительно f и g в отдельности (см. § 7.3, а)). При этом в случае 2) условие $\text{supp } g_k \subset U_R$ дает возможность выбрать вспомогательную функцию η , не зависящую от k . Теорема доказана.

7. **Сверточная алгебра обобщенных функций $\mathcal{D}_+$.** Совокупность обобщенных функций из $\mathcal{D}'(R^1)$, обращающихся в нуль при $t < 0$, обозначим через $\mathcal{D}'_+$.

Теорема. Пусть $f \in \mathcal{D}'_+$ и $g \in \mathcal{D}'_+$. Тогда их свертка $f * g$ существует в $\mathcal{D}'_+$ и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(t) \cdot g(\tau), \eta_1(t) \eta_2(\tau) \varphi(t+\tau)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^1), \quad (25)$$

где $\eta_1(t)$ и $\eta_2(\tau)$ — любые функции класса $C^\infty(R^1)$, равные 1 в окрестности полусоси $[0, \infty)$ и 0 при достаточно больших отрицательных t . При этом свертка непрерывна относительно f и g в отдельности, например: если $f_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'_+$ и $f_k \in \mathcal{D}'_+$, то $f_k * g \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'_+$.

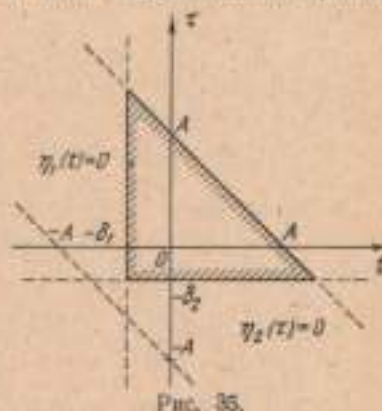


Рис. 35.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ — любая функция из $\mathcal{D}(R^1)$, причем $\text{supp } \varphi \subset (-A, A)$; $\eta_k(t; \tau)$, $k=1, 2, \dots$, — любая последовательность функций из $\mathcal{D}(R^2)$, сходящаяся к 1 в R^2 (см. § 7.4); $\eta_i(t)$, $i=1, 2$, — любые функции со свойствами, указанными в теореме, причем $\eta_i(t)=0$, $t < -\delta_i$; можно считать, что $A > \delta_1$ и $A > \delta_2$. Тогда при всех достаточно больших k справедливо равенство

$$\eta_1(t) \eta_2(\tau) \eta_k(t; \tau) \varphi(t+\tau) = \eta_1(t) \eta_2(\tau) \varphi(t+\tau). \quad (26)$$

Для доказательства равенства (26) достаточно установить, что функция $\eta_1(t) \eta_2(\tau) \varphi(t+\tau) \in \mathcal{D}(R^2)$. Но это следует из того, что она бесконечно дифференцируема, а множество

$$\{(t, \tau): t \geq -\delta_1, \tau \geq -\delta_2, |t+\tau| \leq A\},$$

в котором содержится ее носитель, ограничено в R^2 (рис. 35).

Далее, по построению $\eta_1(t)=1$ и $\eta_2(\tau)=1$ в окрестности носителей $f(t)$ и $g(\tau)$ соответственно. Следовательно, по формуле (8) § 5.10

$$f(t) = \eta_1(t) f(t), \quad g(\tau) = \eta_2(\tau) g(\tau).$$

Учитывая теперь эти равенства и равенство (26), убеждаемся в существовании свертки $f * g$ в $\mathcal{D}'(R^1)$ и в справедливости формулы (25):

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(t) \cdot g(\tau), \eta_k(t; \tau) \varphi(t+\tau)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\eta_1(t) f(t) \cdot \eta_2(\tau) g(\tau), \eta_k(t; \tau) \varphi(t+\tau)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(t) \cdot g(\tau), \eta_1(t) \eta_2(\tau) \eta_k(t; \tau) \varphi(t+\tau)) = \\ &= (f(t) \cdot g(\tau), \eta_1(t) \eta_2(\tau) \varphi(t+\tau)). \end{aligned}$$

Докажем, что $f * g = 0$ при $t < 0$, т. е. что $f * g \in \mathcal{D}'_+$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(R^1)$ и $\text{supp } \varphi \subset [t < 0]$. Так как носитель φ — компакт в R^1 , то, в силу леммы Гейне — Бoreля (см. § 1.1), $\text{supp } \varphi \subset [t < -\varepsilon]$ при некотором $\varepsilon > 0$. А тогда, выбирая вспомогательные функции $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ равными 0 при $t < -\varepsilon/2$, получим $\eta_1(t) \eta_2(\tau) \varphi(t+\tau) = 0$ в R^2 , откуда и из представления (25) вытекает $(f * g, \varphi) = (f(t) \cdot g(\tau), 0) = 0$, что и утверждалось (см. § 5.5).

Непрерывность свертки $f * g$ относительно f и g в отдельности следует из представления (25) и из непрерывности прямого произведения $f(t) \cdot g(\tau)$ относительно f и g в отдельности (см. § 7.3, а)). При этом вспомогательные функции η_1 или η_2 можно выбрать не зависящими от f_k или g_k соответственно. Теорема доказана.

Следствие. Свертка обобщенных функций из $\mathcal{D}'_+$ обладает свойством ассоциативности (и коммутативности):

$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3 = f_3 * (f_1 * f_2). \quad (27)$$

Действительно, пусть вспомогательная функция $\eta(t)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда, в силу представления (23), при всех $\varphi \in \mathcal{D}(R^1)$ будем иметь

$$\begin{aligned} (f_1 * (f_2 * f_3), \varphi) &= (f_1(t) \cdot (f_2 * f_3)(\tau), \eta(t) \eta(\tau) \varphi(t+\tau)) = \\ &= ((f_2 * f_3)(\tau), (f_1(t), \eta(t) \eta(\tau) \varphi(t+\tau))) = \\ &= (f_2(\tau) \cdot f_3(\tau'), \eta(\tau) \eta(\tau') (f_1(t), \eta(t) \eta(\tau+\tau') \times \\ &\quad \times \varphi(t+\tau+\tau'))) = ((f_2(\tau) \cdot f_3(\tau')) \cdot f_1(t), \eta(\tau) \eta(\tau') \times \\ &\quad \times \eta(t) \eta(\tau+\tau') \varphi(t+\tau+\tau')). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались леммой § 7.1, согласно которой

$$(f_1(t), \eta(t) \eta(\tau) \varphi(t+\tau)) \in \mathcal{D}'(R^1).$$

Учитывая теперь равенство

$$[f_2(\tau) \cdot f_3(\tau')] \eta(\tau) \eta(\tau') \eta(\tau+\tau') = [f_2(\tau) \cdot f_3(\tau')] \eta(\tau) \eta(\tau')$$

(см. (8) § 5.10), продолжаем нашу цепочку равенств:

$$\begin{aligned} (f_1 * (f_2 * f_3), \varphi) &= \\ &= ((f_2(\tau) \cdot f_3(\tau')) \cdot f_1(t), \eta(t) \eta(\tau) \eta(\tau') \varphi(t+\tau+\tau')). \end{aligned}$$

Меняя местами f_1 , f_2 и f_3 в полученном равенстве и пользуясь коммутативностью (см. § 7.2) и ассоциативностью (см. § 7.3, б)) прямого произведения, убеждаемся в справедливости равенств (27).

Определение. Линейное множество $\mathcal{A}$ называется алгеброй, если на нем определена операция умножения, линейная относительно каждого множителя в отдельности. Алгебра $\mathcal{A}$ называется ассоциативной, если всегда $x(yz) = (xy)z$; алгебра $\mathcal{A}$ называется коммутативной, если всегда $xy = yx$.

Доказанные в этом пункте теорема и следствие из нее утверждают, что $\mathcal{D}'_+$ образует ассоциативную и коммутативную алгебру, если в качестве умножения взять операцию свертки $*$; $\mathcal{D}'_+$ называется *сверточной алгеброй*. Единицей в алгебре $\mathcal{D}'_+$ является δ -функция, так как $\delta * f = f$.

8. Уравнения в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$. В алгебре $\mathcal{D}'_+$ рассмотрим уравнение

$$a * u = f, \quad (28)$$

где a и f — известные, а u — неизвестная обобщенные функции из $\mathcal{D}'_+$. Решение уравнения (28) при $f = \delta$, если оно существует, называется *фундаментальным решением сверточного оператора $a*$* и обозначается a^{-1} . Другими словами, a^{-1} — обратный элемент к a в алгебре $\mathcal{D}'_+$, $a * a^{-1} = \delta$.

Теорема. Если a^{-1} существует в $\mathcal{D}'_+$, то для любой f из $\mathcal{D}'_+$ решение уравнения (28) в $\mathcal{D}'_+$ существует, единственно и выражается формулой

$$u = a^{-1} * f. \quad (29)$$

Действительно, свертка $a^{-1} * f \in \mathcal{D}'_+$ и удовлетворяет уравнению (28):

$$a * (a^{-1} * f) = (a * a^{-1}) * f = \delta * f = f.$$

Так как однородное уравнение $a * u_0 = 0$, соответствующее уравнению (28), имеет в $\mathcal{D}'_+$ только нулевое решение:

$$a^{-1} * (a * u_0) = (a^{-1} * a) * u_0 = \delta * u_0 = u_0 = a^{-1} * 0 = 0,$$

то решение уравнения (28) единственно в $\mathcal{D}'_+$ (см. § 1.11).

Доказанная теорема сводит задачу решения уравнения (28) при произвольной f из $\mathcal{D}'_+$ к решению его при конкретной $f = \delta$, т. е. к нахождению a^{-1} .

Следующее предложение весьма полезно при построении фундаментальных решений в алгебре $\mathcal{D}'_+$: если a_1^{-1} и a_2^{-1} существуют в $\mathcal{D}'_+$, то

$$(a_1 * a_2)^{-1} = a_1^{-1} * a_2^{-1}. \quad (30)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (a_1 * a_2) * (a_1^{-1} * a_2^{-1}) &= (a_2 * a_1) * (a_1^{-1} * a_2^{-1}) = \\ &= a_2 * (a_1 * (a_1^{-1} * a_2^{-1})) = a_2 * ((a_1 * a_1^{-1}) * a_2^{-1}) = \\ &= a_2 * (\delta * a_2^{-1}) = a_2 * a_2^{-1} = \delta. \end{aligned}$$

В § 10, используя методы ТФКП, мы построим операционное исчисление на некоторой подалгебре алгебры $\mathcal{D}'_+$. А сейчас ограничимся определением в алгебре $\mathcal{D}'_+$ операторов дробного дифференцирования и интегрирования.

Введем обобщенную функцию f_α из $\mathcal{D}'_+$, зависящую от вещественного параметра α :

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\delta(x)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}, & \alpha > 0, \\ f_{\alpha+1}, & \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Проверим, что

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}. \quad (31)$$

Действительно, если $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, (см. § 7.4)

$$\begin{aligned} f_\alpha * f_\beta &= \frac{\delta(x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x y^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} dy = \\ &= \frac{\delta(x) x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \\ &= \frac{\delta(x) x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta) = \frac{\delta(x) x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = f_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Если же $\alpha \leq 0$ или $\beta \leq 0$, то, подбирая целые числа $m > -\alpha$ и $n > -\beta$, получим

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+m}^{(m)} * f_{\beta+n}^{(n)} = (f_{\alpha+m} * f_{\beta+n})^{(m+n)} = f_{\alpha+\beta+m+n}^{(m+n)} = f_{\alpha+\beta},$$

что и требовалось.

Рассмотрим сверточный оператор $f_\alpha *$ в алгебре $\mathcal{D}'_+$. Так как $f_0 = \delta$, то из (31) вытекает, что фундаментальное решение f_α^{-1} оператора $f_\alpha *$ существует и равно $f_{-\alpha}$: $f_\alpha^{-1} = f_{-\alpha}$. Далее, при целых $n < 0$ $f_n = \delta^{(n)}$ и потому $f_n * u = \delta^{(n)} * u = u^{(n)}$, т. е. оператор $f_n *$ есть оператор n -кратного дифференцирования. Наконец, при целых $n > 0$

$$(f_n * u)^{(n)} = f_{-n} * (f_n * u) = (f_{-n} * f_n) * u = \delta * u = u,$$

т. е. $f_n * u$ есть первообразная порядка n обобщенной функции u (см. § 5.3). Поэтому оператор $f_\alpha *$ называют оператором дробного дифференцирования при $\alpha < 0$ и дробного интегрирования при $\alpha > 0$ (а также оператором Римана — Лиувилля).

9. Регуляризация обобщенных функций. Пусть f — обобщенная функция и φ — основная функция. Поскольку φ финитна, то свертка $f * \varphi$ существует по теореме § 7.6. Докажем, что

$$f * \varphi = (f(y), \varphi(x-y)) \in C^\infty(R^n). \quad (32)$$

Действительно, в силу (23) при всех $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$\begin{aligned} (f * \varphi, \eta) &= (f(y), \varphi(\xi), \eta(\xi) \varphi(y+\xi)) = \\ &= (f(y), \int \varphi(\xi) \eta(\xi) \varphi(y+\xi) d\xi) = \\ &= (f(y), \int \varphi(\xi) \varphi(y+\xi) d\xi) = (f(y), \int \varphi(x) \varphi(x-y) dx), \end{aligned}$$

где вспомогательная функция $\eta \in \mathcal{D}$ и равна 1 в окрестности носителя φ . Замечая теперь, что функция $\varphi(x) \times \varphi(x-y)$ принадлежит $\mathcal{D}(R^{2n})$, и пользуясь равенством (14), получаем равенство (32):

$$\begin{aligned} (f * \varphi, \eta) &= \int \varphi(x) (f(y), \varphi(x-y)) dx = \\ &= ((f(y), \varphi(x-y)), \eta), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Бесконечная дифференцируемость правой части равенства (32) устанавливается, как и при доказательстве леммы § 7.1.

Пусть $\omega_\varepsilon(x)$ — «шапочка» (см. § 5.2). Тогда бесконечно дифференцируемая функция

$$f_\varepsilon(x) = f * \omega_\varepsilon = (f(y), \omega_\varepsilon(x-y))$$

называется *регуляризацией* обобщенной функции f .

В § 5.7 было доказано, что $\omega_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$, $\varepsilon \rightarrow +0$ в $\mathcal{D}'$. Отсюда, пользуясь непрерывностью свертки $f * \omega_\varepsilon$ относительно ω_ε (см. теорему § 7.6), получаем

$$f_\varepsilon(x) \rightarrow f(x), \quad \varepsilon \rightarrow +0 \text{ в } \mathcal{D}'. \quad (33)$$

Итак, всякая обобщенная функция есть слабый предел своих регуляризаций.

Пользуясь этим утверждением, установим более сильный результат.

Теорема. Всякая обобщенная функция f есть слабый предел основных функций, т. е. множество $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{D}'$.

Доказательство. Пусть $f_\varepsilon(x)$ — регуляризация f и $\eta_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \rightarrow +0$, — последовательность основных функций, равных 1 в шаре $U_{1/\varepsilon}$. Тогда последовательность основных функций $\eta_\varepsilon(x) f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \rightarrow +0$, стремится к f в $\mathcal{D}'$, поскольку

для любой $\varphi \in \mathcal{D}$, в силу (33), имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\eta_\varepsilon f_\varepsilon, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f_\varepsilon, \eta_\varepsilon \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f_\varepsilon, \varphi) = (f, \varphi),$$

что и утверждалось.

Замечание. Из полноты пространства $\mathcal{D}'$ (см. § 5.4) вытекает обратное к теореме утверждение: всякий слабый предел локально интегрируемых функций есть обобщенная функция из $\mathcal{D}'$. Поэтому теорию обобщенных функций можно строить, исходя из слабо сходящихся последовательностей обычных функций. По поводу этого подхода см. П. Антоси, Я. Микусинский, Р. Сикорский [1].

10. Примеры свертки. **Ньютонов потенциал.** а) Пусть $f(x)$ — непрерывная функция в $R^n \setminus \{0\}$ с интегрируемой особенностью в 0 и $\mu_\delta(x)$ — простой слой на ограниченной кусочно-гладкой поверхности S с непрерывной плотностью μ (см. § 5.7).

Их свертка $f * \mu_\delta$ — локально интегрируемая функция в R^n — выражается интегралом

$$f * \mu_\delta = \int \mu(y) f(x-y) dS_y. \quad (34)$$

Это утверждение вытекает из представления (23):

$$\begin{aligned} (f * \mu_\delta, \varphi) &= (\mu_\delta(y), f(\xi), \eta(y) \varphi(y+\xi)) = \\ &= (\mu_\delta(y), \eta(y) (f(\xi), \varphi(y+\xi))) = \\ &= \int \mu(y) \eta(y) \int f(\xi) \varphi(y+\xi) d\xi dS_y = \\ &= \int \mu(y) \int f(x-y) \varphi(x) dx dS_y = \\ &= \int \varphi(x) \int \mu(y) f(x-y) dS_y dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

б) Пусть ρ — обобщенная функция. Свертка

$$V_n = \frac{1}{|x|^{n-2}} * \rho, \quad n \geq 3; \quad V_2 = \ln \frac{1}{|x|} * \rho, \quad n = 2, \quad (35)$$

называется *ньютоновым* (при $n=2$ *логарифмическим*) *потенциалом* с плотностью ρ .

Если ρ — финитная обобщенная функция, то потенциал V_n существует в $\mathcal{D}'$ и удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V_n = -(n-2) \sigma_n \rho, \quad n \geq 3; \quad \Delta V_2 = -2 \pi \rho, \quad n = 2. \quad (36)$$

Существование потенциала V_n вытекает из теоремы § 7.6. Пользуясь (20) § 7.5 и (33) § 6.6, заключаем, что при $n \geq 3$ потенциал V_n удовлетворяет уравнению Пуассона (36):

$$\Delta V_n = \Delta \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} * \rho \right) = \Delta \frac{1}{|x|^{n-2}} * \rho = \\ = -(n-2) \sigma_n \delta * \rho = -(n-2) \sigma_n \rho;$$

аналогично поступаем и в случае $n=2$.

с) Если ρ — финитная (абсолютно) интегрируемая функция на R^n , то соответствующий ньютонов (логарифмический) потенциал V_n называется *объемным потенциалом (потенциалом площади)*.

Объемный потенциал V_n — локально интегрируемая функция в R^n — выражается интегралами

$$V_n(x) = \int \frac{\rho(y)}{|x-y|^{n-2}} dy, \quad n \geq 3; \\ V_2(x) = \int \rho(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy, \quad n=2. \quad (37)$$

Это утверждение вытекает из формулы (15) для свертки финитной интегрируемой функции ρ с локально интегрируемой функцией $|x|^{2-n}$, $n \geq 3$, и $-\ln|x|$, $n=2$.

д) Пусть S — ограниченная кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность с выбранным направлением нормали n на ней и μ и ν — непрерывные функции на S . Пусть

$$\mu \delta_S \text{ и } -\frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_S)$$

— простой и двойной слой на S с поверхностными плотностями μ и ν (см. § 5.7 и § 6.5, а)). Порождаемые ими ньютоновы (логарифмические) потенциалы

$$V_n^{\mu} = \frac{1}{|x|^{n-2}} * \mu \delta_S, \quad n \geq 3; \quad V_n^{\nu} = \ln \frac{1}{|x|} * \mu \delta_S, \quad n=2; \quad (38)$$

$$V_n^{\mu} = -\frac{1}{|x|^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_S), \quad n \geq 3; \\ V_n^{\nu} = -\ln \frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_S), \quad n=2 \quad (39)$$

называются соответственно *поверхностными потенциалами простого и двойного слоя* с плотностями μ и ν .

Поверхностные потенциалы V_n^{μ} и V_n^{ν} — локально интегрируемые функции в R^n — выражаются формулами

$$V_n^{\mu}(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|^{n-2}} dS_y, \quad n \geq 3; \\ V_n^{\nu}(x) = \int_S \mu(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dS_y, \quad n=2; \quad (40)$$

$$V_n^{\mu}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dS_y, \quad n \geq 3; \\ V_n^{\nu}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} dS_y, \quad n=2. \quad (41)$$

Формулы (40) являются частными случаями формулы (34). Докажем для определенности формулу (41) для потенциала V_n^{ν} , $n \geq 3$. Пользуясь представлением (23) для свертки и определением двойного слоя, при всех $\varphi \in \mathcal{D}$ получаем

$$(V_n^{\nu}, \varphi) = - \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_S), \varphi \right) = \\ = - \left(\frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_S(y)), \frac{1}{|x|^{n-2}} * \eta(y) \varphi(y + \xi) \right) = \\ = - \left(\frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_S(y)), \eta(y) \left(\frac{1}{|\xi|^{n-2}} * \varphi(y + \xi) \right) \right) = \\ = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n} \left[\eta(y) \int \frac{\varphi(y + \xi)}{|\xi|^{n-2}} d\xi \right] dS_y = \\ = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n} \int \frac{\varphi(x)}{|x-y|^{n-2}} dx dS_y = \\ = \int_S \nu(y) \int \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dx dS_y = \\ = \int \varphi(x) \int \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dS_y dx,$$

откуда и следует требуемая формула (41).

Дифференцирование под знаком интеграла здесь обеспечивается теоремой § 1.6, а перемена порядка интегрирования — теоремой Фубини (см. § 1.4, h)) в силу существ-

ования повторного интеграла

$$\int_0^x |v(y)| \int_0^y |\varphi(x)| \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} \right| dx dS_y.$$

11. Упражнения. а) Доказать равенство

$$\frac{\partial^\alpha [\delta(x_1) \dots \delta(x_n)]}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \delta(x_1) \dots \delta(x_n) = \delta(x).$$

б) Доказать: $\text{supp } [f(x) \cdot g(y)] = \text{supp } f \times \text{supp } g$.

с) Доказать: для того чтобы обобщенная функция $f(x)$ не зависела от x_i , необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$.

д) Доказать: для того чтобы обобщенная функция не зависела от x_i , необходимо и достаточно, чтобы она была инвариантна относительно всех сдвигов по x_i .

е) Доказать:

$$\text{supp } (f * g) \subset \overline{\{x: x = y + z, y \in \text{supp } f, z \in \text{supp } g\}}.$$

г) Доказать: если обобщенная функция f не зависит от x_i , то таким же свойством обладает и свертка $f * g$. (Указание: воспользоваться с) или д).)

е) Пользуясь г), доказать: если свертка $f * 1$ существует, то она совпадает с постоянной.

ж) Проверить равенства:

$$1) f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}, \quad f_\alpha(x) = \frac{\delta(x)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}, \quad \alpha > 0;$$

$$2) f_\alpha * f_\beta = f_{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad f_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \alpha} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}, \quad \alpha > 0;$$

$$3) f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}, \quad f_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}, \quad \alpha > 0.$$

з) Доказать, что

$$[(\delta' - \lambda \delta)^k]^{-1} = *[(\delta' - \lambda \delta)^{-k}]^k = \frac{\delta(x)}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x};$$

здесь введено обозначение $*f^k = f * \dots * f$ (k раз).

и) Пользуясь формулой (31), показать, что функция

$$u(x) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^x \frac{g'(\xi)}{(x-\xi)^{1-\alpha}} d\xi$$

есть решение интегрального уравнения Абеля

$$\int_0^x \frac{u(\xi)}{(x-\xi)^\alpha} d\xi = g(x), \quad g(0) = 0, \quad g \in C^1(x \geq 0), \quad 0 < \alpha < 1.$$

к) Доказать равенство

$$e^{ax} * e^{bx} = e^{ax} (f * g), \quad f, g \in \mathcal{D}'.$$

л) Доказать: если $f \in \mathcal{D}'(R^1)$, $f * \varphi \in \mathcal{D}'$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}$ ($x < 0$), то $f \in \mathcal{D}'$.

м) Обозначим через $\mathcal{E}'$ пространство финитных обобщенных функций со связностью: $f_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{E}'$, если а) $f_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'$ и б) существует такое $R > 0$, что $\text{supp } f_k \subset U_R$ при всех $k = 1, 2, \dots$

Доказать теорему: для того чтобы оператор L , действующий из $\mathcal{E}'$ в $\mathcal{D}'$, представлялся в виде свертки, $Lf = f_0 * f$, где $f_0 \in \mathcal{D}'$, необходимо и достаточно, чтобы он был линейным и непрерывным из $\mathcal{E}'$ в $\mathcal{D}'$ и коммутировал с операцией сдвига (см. § 7.5, д)). При этом элемент f_0 — единственный и $f_0 = L\delta$.

§ 8. Обобщенные функции медленного роста

Одним из мощных средств для решения задач математической физики является метод преобразования Фурье. В § 9 будет изложена теория преобразования Фурье для так называемых обобщенных функций медленного роста (tempered distributions). Поэтому сначала нужно изучить класс обобщенных функций медленного роста.

1. **Пространство основных функций $\mathcal{S}$.** Отнесем к множеству основных функций $\mathcal{S} = \mathcal{S}(R^n)$ все функции класса $C^\infty(R^n)$, убывающие при $|x| \rightarrow \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Сходимость в $\mathcal{S}$ определим следующим образом: последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ из $\mathcal{S}$ сходится к функции $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi_k \rightarrow \varphi$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}$, если для всех α и β

$$x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^\beta D^\alpha \varphi(x), \quad k \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Очевидно, $\mathcal{S}$ — линейное пространство. Кроме того, $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ и из сходимости в $\mathcal{D}$ следует сходимость в $\mathcal{S}$.

Действительно, если $\varphi_k \rightarrow \varphi$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$, то, поскольку носители φ_k ограничены независимо от k , справедливо предельное соотношение (1) при всех α и β , которое и означает, что $\varphi_k \rightarrow \varphi$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}$.

Однако $\mathcal{S}$ не совпадает с $\mathcal{D}$; например, функция e^{-x^2} принадлежит $\mathcal{S}$, но не принадлежит $\mathcal{D}$.

Тем не менее $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{S}$, т. е. для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ существует последовательность $\varphi_k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что $\varphi_k \rightarrow \varphi$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}$.

Действительно, последовательность функций из $\mathcal{D}$

$$\varphi_k(x) = \varphi(x) \eta\left(\frac{x}{k}\right), \quad k=1, 2, \dots,$$

где $\eta \in \mathcal{D}$ и $\eta(x) = 1$, $|x| < 1$, сходится к φ в $\mathcal{D}$.

Операции дифференцирования $D^\alpha \varphi(x)$ и неособенной линейной замены переменных $\varphi(Ay+b)$ непрерывны из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$. Это вытекает непосредственно из определения сходимости в пространстве $\mathcal{D}$.

С другой стороны, умножение на бесконечно дифференцируемую функцию может вывести за пределы множества $\mathcal{D}$, например: $e^{-1/x^2} e^{1/x^2} = 1 \notin \mathcal{D}$.

Пусть функция $a \in C^\infty(R^n)$ растет на бесконечности вместе со всеми производными не быстрее полинома:

$$|D^\alpha a(x)| \leq C_\alpha (1+|x|)^{m_\alpha}. \quad (2)$$

Множество таких функций обозначим через $\mathcal{D}_M$.

Операция умножения на функцию $a \in \mathcal{D}_M$ непрерывна из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$.

Действительно, из неравенства (2) вытекает: если $\varphi \in \mathcal{D}$, то $a\varphi \in \mathcal{D}$, и если $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$, то при всех α и β

$$x^\beta D^\alpha (a\varphi_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

т. е. $a\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$.

2. Пространство обобщенных функций медленного роста $\mathcal{D}'$. Обобщенной функцией медленного роста называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathcal{D}$. Обозначим через $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(R^n)$ множество всех обобщенных функций медленного роста. Очевидно, $\mathcal{D}'$ — линейное множество (ср. § 5.3). Сходимость в $\mathcal{D}'$ определим как слабую сходимость последовательности функционалов: последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \dots$ из $\mathcal{D}'$ сходится к обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'$, $f_k \rightarrow f$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'$, если для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ $(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$, $k \rightarrow \infty$. Линейное множество $\mathcal{D}'$ с введенной в нем сходимостью называется пространством обобщенных функций медленного роста $\mathcal{D}'$.

Из этих определений непосредственно вытекает, что $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'$ и из сходимости в $\mathcal{D}'$ следует сходимость в $\mathcal{D}'$.

Действительно, если $f \in \mathcal{D}'$, то $f \in \mathcal{D}'$, так как $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ и из сходимости в $\mathcal{D}$ вытекает сходимость в $\mathcal{D}'$ (см. § 8.1). Далее, если $f_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'$, то $(f_k, \varphi) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, при всех φ из $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ и, стало быть, $f_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'$.

Теорема (Л. Шварц). Для того чтобы линейный функционал f на $\mathcal{D}$ принадлежал $\mathcal{D}'$ (т. е. был непрерывным на $\mathcal{D}$), необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа $C > 0$ и $p \geq 0$, p — целое, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ справедливо неравенство

$$|(f, \varphi)| \leq C |\varphi|_p, \quad (3)$$

где

$$|\varphi|_p = \sup_{\alpha \leq p, x \in R^n} (1+|x|)^p |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть линейный функционал f на $\mathcal{D}$ удовлетворяет неравенству (3) при некоторых $C > 0$ и $p \geq 0$. Докажем, что $f \in \mathcal{D}'$. Пусть $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$. Тогда $|\varphi_k|_p \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, а потому $|(f, \varphi_k)| \leq C |\varphi_k|_p \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Это значит, что f — непрерывный функционал на $\mathcal{D}$.

Необходимость. Пусть $f \in \mathcal{D}'$. Докажем, что существуют числа $C > 0$ и $p \geq 0$ такие, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ справедливо неравенство (3). Пусть, напротив, указанных чисел C и p не существует. Тогда найдется последовательность функций φ_k , $k=1, 2, \dots$, из $\mathcal{D}$ таких, что

$$|(f, \varphi_k)| \geq k |\varphi_k|_k. \quad (4)$$

Последовательность функций

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{V k |\varphi_k|_k}, \quad k=1, 2, \dots,$$

стремится к 0 в $\mathcal{D}$, ибо при $k \geq |\alpha|$ и $k \geq |\beta|$

$$|x^\beta D^\alpha \psi_k(x)| = \frac{|x^\beta D^\alpha \varphi_k(x)|}{V k |\varphi_k|_k} \leq \frac{1}{V k}.$$

Откуда и из непрерывности функционала f на $\mathcal{D}$ следует, что $(f, \psi_k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. С другой стороны, неравенство (4) дает

$$|(f, \psi_k)| = \frac{1}{V k |\varphi_k|_k} |(f, \varphi_k)| \geq \frac{1}{V k}.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Смысл доказанной теоремы состоит в том, что всякая обобщенная функция медленного роста является непрерывным функционалом относительно некоторой нормы $|\cdot|_p$ (как говорят, имеет конечный порядок).

3. Примеры обобщенных функций медленного роста.

а) Если $f(x)$ — локально интегрируемая функция медленного роста на бесконечности, т. е. при некотором $m \geq 0$

$$\int |f(x)|(1+|x|)^{-m} dx < \infty,$$

то она определяет регулярный функционал f из $\mathcal{S}'$ по формуле (11) § 5.6,

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S} \quad (5)$$

Однако не всякая локально интегрируемая функция определяет обобщенную функцию медленного роста, например, $e^x \in \mathcal{S}'(R^1)$.

С другой стороны, не всякая локально интегрируемая функция, принадлежащая $\mathcal{S}'$, имеет медленный рост. Например, функция $(\cos e^x)' = -e^x \sin e^x$ не является функцией медленного роста, но тем не менее она определяет обобщенную функцию из $\mathcal{S}'$ по формуле

$$((\cos e^x)', \varphi) = - \int \cos e^x \varphi'(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Замечание. Пользуясь теоремой Л. Шварца (см. § 8.2) можно доказать*, что всякая обобщенная функция из $\mathcal{S}'$ является производной от непрерывной функции медленного роста. Этим объясняется название $\mathcal{S}'$ — пространство обобщенных функций медленного роста.

б) Если f — финитная обобщенная функция из $\mathcal{D}'$, то она единственным образом продолжается на $\mathcal{S}$ как элемент из $\mathcal{S}'$ по формуле

$$(f, \varphi) = (f, \eta\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}, \quad (6)$$

где $\eta \in \mathcal{D}$ и $\eta = 1$ в окрестности носителя f .

Действительно, линейный функционал $(f, \eta\varphi)$, стоящий в правой части равенства (6), непрерывен на $\mathcal{S}$: если $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}$, то $\eta\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}$, и потому

$$(f, \eta\varphi_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

* См. Л. Шварц [2], гл. VII.

Единственность продолжения функционала f на $\mathcal{S}$ следует из плотности $\mathcal{D}$ в $\mathcal{S}$ (см. § 8.1). В частности, продолжение (6) не зависит от вспомогательной функции η .

с) Если $f \in \mathcal{S}'$, то и каждая производная $D^\alpha f \in \mathcal{S}'$.

Действительно, поскольку операция дифференцирования $D^\alpha \varphi$ непрерывна из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$ (см. § 8.1), то правая часть равенства

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi)$$

есть линейный непрерывный функционал на $\mathcal{S}$ (ср. § 5.1).

д) Если $f \in \mathcal{S}'$ и $\det A \neq 0$, то $f(Ay+b) \in \mathcal{S}'$.

В самом деле, поскольку операция преобразования $\varphi[A^{-1}(x-b)]$ непрерывна из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$ (см. § 8.1), то правая часть равенства

$$(f(Ay+b), \varphi) = \left(f, \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|} \right)$$

есть линейный непрерывный функционал на $\mathcal{S}$ (ср. § 5.9).

е) Если $f \in \mathcal{S}'$ и $a \in \mathfrak{B}_M$, то $af \in \mathcal{S}'$.

Действительно, поскольку операция умножения на функцию a из $\mathfrak{B}_M$ непрерывна из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$ (см. § 8.1), то правая часть равенства

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi)$$

есть линейный непрерывный функционал на $\mathcal{S}$ (ср. § 5.10).

4. Структура обобщенных функций с точечным носителем.

Теорема. Если носитель обобщенной функции f есть точка $\{0\}$, то она единственным способом представляется в виде

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^m C_\alpha D^\alpha \delta(x). \quad (7)$$

Доказательство. Так как обобщенная функция f имеет носитель $\{0\}$, то $f \in \mathcal{S}'$ (см. § 8.3) и, в силу (18) § 5.10, при всех $k > 0$

$$f = \eta(kx)f, \quad (8)$$

где $\eta(x)$ — основная функция, равная 1 в окрестности точки 0 и равная 0 при $|x| > 1$. Далее, по теореме

Л. Шварца (см. § 8.2) справедливо неравенство

$$|(f, \varphi)| \leq C |\varphi|_m, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad (9)$$

при некоторых $m \geq 0$ и $C > 0$, не зависящих от φ .

Пусть φ — произвольная функция из $\mathcal{D}$. Положим

$$\varphi_k(x) = \varphi_m(x) \eta(kx), \quad \varphi_m(x) = \varphi(x) - \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha. \quad (10)$$

Применяя неравенство (9) к функции φ_k и пользуясь тем, что

$$D^\gamma \varphi_m(x) = O(|x|^{m+1-|\gamma|}), \quad x \rightarrow 0 \quad (|\gamma| \leq m),$$

$$D^\beta \eta(kx) = O(k^{-|\beta|}), \quad k \rightarrow \infty,$$

получим

$$\begin{aligned} |(f, \varphi_k)| &\leq C |\varphi_k|_m = \\ &= C \sup_{|\beta| \leq m, |x| \leq \frac{1}{k}} (1 + |x|^m) |D^\beta [\varphi_m(x) \eta(kx)]| \leq \\ &\leq C_1 \max_{|\beta| \leq m, |x| \leq \frac{1}{k}} \sum_{|\gamma| \leq m} |D^\gamma \varphi_m(x)| |D^{\beta-\gamma} \eta(kx)| \leq \\ &\leq C_1 \max_{|\beta| \leq m} \sum_{|\gamma| \leq m} k^{-m-1+|\gamma|} k^{|\beta-\gamma|} = \frac{C_2}{k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Но, в силу (8), (f, φ_k) не зависит от k . Следовательно, по доказанному

$$(f, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f, \varphi_k) = 0.$$

Отсюда, пользуясь (8) и (10) при $k=1$, получаем представление (7):

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= (\eta f, \varphi) = (f, \eta \varphi) = \left(f, \varphi_1 + \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \eta(x) \right) = \\ &= (f, \varphi_1) + \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} (f, x^\alpha \eta(x)) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha (D^\alpha \delta, \varphi), \end{aligned}$$

где обозначено

$$C_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} (f, x^\alpha \eta).$$

Докажем единственность представления (7). Пусть

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} C'_\alpha D^\alpha \delta(x)$$

— другое представление f , так что

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (C_\alpha - C'_\alpha) D^\alpha \delta(x) = 0.$$

Применяя это равенство к моному x^β , $|\beta| \leq m$, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{|\alpha| \leq m} (C_\alpha - C'_\alpha) (D^\alpha \delta, x^\beta) = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} (C_\alpha - C'_\alpha) (\delta, D^\alpha x^\beta) = (-1)^{|\beta|} |\beta|! (C_\beta - C'_\beta), \end{aligned}$$

т. е. $C_\beta = C'_\beta$. Теорема доказана.

5. Прямое произведение обобщенных функций медленного роста. Пусть $f(x) \in \mathcal{S}'(R^n)$ и $g(y) \in \mathcal{S}'(R^m)$. Поскольку $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$, то прямое произведение $f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$ (см. § 7.1).

Докажем, что $f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{S}'(R^{n+m})$.

По определению функционала $f(x) \cdot g(y)$ (см. § 7.1)

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))). \quad (11)$$

Докажем, что правая часть равенства (11) есть линейный непрерывный функционал на $\mathcal{S}(R^{n+m})$.

Для этого установим следующую лемму, аналогичную лемме § 7.1.

Лемма. Для любых $g \in \mathcal{S}'(R^m)$ и $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+m})$ функция

$$\psi(x) = (g(y), \varphi(x, y)) \in \mathcal{S}(R^n)$$

и справедливо равенство

$$D^\alpha \psi(x) = (g(y), D^\alpha \varphi(x, y)). \quad (12)$$

Кроме того, если $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}(R^{n+m})$, то

$$\psi_k(x) = (g(y), \varphi_k(x, y)) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{S}(R^n). \quad (13)$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы § 7.1, устанавливаются справедливость равенства (12)

при всех α и непрерывность его правой части. Следовательно, $\varphi \in C^\infty(R^n)$. Докажем, что $\varphi \in \mathcal{S}(R^n)$. Так как $g(y) \in \mathcal{S}'(R^m)$ и при каждом $x \in R^n$ $\varphi(x, y) \in \mathcal{S}(R^m)$, то, по теореме Л. Шварца (см. § 8.2), найдутся такие числа $C > 0$ и $p \geq 0$, что для любых $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+m})$, α и $x \in R^n$ справедливо неравенство

$$|(g(y), D_x^\alpha \varphi(x, y))| \leq C \sup_{y \in R^m, |y| \leq p} (1 + |y|^p) |D_y^\alpha D_x^\alpha \varphi(x, y)|.$$

Отсюда, в силу (12), при всех $x \in R^n$ получаем неравенство

$$|x^\beta D^\alpha \varphi(x)| \leq C \sup_{y \in R^m, |y| \leq p} (1 + |y|^p) |x^\beta D_y^\alpha D_x^\alpha \varphi(x, y)|. \quad (14)$$

Так как $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+m})$, то из неравенства (14) вытекает, что $\varphi \in \mathcal{S}(R^n)$.

Докажем теперь предельное соотношение (13). Пусть $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}(R^{n+m})$. Отсюда, применяя неравенство (14) к последовательности φ_k , $k \rightarrow \infty$, получаем

$$|x^\beta D^\alpha \varphi_k| \leq C \sup_{y \in R^m, |y| \leq p} (1 + |y|^p) |x^\beta D_y^\alpha D_x^\alpha \varphi_k| \xrightarrow{x \in R^n} 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

т. е. $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}(R^n)$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает, что правая часть равенства (11), равная (f, φ) , где $\varphi(x) = (g(y), \varphi(x, y))$, есть линейный и непрерывный функционал на $\mathcal{S}(R^{n+m})$, так что $f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{S}'(R^{n+m})$ (ср. § 7.1).

Прямое произведение обобщенных функций медленного роста коммутативно и ассоциативно в $\mathcal{S}'$:

$$f(x) \cdot g(y) = g(y) \cdot f(x), \quad f(x) \cdot (g(y) \cdot h(z)) = (f(x) \cdot g(y)) \cdot h(z).$$

Эти утверждения вытекают из соответствующих свойств прямого произведения в $\mathcal{D}'$ (см. § 7.2 и § 7.3, б)) и из того факта, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{S}$ (см. § 8.2).

В частности, равенство $f(x) \cdot 1(y) = 1(y) \cdot f(x)$, где $f \in \mathcal{S}'(R^n)$, означает, что

$$(f, \int \varphi(x, y) dy) = \int (f, \varphi(x, y)) dy, \quad \varphi \in \mathcal{S}(R^{n+m}). \quad (15)$$

Наконец, прямое произведение $f(x) \cdot g(y)$ обобщенных функций $f \in \mathcal{S}'(R^n)$ и $g \in \mathcal{S}'(R^m)$ линейно и непрерывно

относительно f (из $\mathcal{S}'(R^n)$ в $\mathcal{S}'(R^{n+m})$) и относительно g (из $\mathcal{S}'(R^m)$ в $\mathcal{S}'(R^{n+m})$).

Доказательство аналогично соответствующему доказательству для пространства $\mathcal{D}'$ (см. § 7.3, а)).

6. **Свертка обобщенных функций медленного роста.** Пусть $f \in \mathcal{S}'$ и g — финитная обобщенная функция. Тогда свертка $f * g$ существует в $\mathcal{D}'$ (см. § 7.5). Докажем, что $f * g$ принадлежит $\mathcal{S}'$ и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \eta(y) \varphi(x + y)), \quad \varphi \in \mathcal{S}, \quad (16)$$

где η — любая функция из $\mathcal{D}$, равная 1 в окрестности носителя g .

Действительно, по теореме § 7.6 формула (16) справедлива на основных функциях φ из $\mathcal{D}$. Докажем, что правая часть равенства (16) определяет линейный непрерывный функционал на $\mathcal{S}$. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}(R^n)$. Тогда, в силу финитности функции η , $\eta(y) \varphi(x + y) \in \mathcal{S}(R^{2n})$, и так как $f(x) \cdot g(y)$ — линейный функционал на $\mathcal{S}(R^{2n})$, то правая часть (16) — линейный функционал на $\mathcal{S}(R^n)$. Докажем его непрерывность. Пусть $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}$. Тогда при любых α, β, γ

$$x^\alpha y^\beta D^\gamma [\eta(y) \varphi_k(x + y)] \xrightarrow{x \in R^n, y \in R^n} 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

и потому

$$\eta(y) \varphi_k(x + y) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{S}(R^{2n}).$$

Поскольку $f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{S}'(R^{2n})$ (см. § 8.5), то отсюда следует непрерывность правой части (16) на $\mathcal{S}(R^n)$:

$$(f(x) \cdot g(y), \eta(y) \varphi_k(x + y)) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Итак, $f * g \in \mathcal{S}'$.

Обозначим $\mathcal{S}'_+ = \mathcal{D}'_+ \cap \mathcal{S}'$, где $\mathcal{D}'_+$ — сверточная алгебра, определенная в § 7.7. Докажем, что если f и $g \in \mathcal{S}'_+$, то $f * g \in \mathcal{S}'_+$ и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = \int (f(t) \cdot g(\tau), \eta_1(t) \eta_2(\tau) \varphi(t + \tau)), \quad \varphi \in \mathcal{S}(R^1), \quad (17)$$

где η_1 и η_2 — любые функции класса $C^\infty(R^1)$, равные 1 в окрестности $[0, \infty)$ и 0 при больших отрицательных t .

Действительно, по теореме § 7.7 формула (17) справедлива на основных функциях φ из $\mathcal{D}(R^1)$. Докажем,

что правая часть равенства (17) определяет линейный непрерывный функционал на $\mathcal{S}(R^1)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}(R^1)$. Тогда, в силу свойства функций $\eta_1(t)$ и $\eta_2(\tau)$, $\eta_1(t)\eta_2(\tau) \times \varphi(t+\tau) \in \mathcal{S}(R^2)$ и правая часть (17) — линейный функционал на $\mathcal{S}(R^1)$. Докажем его непрерывность. Пусть $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}(R^1)$. Тогда, как и выше,

$$\eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi_k(t+\tau) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{S}(R^2).$$

Поскольку $f(t) \cdot g(\tau) \in \mathcal{S}^*(R^2)$ (см. § 8.5), то отсюда следует непрерывность правой части (17) на $\mathcal{S}(R^1)$. Итак, $f * g \in \mathcal{S}^*(R^1)$.

Мы видим, таким образом, что совокупность обобщенных функций $\mathcal{S}_+$ образует *оверточную алгебру* — подалгебру алгебры $\mathcal{S}'_+$ (см. § 7.7).

§ 9. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

Замечательное свойство класса обобщенных функций медленного роста состоит в том, что операция преобразования Фурье не выводит за пределы этого класса.

1. Преобразование Фурье основных функций из $\mathcal{S}$. Поскольку основные функции из $\mathcal{S}$ абсолютно интегрируемы на R^n , то на них определена операция преобразования Фурье F :

$$F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x) e^{i(\xi, x)} dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

При этом функция $F[\varphi](\xi)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(x)$ — ограничена и непрерывна в R^n . Основная функция $\varphi(x)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Поэтому ее преобразование Фурье можно дифференцировать под знаком интеграла любое число раз:

$$D^\alpha F[\varphi](\xi) = \int (ix)^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi, x)} dx = F[(ix)^\alpha \varphi](\xi), \quad (1)$$

откуда ясно, что $F[\varphi] \in C^\infty(R^n)$. Далее, такими же свойствами обладает каждая производная $D^\alpha \varphi$, а потому

$$F[D^\alpha \varphi](\xi) = \int D^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi, x)} dx = (-i\xi)^\alpha F[\varphi](\xi). \quad (2)$$

Наконец, из формул (1) и (2) получаем

$$\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi) = \xi^\beta F[(ix)^\alpha \varphi](\xi) = i^{\alpha+\beta} F[D^\beta(x^\alpha \varphi)](\xi). \quad (3)$$

Из равенства (3) вытекает, что при всех α и β величины $\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)$ равномерно ограничены по $\xi \in R^n$:

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)| \leq \int |D^\beta(x^\alpha \varphi)| dx. \quad (4)$$

Это значит, что $F[\varphi] \in \mathcal{S}'$ (см. § 8.1). Итак, преобразование Фурье переводит пространство $\mathcal{S}$ в себя.

Отметим, что пространство основных функций $\mathcal{S}$ преобразование Фурье в себя не переводит, поскольку преобразование Фурье финитной функции есть аналитическая функция и, стало быть, либо не финитна, либо нуль.

Так как преобразование Фурье $F[\varphi]$ функции φ из $\mathcal{S}$ есть интегрируемая и непрерывно дифференцируемая функция на R^n , то, как это следует из общей теории преобразования Фурье*, функция $\varphi(x)$ выражается через ее преобразование Фурье $F[\varphi](\xi)$ с помощью операции обратного преобразования Фурье F^{-1} :

$$\varphi(x) = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} F^{-1}[\varphi](x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \varphi(\xi) e^{-i(\xi, x)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\varphi](-x) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \varphi(-\xi) e^{i(\xi, x)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\varphi(-\xi)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) следует, что всякая функция φ из $\mathcal{S}$ есть преобразование Фурье функции $\psi = F^{-1}[\varphi]$ из $\mathcal{S}$. $\varphi = F[\psi]$, и если $F[\varphi] = 0$, то и $\varphi = 0$. Это значит, что преобразование Фурье F преобразует $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}$ и при этом взаимно однозначно.

Лемма. Операция преобразования Фурье F непрерывна из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$.

Доказательство. Пусть $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}$. Тогда, применяя (4) к функциям φ_k , при всех α и β получим

$$\begin{aligned} |\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| &\leq \int |D^\beta(x^\alpha \varphi_k)| dx \leq \\ &\leq \sup_{x \in R^n} |D^\beta(x^\alpha \varphi_k)| (1 + |x|)^{n+1} \int \frac{dx}{(1 + |x|)^{n+1}}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k]| \xrightarrow{\xi \in R^n} 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

т. е. $F[\varphi_k] \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}'$ (см. § 8.1). Лемма доказана.

* См., например, Л. Д. Кудрявцев [1], гл. VII.

Аналогичными свойствами обладает и операция обратного преобразования Фурье F^{-1} .

2. Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathcal{S}'$. Пусть сперва $f(x)$ — (абсолютно) интегрируемая функция на R^n . Тогда ее преобразование Фурье

$$F[f](\xi) = \int f(x) e^{i(\xi, x)} dx, \quad |F[f](\xi)| \leq \int |f(x)| dx < \infty,$$

является непрерывной, ограниченной в R^n функцией и, следовательно, определяет обобщенную функцию из $\mathcal{S}'$:

$$(F[f], \varphi) = \int F[f](\xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Пользуясь теоремой Фубини (см. § 1.4, h) о перемене порядка интегрирования, преобразуем последний интеграл:

$$\begin{aligned} \int F[f](\xi) \varphi(\xi) d\xi &= \int \left| \int f(x) e^{i(\xi, x)} dx \right| \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \int f(x) \int \varphi(\xi) e^{i(\xi, x)} d\xi dx = \int f(x) F[\varphi](x) dx, \end{aligned}$$

т. е.

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Это равенство мы и примем за определение преобразования Фурье $F[f]$ любой обобщенной функции медленного роста f :

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad f \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}. \quad (7)$$

Проверим, что правая часть этого равенства определяет линейный непрерывный функционал на $\mathcal{S}$, т. е. что $F[f] \in \mathcal{S}'$. Действительно, так как $F[\varphi] \in \mathcal{S}$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}$ (см. § 9.1), то $(f, F[\varphi])$ есть функционал (очевидно, линейный) на $\mathcal{S}$. Пусть $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}$. По лемме § 9.1 $F[\varphi_k] \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}$, и потому, в силу $f \in \mathcal{S}'$, $(f, F[\varphi_k]) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, так что функционал $(f, F[\varphi])$ — непрерывный на $\mathcal{S}$.

Таким образом, операция преобразования Фурье F переводит пространство $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$.

Более того, F — линейная и непрерывная операция из $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$.

Линейность F очевидна. Докажем ее непрерывность. Пусть $f_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}'$. Тогда, в силу (7), при всех $\varphi \in \mathcal{S}$ получим

$$(F[f_k], \varphi) = (f_k, F[\varphi]) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

Это и означает, что $F[f_k] \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{S}'$, т. е. операция F непрерывна из $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$.

Введем в $\mathcal{S}'$ еще одну операцию преобразования Фурье, которую обозначим через F^{-1} :

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)], \quad f \in \mathcal{S}'. \quad (8)$$

Докажем, что операция F^{-1} является обратной к операции преобразования Фурье F , т. е.

$$F^{-1}[F[f]] = f, \quad F[F^{-1}[f]] = f, \quad f \in \mathcal{S}'. \quad (9)$$

Действительно, из (5) — (8) при всех $\varphi \in \mathcal{S}$ получаем равенства

$$\begin{aligned} (F^{-1}[F[f]], \varphi) &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[F[f]](-\xi), \varphi) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f](-\xi), F[\varphi]) = \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f], F[\varphi](-\xi)) = \\ &= (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) = (f, \varphi) = \\ &= (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (F^{-1}[f], \varphi), \end{aligned}$$

откуда и вытекают формулы (9).

Из формул (9) следует, что всякая обобщенная функция f из $\mathcal{S}'$ есть преобразование Фурье обобщенной функции $g = F^{-1}[f]$ из $\mathcal{S}'$, $f = F[g]$, и если $F[f] = 0$, то и $f = 0$. Таким образом, мы доказали, что преобразования Фурье F и F^{-1} преобразуют $\mathcal{S}'$ на $\mathcal{S}'$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Пусть $f(x, y) \in \mathcal{S}'(R^{n+m})$, где $x \in R^n$, $y \in R^m$. Введем преобразование Фурье $F_x[f]$ по переменным $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, положив для любой $\varphi(\xi, y) \in \mathcal{S}(R^{n+m})$

$$(F_x[f], \varphi) = (f, F_x[\varphi]). \quad (10)$$

Как и в лемме § 9.1, устанавливается, что

$$F_x[\varphi](x, y) = \int \varphi(\xi, y) e^{i(\xi, x)} d\xi \in \mathcal{S}(R^{n+m})$$

и операция $F_x[\varphi]$ непрерывна из $\mathcal{S}(R^{n+m})$ в $\mathcal{S}(R^{n+m})$, так что формула (10) действительно определяет обобщенную функцию $F_x[f](\xi, y)$ из $\mathcal{S}'(R^{n+m})$.

Пример. Покажем, что

$$F[\delta(x - x_0)] = e^{i(\xi, x_0)}, \quad (11)$$

Действительно,

$$(F[\delta(x-x_0)], \varphi) = (\delta(x-x_0), F[\varphi]) = F[\varphi](x_0) = \\ = \int \varphi(\xi) e^{i(x_0-\xi)} d\xi = (e^{i(x_0-\cdot)}, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Полагая в (11) $x_0=0$, получим

$$F[\delta] = 1, \quad (12)$$

откуда

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

так что

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi). \quad (13)$$

3. Свойства преобразования Фурье.

а) Дифференцирование преобразования Фурье. Если $f \in \mathcal{S}'$, то

$$D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f]. \quad (14)$$

Действительно, пользуясь (2), при всех $\varphi \in \mathcal{S}$ получим

$$(D^\alpha F[f], \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (F[f], D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, F[D^\alpha \varphi]) = \\ = (-1)^{|\alpha|} (f, (-ix)^\alpha F[\varphi]) = ((ix)^\alpha f, F[\varphi]) = (F[(ix)^\alpha f], \varphi),$$

откуда и следует формула (14).

В частности, полагая в (14) $f=1$ и пользуясь формулой (13), имеем

$$F[x^\alpha] = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi). \quad (15)$$

б) Преобразования Фурье производной. Если $f \in \mathcal{S}'$, то

$$F[D^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha F[f]. \quad (16)$$

В самом деле, пользуясь формулой (1), при всех $\varphi \in \mathcal{S}$ получим

$$(F[D^\alpha f], \varphi) = (D^\alpha f, F[\varphi]) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha F[\varphi]) = \\ = (-1)^{|\alpha|} (f, F[(i\xi)^\alpha \varphi]) = (-1)^{|\alpha|} (F[f], (i\xi)^\alpha \varphi) = \\ = ((-i\xi)^\alpha F[f], \varphi),$$

откуда и следует формула (16).

В частности, полагая в (16) $f=\delta$ и пользуясь формулой (12), имеем

$$F[D^\alpha \delta] = (-i\xi)^\alpha F[\delta] = (-i\xi)^\alpha. \quad (17)$$

с) Преобразование Фурье сдвига. Если $f \in \mathcal{S}'$, то

$$F[f(x-x_0)] = e^{i(x_0, \cdot)} F[f]. \quad (18)$$

Действительно, при всех $\varphi \in \mathcal{S}$ имеем

$$(F[f(x-x_0)], \varphi) = (f(x-x_0), F[\varphi]) = (f, F[\varphi](x+x_0)) = \\ = (f, F[\varphi e^{i(x_0, \cdot)}]) = (F[f], e^{i(x_0, \cdot)} \varphi) = (e^{i(x_0, \cdot)} F[f], \varphi),$$

откуда и следует формула (18).

д) Сдвиг преобразования Фурье. Если $f \in \mathcal{S}'$, то

$$F[f](\xi + \xi_0) = F[e^{i(\xi_0, \cdot)} f](\xi). \quad (19)$$

В самом деле, пользуясь формулой (18), при всех $\varphi \in \mathcal{S}$ получим

$$(F[f](\xi + \xi_0), \varphi) = (F[f], \varphi(\xi - \xi_0)) = (f, F[\varphi(\xi - \xi_0)]) = \\ = (f, e^{i(\xi_0, \cdot)} F[\varphi]) = (e^{i(\xi_0, \cdot)} f, F[\varphi]) = (F[e^{i(\xi_0, \cdot)} f], \varphi),$$

откуда и следует формула (19).

е) Преобразование Фурье подобия (с отражением). Если $f \in \mathcal{S}'$, то при всех вещественных $c \neq 0$

$$F[f(cx)](\xi) = \frac{1}{|c|^n} F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \quad (20)$$

поскольку при всех $\varphi \in \mathcal{S}$ имеем (см. § 5.9)

$$(F[f(cx)], \varphi) = (f(cx), F[\varphi]) = \frac{1}{|c|^n} (f, F[\varphi]\left(\frac{x}{c}\right)) = \\ = \frac{1}{|c|^n} (f, \int \varphi(\xi) e^{i(\frac{x}{c}, \xi)} d\xi) = (f, \int \varphi(c\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi) = \\ = (f, F[\varphi(c\xi)]) = (F[f], \varphi(c\xi)) = \frac{1}{|c|^n} (F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \varphi).$$

ф) Преобразование Фурье прямого произведения. Если $f \in \mathcal{S}'(R^n)$ и $g \in \mathcal{S}'(R^m)$, то

$$F[f(x) \cdot g(y)] = F_x[f(x)] \cdot F_y[g(y)] = \\ = F_x[F[f](\xi) \cdot g(y)] = F[f](\xi) \cdot F[g](\eta). \quad (21)$$

Действительно, при всех $\varphi(\xi, \eta) \in \mathcal{S}(R^{n+m})$ имеем

$$\begin{aligned} (F[f(x) \cdot g(y)], \varphi) &= (f(x) \cdot g(y), F[\varphi]) = \\ &= (f(x), (g(y), F_2[\varphi])) = (f(x), (F[g], F_1[\varphi])) = \\ &= (f(x), F[g](\eta), F_1[\varphi]) = (F_x[f(x) \cdot F[g](\eta)], \varphi) = \\ &= (F[g](\eta), (f(x), F_1[\varphi])) = (F[g](\eta), (F[f](\xi), \varphi)) = \\ &= (F[f](\xi) \cdot F[g](\eta), \varphi), \end{aligned}$$

откуда и следуют равенства (21).

г) Аналогичные формулы справедливы и для преобразования Фурье F_x , например: если $f(x, y) \in \mathcal{S}'(R^{n+m})$, то

$$\begin{aligned} D_x^\alpha D_y^\beta F_x[f] &= F_x[(ix)^\alpha D_x^\alpha f], \\ F_x[D_x^\alpha D_y^\beta f] &= (-i\xi)^\alpha D_x^\alpha F_x[f]. \end{aligned} \quad (22)$$

4. Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем.

Теорема. Если f — финитная обобщенная функция, то ее преобразование Фурье принадлежит классу $\mathcal{G}_M$ и представляется формулой

$$F[f](\xi) = (f(x), \eta(x) e^{i(x, \xi)}), \quad (23)$$

где η — любая функция из $\mathcal{D}$, равная 1 в окрестности носителя f .

Доказательство. Учитывая равенства (6) § 8.3 и (16) § 9.3, при всех $\varphi \in \mathcal{S}$ получаем

$$\begin{aligned} (D^\alpha F[f], \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} (F[f], D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, F[D^\alpha \varphi]) = \\ &= (-1)^{|\alpha|} (f, \eta(x) (-ix)^\alpha F[\varphi]) = \\ &= (f(x), \int \eta(x) (ix)^\alpha \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi). \end{aligned}$$

Замечая теперь, что

$$\eta(x) (ix)^\alpha \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} \in \mathcal{S}(R^{2n}),$$

и пользуясь формулой (15) § 8.5:

$$(f(x), \int \eta(x) (ix)^\alpha \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi) = \int (f, \eta(x) (ix)^\alpha e^{i(x, \xi)}) \varphi(\xi) d\xi,$$

из предыдущих равенств выводим равенство

$$(D^\alpha F[f], \varphi) = \int (f, \eta(x) (ix)^\alpha e^{i(x, \xi)}) \varphi(\xi) d\xi,$$

из которого вытекает, что

$$D^\alpha F[f](\xi) = (f, \eta(x) (ix)^\alpha e^{i(x, \xi)}). \quad (24)$$

Отсюда при $\alpha = 0$ следует формула (23).

Из представления (24), как и при доказательстве леммы § 7.1, выводим, что $D^\alpha F[f] \in C(R^n)$, так что $F[f] \in C^\infty(R^n)$. Далее, по теореме Л. Шварца (см. § 8.2) существуют такие числа $C > 0$ и $p \geq 0$ (p — целое), при которых справедливо неравенство (3) § 8.2. Применяя это неравенство к правой части равенства (24), получаем оценку

$$\begin{aligned} |D^\alpha F[f](\xi)| &= |(f, \eta(x) (ix)^\alpha e^{i(x, \xi)})| \leq C |\eta(x) (ix)^\alpha e^{i(x, \xi)}|_p = \\ &= C \sup_{|x| \leq R, x \in R^n} (1 + |x|)^p |D^\beta [\eta(x) x^\alpha e^{i(x, \xi)}]| \leq \\ &\leq C_n (1 + |\xi|)^p, \quad \xi \in R^n, \end{aligned}$$

из которой и вытекает, что $F[f] \in \mathcal{G}_M$ (см. § 8.1). Теорема доказана.

5. Преобразование Фурье свертки. Пусть $f \in \mathcal{S}'$ и g — финитная обобщенная функция. Тогда

$$F[f * g] = F[g] F[f]. \quad (25)$$

Действительно, в силу § 8.6 свертка $f * g \in \mathcal{S}'$ и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(x), (g(y), \eta(y) \varphi(x + y))), \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

где $\eta \in \mathcal{D}$, $\eta = 1$ в окрестности $\text{supp } g$. Учитывая это представление, при всех $\varphi \in \mathcal{S}$ получаем

$$\begin{aligned} (F[f * g], \varphi) &= (f * g, F[\varphi]) = \\ &= (f(x), (g(y), \eta(y) \int \varphi(\xi) e^{i(x + y, \xi)} d\xi)). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что, по теореме § 9.4, $F[g] \in \mathcal{G}_M$, и пользуясь формулами (15) § 8.5 и (23), преобразуем полученное равенство:

$$\begin{aligned} (F[f * g], \varphi) &= (f, \int (g, \eta(y) e^{i(y, \xi)}) e^{i(x, \xi)} \varphi(\xi) d\xi) = \\ &= (f, \int F[g](\xi) \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi) = (f, F[F[g] \varphi]) = \\ &= (F[f], F[g] \varphi) = (F[g] F[f], \varphi), \end{aligned}$$

откуда и вытекает формула (25).

6. Примеры, $n = 1$.

$$a) \quad F[\theta(R - |x|)] = \int_{-R}^R e^{ix\xi} dx = 2 \frac{\sin R\xi}{\xi}. \quad (26)$$

$$b) \quad F[e^{-\alpha|x|}] = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}}. \quad (27)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} F[e^{-a^2 x^2}] &= \int e^{-a^2 x^2 + i\zeta x} dx = \frac{1}{a} \int e^{-a^2 + i \frac{\zeta}{a} \sigma} d\sigma = \\ &= \frac{1}{a} e^{-\frac{\zeta^2}{4a^2}} \int e^{-(\sigma + \frac{i\zeta}{2a})^2} d\sigma = \frac{1}{a} e^{-\frac{\zeta^2}{4a^2}} \int_{\text{Im } \zeta = \frac{\zeta}{2a}} e^{-\tau^2} d\tau. \end{aligned}$$

Осталось доказать, что линия интегрирования $\text{Im } \zeta = \frac{\zeta}{2a}$ в последнем интеграле может быть сдвинута на вещественную ось, т. е. что при всех a

$$\int_{\text{Im } \zeta = a} e^{-\tau^2} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\pi}. \quad (28)$$

По теореме Коши при любом $R > 0$ имеем

$$\int_{C_R} e^{-\tau^2} d\tau = 0, \quad \zeta = \sigma + i\tau, \quad (29)$$

где контур $C_R = C_R' \cup C_R'' \cup I_R' \cup I_R''$ изображен на рис. 36.



Рис. 36.

Но из отрезков $I_R^{\pm} = [0 \leq \tau \leq a, \sigma = \pm R]$

$$|e^{-\tau^2}| = |e^{-\sigma^2 + \tau^2 - 2i\sigma\tau}| = e^{-R^2 + \tau^2} \frac{\tau \sin |2\sigma\tau|}{2\sigma\tau} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty,$$

а потому справедливо равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{I_R'} + \int_{I_R''} \right) e^{-\tau^2} d\tau = 0,$$

откуда, пользуясь (29), получаем равенство (28):

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{-\tau^2} d\tau &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{C_R'} + \int_{C_R''} \right) e^{-\tau^2} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = 0. \end{aligned}$$

$$c) \quad F[e^{i\zeta^2}] = \sqrt{\pi} e^{-\frac{i}{4}(\zeta^2 - \pi)}. \quad (30)$$

Действительно, из сходимости несобственного интеграла (интеграла Френеля)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy^2} dy = \sqrt{\pi} e^{\frac{i\pi}{4}}$$

вытекает равномерная сходимость по ξ на каждом конечном интервале несобственного интеграла

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta^2 + i\tau^2} dx &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \int_{-M}^N e^{i\zeta^2 + i\tau^2} dx = \\ &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \int_{-M}^N e^{i(x + \frac{\zeta}{2})^2} - \frac{i}{4}\tau^2 dx = e^{-\frac{i}{4}\tau^2} \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \int_{-M + \frac{\zeta}{2}}^{N + \frac{\zeta}{2}} e^{iy^2} dy = \\ &= e^{-\frac{i}{4}\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy^2} dy = \sqrt{\pi} e^{-\frac{i}{4}(\zeta^2 - \pi)}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали равенство (30) поточечно при условии, что преобразование Фурье понимается как несобственный интеграл. Докажем справедливость этого равенства в $\mathcal{S}'$. Пользуясь полученным результатом, при всех $\varphi \in \mathcal{S}$, $\text{supp } \varphi \subset (-R, R)$ имеем

$$\begin{aligned} (F[e^{i\zeta^2}], \varphi) &= (e^{i\zeta^2}, F[\varphi]) = \\ &= \int e^{i\zeta^2} F[\varphi](x) dx = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \int_{-M}^N e^{i\zeta^2} \int_{-R}^R \varphi(\xi) e^{i\zeta\xi} d\xi d\zeta = \\ &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \int_{-R}^R \varphi(\xi) \int_{-M}^N e^{i\zeta^2 + i\zeta\xi} d\zeta d\xi = \\ &= \int_{-R}^R \varphi(\xi) \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \int_{-M}^N e^{i\zeta^2 + i\zeta\xi} d\zeta d\xi = \sqrt{\pi} e^{\frac{i\pi}{4}} \int \varphi(\xi) e^{-\frac{i}{4}\xi^2} d\xi, \end{aligned}$$

откуда заключаем о справедливости равенства (30) на основных функциях из $\mathcal{D}$. Но $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{S}$ (см. § 8.1). Поэтому это равенство справедливо на основных функциях из $\mathcal{S}$.

$$d) \quad F[\theta] = \pi \delta(\xi) + i\mathcal{P} \frac{1}{\xi}, \quad (31)$$

$$F[\theta(-x)] = \pi \delta(\xi) - i\mathcal{P} \frac{1}{\xi}. \quad (31')$$

Действительно, при всех $a > 0$ имеем

$$F[\theta(x)e^{-ax}] = \int_0^\infty e^{-ax+ix\xi} dx = \frac{1}{\xi + ia}. \quad (32)$$

Так как

$$\theta(x)e^{-ax} \rightarrow \theta(x), \quad a \rightarrow +0 \quad \text{в } \mathcal{S}',$$

то, переходя к пределу при $a \rightarrow +0$ в формуле (32) и пользуясь непрерывностью на $\mathcal{S}'$ преобразования Фурье (см. § 9.2), выводим:

$$F[\theta] = \frac{1}{\xi + i0}. \quad (33)$$

Применяя теперь формулу Сохоцкого (10) § 5.8, получаем равенство (31). Равенство (31') устанавливается аналогично.

$$e) \quad F\left[\mathcal{P} \frac{1}{|x|}\right] = -2C - 2 \ln |\xi|, \quad (34)$$

где C — постоянная Эйлера,

$$C = \int_0^1 \frac{1 - \cos u}{u} du - \int_1^\infty \frac{\cos u}{u} du,$$

и обобщенная функция $\mathcal{P} \frac{1}{|x|}$ определена в § 6.6, б).

Действительно, при всех $\varphi \in \mathcal{S}$ имеем

$$\begin{aligned} \left(F\left[\mathcal{P} \frac{1}{|x|}\right], \varphi\right) &= \left(\mathcal{P} \frac{1}{|x|}, F[\varphi]\right) = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{F[\varphi](x) - F[\varphi](0)}{x} dx + \int_{|x|>1} \frac{F[\varphi](x)}{|x|} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{|x|} \int \varphi(\xi) (e^{ix\xi} - 1) d\xi dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|} \int \varphi(\xi) e^{ix\xi} d\xi dx = \\ &= 2 \int_0^1 \int \varphi(\xi) \frac{\cos x\xi - 1}{x} d\xi dx + 2 \int_1^\infty \int \varphi(\xi) \frac{\cos x\xi}{x} d\xi dx = \\ &= 2 \int \varphi(\xi) \int_0^1 \frac{\cos x\xi - 1}{x} dx d\xi - 2 \int \varphi'(\xi) \int_1^\infty \frac{\sin x\xi}{x^2} d\xi dx = \\ &= 2 \int \varphi(\xi) \int_0^{\frac{1}{|\xi|}} \frac{\cos u - 1}{u} du d\xi - 2 \int \varphi'(\xi) \int_1^\infty \frac{\sin x\xi}{x^2} dx d\xi = \\ &= 2 \int \varphi(\xi) \left[\int_0^{\frac{1}{|\xi|}} \frac{\cos u - 1}{u} du + \frac{d}{d\xi} \int_1^\infty \frac{\sin x\xi}{x^2} dx \right] d\xi = \\ &= -2 \int \varphi(\xi) (C + \ln |\xi|) d\xi, \end{aligned}$$

откуда и вытекает формула (34).

г) В § 6.4, d) было установлено равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}. \quad (35)$$

Нетрудно видеть, что ряды в равенстве (35) сходятся в $\mathcal{S}'$. Пользуясь формулой (11), перепишем равенство (35) в виде

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\delta(x - k)].$$

Применяя это равенство к $\varphi \in \mathcal{S}$, получим

$$\begin{aligned} 2\pi \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-2\pi k), \varphi \right) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(x-2\pi k), \varphi) = \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi k) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\delta(x-k)], \varphi \right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(x-k), F[\varphi]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\varphi](k), \end{aligned}$$

т. е.

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\varphi](k). \quad (36)$$

Равенство (36) называется *формулой суммирования Пуассона*.

Полагая в формуле (36)

$$\varphi(x) = e^{-\frac{ix^2}{4t}}, \quad F[\varphi](\xi) = \frac{2\pi\sqrt{t}}{\sqrt{i}} e^{-\frac{t\xi^2}{i}}, \quad t > 0,$$

получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ik^2}{t}} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 k^2}{t}}. \quad (37)$$

Формула (37) применяется в теории эллиптических функций.

7. Примеры, $n \geq 2$.

а) Пусть квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = (Ax, x), \quad A = (a_{ij}),$$

вещественна и положительно определена:

$$(Ax, x) \geq \sigma |x|^2, \quad \sigma > 0.$$

Тогда

$$F[e^{-(Ax, x)}] = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{4}(\xi, A^{-1}\xi)}. \quad (38)$$

Для получения формулы (38) с помощью неособенного вещественного преобразования $x = By$ приведем квадратичную форму (Ax, x) к диагональному виду

$$(Ax, x) = (AB y, B y) = (B' A B y, y) = |y|^2,$$

так что

$$A^{-1} = B B', \quad \det A (\det B)^2 = 1.$$

Отсюда, пользуясь формулой (25), получаем

$$\begin{aligned} F[e^{-(Ax, x)}] &= \int e^{-(Ax, x) + i(\xi, x)} dx = \\ &= |\det B| \int e^{-(AB y, B y) + i(\xi, B y)} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \int e^{-|y|^2 + i(B'\xi, y)} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \prod_{j=1}^n \int e^{-y_j^2 - i(B'\xi)_j y_j} dy_j = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{4}(\xi, A^{-1}\xi)} = \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{4}(\xi, B B'\xi)} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{4}(\xi, A^{-1}\xi)}. \end{aligned}$$

б) Аналогично, пользуясь формулой (30), получим

$$F[e^{i(Ax, x)}] = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{i\pi n}{4}} e^{-\frac{1}{4}(\xi, A^{-1}\xi)}. \quad (39)$$

в) Пусть $\delta_{S_R}(x)$ — простой слой на сфере S_R в R^n . Тогда

$$F[\delta_{S_R}] = 4\pi R \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}. \quad (40)$$

Действительно, так как δ_{S_R} — финитная обобщенная функция, то, применяя формулу (23), получим

$$\begin{aligned} F[\delta_{S_R}] &= (\delta_{S_R}(x), \eta(x) e^{i(\xi, x)}) = \int_{S_R} \eta(x) e^{i(\xi, x)} dS_x = \\ &= R^n \int_{S_1} e^{iR(\xi, s)} ds = R^n \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{iR|\xi| \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= 4\pi R \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}. \end{aligned}$$

д) Пусть $n=2$. Введем обобщенную функцию $\mathcal{P} \frac{1}{|x|^2}$ из $\mathcal{S}'$, положив при $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\left(\mathcal{P} \frac{1}{|x|^2}, \varphi \right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^2} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2} dx.$$

Тогда

$$F\left(\mathcal{F}\frac{1}{|x|^2}\right) = -2\pi \ln|\xi| - 2\pi C_0, \quad (41)$$

где

$$C_0 = \int_0^1 \frac{1-J_0(u)}{u} du - \int_1^\infty \frac{J_0(u)}{u} du$$

и J_0 — функция Бесселя (см. ниже, § 23).

Действительно, при всех $\varphi \in \mathcal{S}$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} (F[\mathcal{F}\frac{1}{|x|^2}], \varphi) &= (\mathcal{F}\frac{1}{|x|^2}, F[\varphi]) = \\ &= \int_{|x|<1} \frac{F[\varphi](x) - F[\varphi](0)}{|x|^2} dx + \int_{|x|>1} \frac{F[\varphi](x)}{|x|^2} dx = \\ &= \int_{|x|<1} \frac{1}{|x|^2} \int \varphi(\xi) [e^{i(x, \xi)} - 1] d\xi dx + \\ &\quad + \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^2} \int \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{r} \int \varphi(\xi) \int_0^{2\pi} (e^{ir|\xi|\cos\theta} - 1) d\theta d\xi dr + \\ &\quad + \int_1^\infty \frac{1}{r} \int \varphi(\xi) \int_0^{2\pi} e^{ir|\xi|\cos\theta} d\theta d\xi dr = \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r} \int \varphi(\xi) [J_0(r|\xi|) - 1] d\xi dr + \\ &\quad + 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{r} \int \varphi(\xi) J_0(r|\xi|) d\xi dr = \\ &= 2\pi \int \varphi(\xi) \left[\int_0^1 \frac{J_0(r|\xi|) - 1}{r} dr + \int_1^\infty \frac{J_0(r|\xi|)}{r} dr \right] d\xi = \\ &= 2\pi \int \varphi(\xi) \left[\int_0^{|\xi|} \frac{J_0(u) - 1}{u} du + \int_{|\xi|}^\infty \frac{J_0(u)}{u} du \right] d\xi = \\ &= -2\pi \int \varphi(\xi) (C_0 + \ln|\xi|) d\xi, \end{aligned}$$

откуда и вытекает равенство (41).

$$e) \quad F\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{2\pi i}{\xi}, \quad \xi = \xi + i\eta. \quad (42)$$

Применяя к обеим частям равенства (44) § 6.5 преобразование Фурье, получим

$$F\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{x}\right] = -\frac{i}{2} F\left[\frac{1}{x}\right] = \pi F[\delta] = \pi.$$

Так как $\frac{1}{x}$ — локально интегрируемая функция в R^2 , то последнее равенство можно разделить на ξ в $\mathcal{S}'(R^2)$. В результате получим формулу (42).

$$f) \quad F\left[\frac{0(R-|x|)}{\sqrt{R^2-|x|^2}}\right] = 2\pi \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}, \quad n=2. \quad (43)$$

Действительно

$$\begin{aligned} F\left[\frac{0(R-|x|)}{\sqrt{R^2-|x|^2}}\right] &= \int_{|x|<R} \frac{e^{i(x, \xi)}}{\sqrt{R^2-|x|^2}} dx = \\ &= \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}} \int_0^{2\pi} e^{ir|\xi|\cos\theta} d\theta dr = 2\pi \int_0^R \frac{r J_0(r|\xi|)}{\sqrt{R^2-r^2}} dr = \\ &= 2\pi R \int_0^1 J_0(R|\xi|u) \frac{u du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\pi \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой 6.554, 2) из справочника И. С. Градштейна и И. М. Рыжика [1].

$$g) \quad F\left[\frac{1}{|x|^3}\right] = \frac{2\pi^2}{|\xi|}, \quad n=3. \quad (44)$$

Учитывая, что функция $|x|^{-2}$ локально интегрируема в R^3 , при всех $\varphi \in \mathcal{S}$ получаем следующую цепочку

равенств:

$$\begin{aligned} \left(F\left[\frac{1}{|x|^2}\right], \varphi \right) &= \left(\frac{1}{|x|^2}, F[\varphi] \right) = \int \frac{1}{|x|^2} F[\varphi] dx = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| < R} \frac{1}{|x|^2} \int \varphi(\xi) e^{i(\xi, x)} d\xi dx = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int \varphi(\xi) \int_{|x| < R} \frac{e^{i(\xi, x)}}{|x|^2} dx d\xi = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int \varphi(\xi) \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{e^{i|\xi| \rho \cos \theta}}{\rho^2} \rho^2 d\varphi \sin \theta d\theta d\rho d\xi = \\ &= 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int \varphi(\xi) \int_0^R \int_{-1}^1 e^{i|\xi| \rho \cos \theta} d\mu d\rho d\xi = \\ &= 4\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|} \int_0^R \frac{\sin |\xi| \rho}{\rho} d\rho d\xi. \quad (45) \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \left| \int_0^R \frac{\sin |\xi| \rho}{\rho} d\rho \right| &= \\ &= \left| \frac{\cos |\xi| R}{R} - \int_0^R \frac{\cos |\xi| \rho}{\rho^2} d\rho \right| \leq \frac{1}{R} + \int_0^R \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{2}{R}, \end{aligned}$$

то возможен предельный переход при $R \rightarrow \infty$ под знаком интеграла в последнем члене равенств (45). В результате, учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin |\xi| \rho}{\rho} d\rho = \frac{\pi}{2}, \quad |\xi| \neq 0,$$

получим

$$\left(F\left[\frac{1}{|x|^2}\right], \varphi \right) = 4\pi \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|} |\xi| \int_0^\infty \frac{\sin |\xi| \rho}{\rho} d\rho d\xi = 2\pi^2 \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|} d\xi,$$

откуда и следует формула (44).

8. Упражнения. Пользуясь формулами (31) и (31') и равенством $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2}\right] = -\left(\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right]\right)'$ (см. § 6.6 а)), показать, что

а) $F[\operatorname{sign} x] = 2i \mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right], \quad F\left[\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right]\right] = i\pi \operatorname{sign} \xi;$

б) $F\left[\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2}\right]\right] = -\pi |\xi|, \quad F[|x|] = -2\mathcal{F}\left[\frac{1}{\xi^2}\right];$

в) $F[\delta(x)] = -i\pi \delta'(\xi) - \mathcal{F}\left[\frac{1}{\xi^2}\right];$

г) Доказать, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x-k), \quad |a_k| \leq c(1+|k|)^m$$

сходится в $\mathcal{S}'(R^1)$ и

$$F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\xi}.$$

е) Пользуясь теоремой § 8.4, доказать: если $f \in \mathcal{S}'(R^n)$ сферически-симметрична (т. е. $f(Ax) = f(x)$ для всех вращений A в R^n) или лоренцинвариантна (см. § 5.9) и $\operatorname{supp} f = \{0\}$, то соответственно $f(x) = P(\Delta) \delta(x)$ или $f(x) = P(\square) \delta(x)$, где P — некоторый полином.

д) Пусть $f \in \mathcal{S}'(R^n)$ и $\operatorname{supp} f \subset \bar{U}_a$; пусть далее η — любая функция класса $\mathcal{S}(R^n)$, равная 1 в окрестности носителя f . Доказать, что функция

$$\tilde{f}(z) = (f(\xi), \eta(\xi) e^{i(z, \xi)}), \quad z = (z_1, \dots, z_n) = x + iy \quad (46)$$

не зависит от η , целая и удовлетворяет при некотором $m \geq 0$ и любом $\varepsilon > 0$ оценке

$$|\tilde{f}(x + iy)| \leq C e^{(\varepsilon + m)|y|} (1 + |x|)^m. \quad (47)$$

Обратно, если целая функция $\tilde{f}(z)$ удовлетворяет при любом $\varepsilon > 0$ оценке (47), то существует (единственная) $f \in \mathcal{S}'(R^n)$, $\operatorname{supp} f \subset \bar{U}_a$ такая, что имеет место представление (46) (теорема Пейли — Винера — Шварца).

§ 10. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление)

Метод преобразования Лапласа является одним из мощных средств для решения задач математической физики. В приложениях, например в теории электрических цепей, этот метод часто называют операционным исчислением (Хевисайда). Основы теории преобразования Лапласа обобщенных функций заложены Л. Шварцем [3] и Лионсом [1]. В целях простоты мы ограничимся здесь изложением тео-

рин преобразования Лапласа обобщенных функций с одной независимой переменной. *)

1. Преобразование Лапласа локально интегрируемых функций. Пусть $f(t)$ — локально интегрируемая функция в R^1 , $f(t) = 0$, $t < 0$ и

$$|f(t)| \leq Ae^{\sigma t} \text{ при } t \rightarrow +\infty. \quad (1)$$

Интеграл

$$\mathcal{F}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad p = \sigma + i\omega, \quad (2)$$

называется преобразованием Лапласа функции f .

Функция $\mathcal{F}(p)$ — аналитическая в полуплоскости $\sigma > a$, причем $\mathcal{F}(p) \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow +\infty$.

Действительно, в полуплоскости $\sigma > a$ подынтегральная функция в (2), в силу (1), имеет оценку

$$|f(t) e^{-pt}| \leq Ae^{-(\sigma-a)t}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

и, следовательно, абсолютно интегрируема. Поэтому интеграл (2) сходится равномерно по всякой замкнутой полуплоскости $\sigma \geq a + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, определяя тем самым аналитическую функцию $\mathcal{F}(p)$ при $\sigma > a$, стремящуюся к 0 при $\sigma \rightarrow +\infty$ равномерно по ω .

Формула (2) в терминах преобразования Фурье принимает вид

$$\mathcal{F}(p) = F[f(t) e^{-at}](-i\omega), \quad \sigma > a.$$

Эту формулу мы и примем за исходную при определении преобразования Лапласа обобщенных функций.

Пример.

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}, \quad \sigma > 0. \quad (3)$$

2. Преобразование Лапласа обобщенных функций. Обозначим через $\mathcal{D}'_+(a)$ совокупность обобщенных функций $f(t)$ из $\mathcal{D}'_+$ (см. § 7.7), обладающих тем свойством,

*) См. также В. А. Дяткин и А. П. Прудников [1] и Ю. А. Брычков и А. П. Прудников [1].

$$f(t) e^{-at} \in \mathcal{D}'_+ \text{ при всех } \sigma > a^*). \quad (4)$$

Определение $\mathcal{D}'_+$ см. в § 8.6; $\mathcal{D}'_+$ — сверточная алгебра. Очевидно, что $\mathcal{D}'_+(a_1) \subset \mathcal{D}'_+(a_2)$, если $a_1 \leq a_2$.

Справедливо включение: $\mathcal{D}'_+ \subset \mathcal{D}'_+(0)$.

Действительно, если $f \in \mathcal{D}'_+$, $\text{supp } f \subset [0, \infty)$, η — любая функция класса C^∞ со свойствами: $\eta(t) = 0$, $t < -\delta$, $\eta(t) = 1$, $t > \delta/2$, $\delta > 0$ — любое, то при всех $\sigma > 0$ $\eta(t) e^{-\sigma t} \in \mathcal{D}'_+$, $f = \eta f$ (см. § 5.10), и поэтому

$$f(t) e^{-\sigma t} = f(t) \eta(t) e^{-\sigma t} \in \mathcal{D}'_+.$$

Если $f \in \mathcal{D}'_+(a)$, то $bf \in \mathcal{D}'_+(a)$, $b \in \mathcal{G}_M$;

$$f(kt) \in \mathcal{D}'_+(ka), \quad k > 0; \quad f(t) e^{k\lambda t} \in \mathcal{D}'_+(a + \text{Re } \lambda).$$

Эти утверждения непосредственно следуют из определений (см. § 8.3).

Если f и $g \in \mathcal{D}'_+(a)$, то $f * g \in \mathcal{D}'_+(a)$ и справедливо равенство

$$(f * g) e^{-at} = f e^{-at} * g e^{-at}, \quad \sigma > a. \quad (5)$$

Действительно, пользуясь формулой (17) § 8.6, при всех $\sigma > a$ и $\varphi \in \mathcal{D}(R^1)$ имеем

$$\begin{aligned} (f e^{-at} * g e^{-at}, \varphi) &= (f(t) e^{-at} \cdot g(\tau) e^{-a\tau}, \eta_1(t) \eta_2(\tau) \varphi(t + \tau)) = \\ &= (f(t) \cdot g(\tau), \eta_1(t) \eta_2(\tau) e^{-a(t+\tau)} \varphi(t + \tau)) = \\ &= (f * g, \varphi e^{-at}) = (e^{-at} (f * g), \varphi), \end{aligned}$$

откуда и следует равенство (5). Так как $f e^{-at}$ и $g e^{-at} \in \mathcal{D}'_+$ и $\mathcal{D}'_+$ — сверточная алгебра (см. § 8.6), то из (5) следует, что $(f * g) e^{-at} \in \mathcal{D}'_+$, $\sigma > a$, т. е. $f * g \in \mathcal{D}'_+(a)$.

Мы доказали, таким образом, что $\mathcal{D}'_+(a)$ — сверточная алгебра; она является подалгеброй сверточной алгебры $\mathcal{D}'_+$ (см. § 7.7).

В частности, если $f \in \mathcal{D}'_+(a)$, то $f(t - \tau) = f * \delta(t - \tau) \in \mathcal{D}'_+(a)$, $\tau \geq 0$; $f^{(m)} = f * \delta^{(m)} \in \mathcal{D}'_+(a)$, $m = 1, 2, \dots$; если $a > 0$, то m -я первообразная $f_{(m)} = \underbrace{\delta * \dots * \delta}_m * f \in \mathcal{D}'_+(a)$,

$m = 1, 2, \dots$ (см. §§ 6.3 и 7.8).

*) Обычно в качестве a берется $\inf$ тех σ , для которых имеет место (4).

Пусть $f \in \mathcal{D}'_+(a)$. Из условия (4) вытекает, что при каждом $\sigma > a$ обобщенная функция $f(t)e^{-\sigma t}$ обладает преобразованием Фурье, и поэтому

$$\mathcal{F}(p) = F[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = 2\pi F^{-1}[f(t)e^{-\sigma t}](\omega) \in \mathcal{D}'^r, \quad (6)$$

$$\sigma > a.$$

Фиксируем произвольное число $\sigma_0 > a$. Докажем, что

$$\mathcal{F}(p) = (f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(p-\sigma_0)t}), \quad \sigma > \sigma_0, \quad (7)$$

где $\eta(t)$ — произвольная вспомогательная функция, введенная выше.

Действительно, пусть $\sigma > \sigma_0 > a$ и $\varphi \in \mathcal{D}$. Тогда

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(\sigma + i\omega), \varphi) &= (F[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega), \varphi) = \\ &= (f(t)e^{-\sigma t}, F[\varphi(-\omega)]) = \\ &= (\eta(t)f(t)e^{-\sigma t}, e^{-(\sigma-\sigma_0)t}F[\varphi](-t)) = \\ &= (f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\varphi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega). \end{aligned}$$

Но при каждом $\sigma > \sigma_0$

$$\eta(t)e^{-(\sigma-\sigma_0)t-i\omega t}\varphi(\omega) \in \mathcal{D}(R^n).$$

Поэтому интеграл в последнем выражении можно вынести за знак функционала (см. (15) § 8.5), и мы получаем

$$(\mathcal{F}(\sigma + i\omega), \varphi) = \int (f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\varphi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega),$$

откуда и вытекает формула (7).

$\mathcal{F}(p)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\sigma > a$ и в каждой полуплоскости $\sigma > \sigma_0 > a$ справедлива формула дифференцирования

$$\mathcal{F}^{(m)}(p) = (f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)(-t)^m e^{-(p-\sigma_0)t}), \quad m = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы § 8.4, если учесть, что

$$\eta(t) \frac{e^{-(p+\Delta p-\sigma_0)t} - e^{-(p-\sigma_0)t}}{\Delta p} \rightarrow -t\eta(t)e^{-(p-\sigma_0)t},$$

$$\Delta p \rightarrow 0 \text{ в } \mathcal{D}.$$

Функция $\mathcal{F}(p)$ называется преобразованием Лапласа обобщенной функции $f(t)$ из $\mathcal{D}'_+(a)$.

В операционном исчислении (обобщенную) функцию $f(t)$ называют оригиналом, функцию $\mathcal{F}(p)$ — изображением

и этот факт записывают так:

$$f(t) \leftrightarrow \mathcal{F}(p), \quad \sigma > a. \quad (9)$$

Отметим, что между оригиналами $f(t)$ и изображениями $\mathcal{F}(p)$ имеется взаимно однозначное соответствие*). Это утверждение вытекает из определения (6) и из взаимной однозначности операции преобразования Фурье (см. § 9.2).

Очевидно, преобразование Лапласа — линейная операция: если $f_k(t) \leftrightarrow \mathcal{F}_k(p)$, $\sigma > a_k$, $k = 1, 2$, то и

$$\lambda f_1(t) + \mu f_2(t) \leftrightarrow \lambda \mathcal{F}_1(p) + \mu \mathcal{F}_2(p), \quad \sigma > \max(a_1, a_2).$$

Пример.

$$\delta(t-\tau) \leftrightarrow e^{-p\tau}, \quad p \text{ — любое, } \tau \geq 0. \quad (10)$$

3. Свойства преобразования Лапласа.

а) Дифференцирование преобразования Лапласа. Если $f \in \mathcal{D}'_+(a)$, то

$$(-t)^m f(t) \leftrightarrow \mathcal{F}^{(m)}(p), \quad \sigma > a, \quad m = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Действительно, $(-t)^m f \in \mathcal{D}'_+(a)$ (см. § 10.2). Применяя формулы (7) и (8) к $(-t)^m f$, при всех $\sigma > \sigma_0 > a$ получим соответствие (11):

$$\begin{aligned} (-t)^m f(t) &\leftrightarrow ((-t)^m f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(p-\sigma_0)t}) = \\ &= (f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)(-t)^m e^{-(p-\sigma_0)t}) = \mathcal{F}^{(m)}(p). \end{aligned}$$

б) Преобразование Лапласа производной. Если $f \in \mathcal{D}'_+(a)$, то

$$f^{(m)}(t) \leftrightarrow p^m \mathcal{F}(p), \quad \sigma > a, \quad m = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Это соответствие достаточно доказать при $m = 1$. Мы знаем, что $f' \in \mathcal{D}'_+(a)$ (см. § 10.2). Поэтому

$$\begin{aligned} f'(t) &\leftrightarrow F[f'(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = F[(f(t)e^{-\sigma t})' + \sigma f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = \\ &= (\sigma + i\omega)F[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = p\mathcal{F}(p), \end{aligned}$$

что и требовалось.

с) Сдвиг (смещение) преобразования Лапласа. Если $f \in \mathcal{D}'_+(a)$, то

$$f(t)e^{\lambda t} \leftrightarrow \mathcal{F}(p-\lambda), \quad \sigma > a + \operatorname{Re} \lambda, \quad (13)$$

*) Поэтому соответствие (9) симметрично.

В § 10.2 показано, что $f(t)e^{\lambda t} \in \mathcal{D}'_+(a + \operatorname{Re} \lambda)$; поэтому в силу § 9.3, д),

$$f(t)e^{\lambda t} \leftrightarrow F[f(t)e^{\lambda t}e^{-\sigma t}](-\omega) = \\ = F[f(t)e^{-(\sigma-\lambda)t}](-\omega) = \mathcal{F}(p-\lambda).$$

д) Преобразование Лапласа подобия. Если $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ и $k > 0$, то

$$f(kt) \leftrightarrow \frac{1}{k} \mathcal{F}\left(\frac{p}{k}\right), \quad \sigma > ka. \quad (14)$$

Действительно, $f(kt) \in \mathcal{D}'_+(ka)$ (см. § 10.2) и, в силу § 9.3, е),

$$f(kt) \leftrightarrow F[f(kt)e^{-\sigma t}](-\omega) = F\left[f(kt)e^{-\frac{\sigma}{k}kt}\right]\left(-\frac{\omega}{k}\right) = \\ = \frac{1}{k} F\left[f(t)e^{-\frac{\sigma}{k}t}\right]\left(-\frac{\omega}{k}\right) = \frac{1}{k} \mathcal{F}\left(\frac{p}{k}\right).$$

е) Преобразование Лапласа свертки. Если f и $g \in \mathcal{D}'_+(a)$, $f \leftrightarrow \mathcal{F}$ и $g \leftrightarrow \mathcal{G}$, $\sigma > a$, то

$$(f * g)(t) \leftrightarrow \mathcal{F}(p) \mathcal{G}(p), \quad \sigma > a, \quad (15)$$

так что преобразование Лапласа мультипликативно.

Мы имеем $f * g \in \mathcal{D}'_+(a)$ (см. § 10.2) и, пользуясь формулами (5) и (7), при всех $\sigma > \sigma_0 > a$ получаем

$$(f * g)(t) \leftrightarrow ((f * g)(t)e^{-\sigma t}, \eta(t)e^{-(\sigma-\sigma_0)t}) = \\ = (fe^{-\sigma_0 t} * ge^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(\sigma-\sigma_0)t}).$$

Но $\eta(t)e^{-(\sigma-\sigma_0)t} \in \mathcal{D}'$, и поэтому по формуле (17) § 8.6 будем иметь

$$(f * g)(t) \leftrightarrow (f(t)e^{-\sigma_0 t} \cdot g(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta_1(t)\eta_2(t)\eta(t+\tau)e^{-(\sigma-\sigma_0)(t+\tau)}).$$

Учитывая теперь, что при некотором выборе вспомогательных функций η_1 , η_2 и η справедливо тождество (рис. 37)

$$\eta_1(t)\eta_2(\tau)\eta(t+\tau) = \eta_1(t)\eta_2(\tau),$$

и пользуясь определением прямого произведения в $\mathcal{D}'$ (см. § 8.5), получаем формулу (15):

$$(f * g)(t) \leftrightarrow (f(t)e^{-\sigma_0 t} \cdot g(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta_1(t)\eta_2(\tau)e^{-(\sigma-\sigma_0)(t+\tau)}) = \\ = (f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta_1(t)e^{-(\sigma-\sigma_0)t})(g(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta_2(\tau)e^{-(\sigma-\sigma_0)\tau}) = \\ = \mathcal{F}(p) \mathcal{G}(p),$$

если еще раз учесть формулу (7).

и) Преобразование Лапласа сдвига (запаздывания). Если $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ и $\tau \geq 0$, то

$$f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-\tau p} \mathcal{F}(p), \quad \sigma > a. \quad (16)$$

В самом деле, $f(t-\tau) \in \mathcal{D}'_+(a)$ (см. § 10.2) и, в силу (15) и (10),

$$f(t-\tau) = f * \delta(t-\tau) \leftrightarrow e^{-\tau p} \mathcal{F}(p).$$

г) Преобразование Лапласа первообразной. Если $f \in \mathcal{D}'_+(a)$, $a \geq 0$, то

$$f^{(-m)}(t) \leftrightarrow \frac{\mathcal{F}(p)}{p^m}, \quad \sigma > a, \quad m = 0, 1, \dots \quad (17)$$

Действительно, $f^{(-m)} \in \mathcal{D}'_+(a)$ (см. § 10.2) и, в силу (15) и (3),

$$f^{(-m)}(t) = \underbrace{\delta * \dots * \delta}_m * f \leftrightarrow \frac{1}{p^m} \mathcal{F}(p).$$

4. Обратное преобразование Лапласа. Возникают задачи: 1) дать внутреннее описание изображений алгебры $\mathcal{D}'_+(a)$ и 2) как по данному изображению восстановить (единственный) оригинал? Ответы на эти вопросы содержатся в следующей основной теореме.

Предварительно введем класс $H(a)$ — совокупность функций $\mathcal{F}(p)$, аналитических в полуплоскости $\sigma > a$ и удовлетворяющих следующему условию роста: для любых $\epsilon > 0$ и $\sigma_0 > a$ существуют числа $C_\epsilon(\sigma_0) \geq 0$ и $m = m(\sigma_0) \geq 0$ такие, что

$$|\mathcal{F}(p)| \leq C_\epsilon(\sigma_0) e^{\epsilon |p|} (1 + |p|^m), \quad \sigma > \sigma_0. \quad (18)$$

Очевидно, $H(a)$ — алгебра с обычным умножением аналитических функций.

Основная теорема. Для того чтобы $f(t)$ принадлежала $\mathcal{D}'_+(a)$, необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Лапласа $\mathcal{F}(p)$ принадлежало $H(a)$. При этом

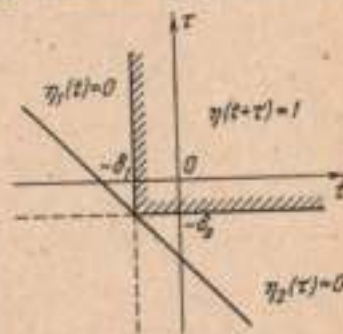


Рис. 37.

при всех $b \leq a$, $\sigma > \sigma_0 > a$ и целых $k > m(\sigma_0) + 1$ справедливо представление

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{d}{dt} - b \right)^k \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \mathcal{F}(p) e^{pt} dp, \quad (19)$$

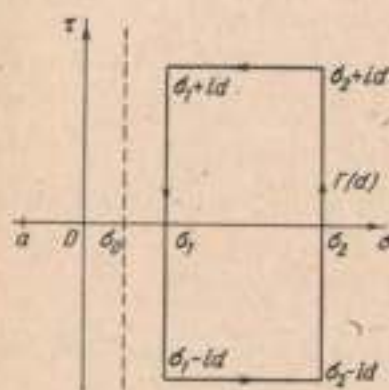


Рис. 38.

причем правая часть (19) не зависит от b , σ и k .

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in \mathcal{D}'_+(a)$. Тогда ее преобразование Лапласа $\mathcal{F}(p)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\sigma > a$ (см. § 10.2) и при любом $\sigma_0 > a$ в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$ имеет место представление (7). Применяя к этому представлению теорему Л. Шварца (см.

§ 8.2), при любом $\varepsilon > 0$ и некоторых $C_\varepsilon(\sigma_0) \geq 0$ и $m = m(\sigma_0) \geq 0$ получим оценку (18)

$$|\mathcal{F}(p)| \leq C(\sigma_0) \sup_{\substack{0 \leq \alpha \leq m \\ t > -\varepsilon}} |(\eta(t) e^{-(p-\sigma_0)t})^{(\alpha)}| \leq C_\varepsilon(\sigma_0) e^{\varepsilon \sigma} (1 + |p|^m), \quad \sigma > \sigma_0,$$

так что $\mathcal{F} \in H(a)$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{F} \in H(a)$. Нужно доказать, что функция $\mathcal{F}(p)$ есть преобразование Лапласа обобщенной функции f из $\mathcal{D}'_+(a)$, представимой формулой (19). Рассмотрим сперва случай, когда функция $\mathcal{F}(p)$ при всех $\sigma > \sigma_0 > a$ удовлетворяет оценке

$$|\mathcal{F}(p)| \leq \frac{C_\varepsilon(\sigma_0) e^{\varepsilon \sigma}}{|p-a|^\alpha}, \quad \alpha > 1. \quad (20)$$

Тогда интеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \mathcal{F}(p) e^{pt} dp \quad (\sigma > a) \quad (21)$$

сходится равномерно по t на каждом конечном промежутке, определяя непрерывную функцию $f(t)$, $-\infty < t < \infty$.

Докажем, что $f(t)$ не зависит от $\sigma > a$. Пусть $\sigma_2 > \sigma_1 > a$. По теореме Коши имеем

$$\int_{\Gamma(d)} \mathcal{F}(p) e^{pt} dp = 0, \quad (22)$$

где контур $\Gamma(d)$ изображен на рис. 38. Учитывая, что в силу (20),

$$\left| \int_{\sigma_1 + id}^{\sigma_2 + id} \mathcal{F}(p) e^{pt} dp \right| \leq \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |\mathcal{F}(\sigma + id)| e^{\sigma t} d\sigma \leq C_\varepsilon(\sigma_1) \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{e^{\sigma t} d\sigma}{|(\sigma - a)^2 + d^2|^{\alpha/2}} \rightarrow 0,$$

и переходя к пределу в равенстве (22) при $d \rightarrow +\infty$, получим

$$\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \mathcal{F}(p) e^{pt} dp = \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_1 - i\infty} \mathcal{F}(p) e^{pt} dp,$$

что и требовалось установить.

Перепишем равенство (21) в эквивалентной форме:

$$f(t) = \frac{e^{at}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\sigma + i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \sigma > a. \quad (23)$$

Пользуясь оценкой (20) и считая $\sigma > \sigma_0 > a$, оценим $f(t)$:

$$|f(t)| \leq \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(\sigma + i\omega)| d\omega \leq \frac{C_\varepsilon(\sigma_0)}{2\pi} e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{|(\sigma - a)^2 + \omega^2|^{\alpha/2}} \leq C'_\varepsilon(\sigma_0) e^{a(\sigma+t)t}.$$

Пусть $t < -\varepsilon$. Устремляя в полученной оценке σ к $+\infty$, выводим $f(t) = 0$. Отсюда, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, заключаем, что $f(t) = 0$, $t < 0$. Из (23) следует также, что $f(t) e^{-at} \in \mathcal{F}'$ и

$$\mathcal{F}(p) = 2\pi F^{-1}[f(t) e^{-at}](\omega), \quad \sigma > a.$$

Итак, $f \in \mathcal{D}'_+(a)$, $f(t) \leftrightarrow \mathcal{F}(p)$, $\sigma > a$.

Рассмотрим теперь общий случай. Фиксируем произвольные $b < a$, $\sigma_0 > a$ и целое $k > m(\sigma_0) + 1$ и введем функцию

$$\mathcal{F}_1(p) = \frac{\mathcal{F}(p)}{(p-b)^k},$$

аналитическую в полуплоскости $\sigma > a$ и удовлетворяющую при всех $\sigma > \sigma_0$ оценке типа (20):

$$|\mathcal{F}_1(p)| = \frac{|\mathcal{F}(p)|}{|p-b|^k} \leq \frac{C_k(\sigma_0) e^{\sigma_0 \sigma} (1+|p|^m)}{|p-a|^k} \leq \frac{C_k(\sigma_0) e^{\sigma_0 \sigma}}{|p-a|^{k-m}} \leq \frac{C'_k(\sigma_0) e^{\sigma_0 \sigma}}{|p-a|^{k-m}}, \quad k-m > 1.$$

По доказанному существует непрерывная функция f_1 из $\mathcal{D}'_+(a)$ такая, что

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{F}_1(p) e^{pt} dp \leftrightarrow \mathcal{F}_1(p), \quad \sigma > \sigma_0. \quad (24)$$

Отсюда, пользуясь формулой (12), выводим

$$\left(\frac{d}{dt} - b\right)^k f_1(t) \leftrightarrow (p-b)^k \mathcal{F}_1(p) = \mathcal{F}(p), \quad \sigma > \sigma_0.$$

Обозначая

$$f(t) = \left(\frac{d}{dt} - b\right)^k f_1(t),$$

заключаем, что $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ (см. § 10.2), $f(t) \leftrightarrow \mathcal{F}(p)$, $\sigma > \sigma_0$ и, в силу (24), справедливо представление (19). Осталось заметить, что построенная обобщенная функция f из $\mathcal{D}'_+(a)$ (для любого $\sigma_0 > a$) единственна и поэтому она не зависит от выбора вспомогательных параметров $b < a$, $\sigma_0 > a$ и $k > m(\sigma_0) + 1$. Но тогда $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ и $f(t) \leftrightarrow \mathcal{F}(p)$, $\sigma > a$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть функция $\mathcal{F}(\sigma + i\omega)$ абсолютно интегрируема по ω на R^1 при некотором $\sigma > a$. Тогда справедлива классическая формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{F}(p) e^{pt} dp.$$

Для доказательства достаточно заметить, что в формуле (19) возможно дифференцирование под знаком интег-

рала k раз (см. § 1.5), и далее воспользоваться равенством

$$\left(\frac{d}{dt} - b\right)^k e^{bt} = (p-b)^k e^{bt}.$$

Доказанная теорема устанавливает взаимно однозначное соответствие $\leftrightarrow$ между алгебрами $\mathcal{D}'_+(a)$ и $H(a)$, причем это соответствие линейно и мультипликативно. Такие алгебры называются *изоморфными*.

Замечание. Пользуясь техникой обобщенных функций, можно доказать^{*)}, что аналитическая функция $\mathcal{F}$ из алгебры $H(a)$ удовлетворяет более сильному, чем (16), ограничению роста: для любого $\sigma_0 > a$ существуют числа $C(\sigma_0) \geq 0$ и $M = M(\sigma_0) \geq 0$ такие, что

$$|\mathcal{F}(p)| \leq C(\sigma_0) (1+|p|^M), \quad \sigma > \sigma_0.$$

5. Примеры и применения.

a) $\delta^{(m)}(t-\tau) \leftrightarrow p^m e^{-\tau p}$, p — любое, $\tau \geq 0$, $m = 0, 1, \dots$ (25)

Вытекает из формул (10) и (12).

b) $\frac{\delta^{(m)}(t)}{\Gamma(m)} e^{\lambda t} \leftrightarrow \frac{1}{(p-\lambda)^m}$, $\sigma > \operatorname{Re} \lambda$, $m = 0, 1, \dots$ (**). (26)

Вытекает из формул (3), (11) и (13).

c) Пусть f — функция из $\mathcal{D}'_+(a)$, $f \in C^n(t \geq 0)$ и $f \leftrightarrow \mathcal{F}$, $\sigma > a$. Тогда

$$[f^{(n)}(t)] \leftrightarrow p^n \mathcal{F}(p) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(+0) p^{n-k-1}, \quad \sigma > a. \quad (27)$$

Действительно, пользуясь формулой (14) § 6.4 n раз и учитывая при этом, что $f(t) = 0$, $t < 0$, получим

$$[f^{(n)}(t)] = f^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(+0) \delta^{(n-k-1)}(t),$$

откуда, в силу (12) и (25), следует формула (27).

d) Пусть f и g — локально интегрируемые функции из $\mathcal{D}'_+(a)$, $g \in C^1(t \geq 0)$ и $f \leftrightarrow \mathcal{F}$, $g \leftrightarrow \mathcal{G}$, $\sigma > a$. Тогда

$$\int_0^t f(\tau) [g'(t-\tau)] d\tau \leftrightarrow p \mathcal{F}(p) \mathcal{G}(p) - g(+0) \mathcal{F}(p), \quad (28)$$

$$\sigma > a.$$

^{*)} См. В. С. Владимиров [2], § 26.

^{**)} Соответствие $\delta(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}$ часто записывают так: $1 \leftrightarrow \frac{1}{p}$, что представляется не совсем удачным.

В самом деле,

$$g' = [g'(t)] + g(+0)\delta(t), \quad f * g \leftrightarrow \mathcal{F}g, \quad \sigma > a,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau) [g'(t-\tau)] d\tau &= f * [g'] = f * [g' - g(+0)\delta] = \\ &= f * g' - g(+0)f * \delta = (f * g)'(t) - g(+0)f(t) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow p\mathcal{F}(p)g(p) - g(+0)\mathcal{F}(p), \quad \sigma > a. \end{aligned}$$

Формула (28) называется *интегралом Дюамеля*. Она широко используется в теории электрических цепей.

е) Уравнения в алгебре $\mathcal{D}'_+(a)$ имеют вид

$$g * u = f, \quad (29)$$

где g и f — известные и u — неизвестный элемент из $\mathcal{D}'_+(a)$. Все сказанное в § 7.8 относительно алгебры $\mathcal{D}'_+$ остается справедливым и для алгебры $\mathcal{D}'_+(a)$. В дополнение к § 7.8 отметим следующий результат:

Для того чтобы оператор $g*$ имел обратный $g^{-1}*$ в алгебре $\mathcal{D}'_+(a)$, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{1}{\mathcal{F}(p)} \in H(a)$, где $g(t) \leftrightarrow \mathcal{F}(p)$, $\sigma > a$; при этом $g^{-1}(t) \leftrightarrow \frac{1}{\mathcal{F}(p)}$, $\sigma > a$.

Это утверждение непосредственно следует из эквивалентных, в силу (15), равенств $g * g^{-1} = \delta$, $\mathcal{F}(p) \frac{1}{\mathcal{F}(p)} = 1$, $\sigma > a$, и из установленного в основной теореме взаимно однозначного соответствия между элементами алгебр $\mathcal{D}'_+(a)$ и $H(a)$.

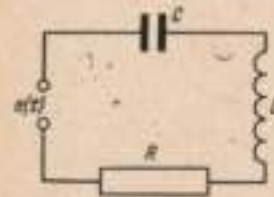


Рис. 39

ла тока в цепи $i(t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = e(t),$$

или

$$g * i = e, \quad (30)$$

где

$$g(t) = L\delta'(t) + R\delta(t) + \frac{1}{C}\theta(t) \in \mathcal{D}'_+(0).$$

Найдем обратный оператор $a* = g^{-1}*$. Имеем

$$g(t) \leftrightarrow Lp + R + \frac{1}{Cp}, \quad \sigma > 0,$$

и поэтому, в силу e) и b),

$$\begin{aligned} a(t) &\leftrightarrow \frac{1}{Lp + R + \frac{1}{Cp}} = \frac{p}{L(p - p_+)(p - p_-)} = \\ &= \frac{1}{L(p_+ - p_-)} \left(\frac{p_+}{p - p_+} - \frac{p_-}{p - p_-} \right) \leftrightarrow \frac{\delta(t)}{2L\omega} (p_+ e^{p_+ t} - p_- e^{p_- t}), \\ p_{\pm} &= -\frac{R}{2L} \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a(t) = \frac{\delta(t)}{L\omega} e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\omega \cos \omega t - \frac{R}{2L} \sin \omega t \right),$$

и решение уравнения (30) выражается формулой (см. § 7.8)

$$\begin{aligned} i(t) &= a * e = \\ &= \frac{1}{L\omega} \int_0^t e^{-\frac{R}{2L}(t-\tau)} \left[\omega \cos \omega(t-\tau) - \frac{R}{2L} \sin \omega(t-\tau) \right] a(\tau) d\tau. \quad (31) \end{aligned}$$

Формула (31) в явном виде выражает реакцию, или отклик, $i(t)$ цепи на входной сигнал $e(t)$. В теории электрических цепей $g(t)$ называется *импедансом* (обобщенное сопротивление) цепи, а $a(t)$ — *адмитансом* (обобщенная проводимость). Нетрудно видеть, что $a * \delta = \int_0^t a(\tau) d\tau$ есть отклик цепи на «единичную ступеньку» δ (функцию включения).

г) Найдем обратный оператор $\mathcal{E}*$ к оператору $q*$, где

$$q(t) = \delta^{(m)}(t) + a_1 \delta^{(m-1)}(t) + \dots + a_m \delta(t), \quad (32)$$

то есть

$$\mathcal{E}^{(m)} + a_1 \mathcal{E}^{(m-1)} + \dots + a_m \mathcal{E} = \delta.$$

В силу (25) имеем

$$q(t) \leftrightarrow Q(p) = p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m = \\ = (p - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (p - \lambda_n)^{\alpha_n},$$

и поэтому, в силу е)

$$\mathcal{E}(t) \leftrightarrow \frac{1}{Q(p)}, \quad \sigma > a = \max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re} \lambda_j. \quad (33)$$

Разлагая $\frac{1}{Q(p)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{1}{Q(p)} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{c_{j,1}}{(p - \lambda_j)^{\alpha_j}} + \dots + \frac{c_{j,\alpha_j}}{p - \lambda_j} \right],$$

и пользуясь (26), из (33) получаем

$$\mathcal{E}(t) = \theta(t) \sum_{j=1}^n \left[c_{j,1} \frac{t^{\alpha_j-1}}{(\alpha_j-1)!} + \dots + c_{j,\alpha_j} \right] e^{\lambda_j t}. \quad (34)$$

В силу единственности фундаментального решения оператора $q \cdot$ в алгебре $\mathcal{D}_+^*$ (см. § 7.8), функция $\mathcal{E}(t)$ совпадает с фундаментальным решением, построенным в § 6.4, i) (в случае постоянных коэффициентов).

6. Упражнения. а) Пусть $f_\alpha(t)$, $-\infty < \alpha < \infty$ — обобщенная функция, введенная в § 7.8. Доказать, что

$$f_\alpha(t) \leftrightarrow \frac{1}{p^\alpha}, \quad \sigma > 0,$$

где за p^α принимается та ее левая в полуплоскости $\sigma > 0$, для которой $p^\alpha > 0$ при положительных p ;

$$b) f_\alpha(t) e^{i\lambda t} \leftrightarrow \frac{1}{(p - \lambda)^\alpha}, \quad \sigma > \operatorname{Re} \lambda$$

$$c) \theta(t) e^{i\omega t} \leftrightarrow \frac{1}{p - i\omega}, \quad \theta(t) e^{-i\omega t} \leftrightarrow \frac{1}{p + i\omega}, \quad \sigma > 0;$$

$$d) \theta(t) \cos \omega t \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \theta(t) \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \sigma > 0.$$

е) Пусть $|a_k| \leq c(1+k)^m$, $k=0, 1, \dots$. Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta(t-k) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-kp}, \quad \sigma > 0.$$

г) Пусть $f(t)$ — периодическая функция с периодом T (абсолютно) интегрируемая на периоде (рис. 40). Доказать:

$$\theta(t)f(t) \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt, \quad \sigma > 0.$$

г) Проверить, что

$$1) (\theta \cos t) \cdot \mathcal{E} = \delta(t), \quad \mathcal{E}(t) = \delta'(t) + \theta(t);$$

$$2) (\theta \sin t) \cdot \mathcal{E} = \delta(t), \quad \mathcal{E}(t) = \delta'(t) + 3\delta(t) + 4\theta(t) \sin t;$$

$$3) \mathcal{E} + 2(\theta \cos t) \cdot \mathcal{E} = \delta(t), \quad \mathcal{E}(t) = \delta(t) - 2\theta(t) e^t(1-t);$$

$$4) \theta \cdot u_1 + \delta' \cdot u_2 = \delta(t), \quad \delta \cdot u_1 + \delta' \cdot u_2 = 0,$$

$$u_1(t) = -\delta(t) - \theta(t) e^t, \quad u_2(t) = \theta(t) e^t.$$

h) Пользуясь формулой (27), показать, что

$$1) u' + au = f(t), \quad u(0) = u_0,$$

$$u(t) = \int_0^t f(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau + u_0 e^{-at};$$

$$2) u'' + \omega^2 u = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1,$$

$$u(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau + u_0 \cos \omega t + u_1 \frac{\sin \omega t}{\omega};$$

при этом предполагается, что $f \in C(t \geq 0) \cap \mathcal{D}_+^*(a)$.

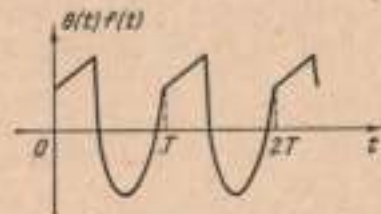


Рис. 40.

г) Пусть $\mathcal{E}_1$ — решение уравнения $g \cdot \mathcal{E}_1 = \theta$ в алгебре $\mathcal{D}_+^*(a)$, причем $\mathcal{E}_1 \in C^1(t \geq 0)$. Пользуясь интегралом Дюамеля (26), показать, что решение в алгебре $\mathcal{D}_+^*(a)$ уравнения $g \cdot u = f$, где f — локально интегрируемая функция из $\mathcal{D}_+^*(a)$, выражается формулой

$$u(t) = \mathcal{E}_1(+0)f(t) + \int_0^t f(\tau) \{\mathcal{E}_1'(t-\tau)\} d\tau.$$

д) Доказать, что

$$\theta(t) J_0(t) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \sigma > 0,$$

к) Пользуясь д), доказать равенство

$$\sin t = \int_0^t J_0(t-\tau) J_0(\tau) d\tau.$$

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ И ЗАДАЧА КОШИ

В этой главе теория обобщенных функций применяется к построению фундаментальных решений и к решению задачи Коши для волнового уравнения и для уравнения теплопроводности. При этом задача Коши рассматривается в обобщенной постановке, что позволяет включить начальные условия в мгновенно действующие источники (типа простого и двойного слоя на поверхности $t=0$). Таким путем задача Коши сводится к задаче о нахождении такого (обобщенного) решения данного уравнения (с измененной правой частью), которое обращается в нуль при $t < 0$. Последняя задача решается стандартным методом — методом суммирования возмущений, порождаемых каждой точкой источника, так что решение ее представляется в виде свертки фундаментального решения с правой частью.

Исследуется также задача Коши для гиперболического уравнения с двумя переменными (метод Римана).

§ 11. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов

Для построения фундаментальных решений линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами применяется метод преобразования Фурье. Этим методом, естественно, могут быть получены только фундаментальные решения медленного роста.

1. Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений. Пусть

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad f \in \mathcal{D}', \quad (1)$$

— линейное дифференциальное уравнение порядка m с коэффициентами $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Вводя дифференциальный

оператор

$$L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

перепишем это уравнение в виде

$$L(x, D) u = f(x). \quad (1')$$

Обобщенным решением уравнения (1) в области G называется всякая обобщенная функция $u \in \mathcal{D}'$, удовлетворяющая этому уравнению в области G в обобщенном смысле, т. е. для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ (см. § 5.2)

$$(L(x, D) u, \varphi) = (f, \varphi). \quad (2)$$

Равенство (2) равносильно равенству

$$(u, L^*(x, D) \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(G), \quad (2')$$

где

$$L^*(x, D) \varphi = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi). \quad (3)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (L(x, D) u, \varphi) &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u, \varphi \right) = \sum_{|\alpha| \leq m} (a_\alpha D^\alpha u, \varphi) = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, a_\alpha \varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} (u, D^\alpha (a_\alpha \varphi)) = \\ &= \left(u, \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi) \right) = (u, L^*(x, D) \varphi). \end{aligned}$$

Ясно, что всякое классическое решение является и обобщенным решением. Обратное утверждение сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма. Если $f \in C(G)$ и обобщенное решение $u(x)$ уравнения (1) в области G принадлежит классу $C^m(G)$, то оно является и классическим решением этого уравнения в области G .

Доказательство. Так как $u \in \mathcal{D}' \cap C^m(G)$, то классические и обобщенные производные функции u до порядка m включительно совпадают в области G (см. § 6.1). Поскольку u — обобщенное решение уравнения (1)

в области G , то непрерывная в G функция $L(x, D)u - f$ обращается в нуль в области G в смысле обобщенных функций. По лемме де Бюа-Реймона (см. § 5.6) $L(x, D)u - f(x) = 0$ во всех точках области G , так что u удовлетворяет уравнению (1) в области G в классическом смысле. Лемма доказана.

2. **Фундаментальные решения.** Пусть L — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $a_0(x) = a_0$:

$$L(D) = \sum_{|\alpha|=0}^n a_\alpha D^\alpha, \quad L^*(D) = L(-D). \quad (4)$$

Фундаментальным решением (функцией влияния) оператора $L(D)$ называется обобщенная функция $\delta \in \mathcal{D}'$, удовлетворяющая в R^n уравнению

$$L(D)\delta = \delta(x). \quad (5)$$

Фундаментальное решение $\delta(x)$ оператора $L(D)$, вообще говоря, не единственно; оно определяется с точностью до слагаемого $\delta_0(x)$, являющегося произвольным решением однородного уравнения $L(D)\delta_0 = 0$.

Действительно, обобщенная функция $\delta(x) + \delta_0(x)$ также является фундаментальным решением оператора $L(D)$:

$$L(D)(\delta + \delta_0) = L(D)\delta + L(D)\delta_0 = \delta(x).$$

Лемма. Для того чтобы обобщенная функция δ из $\mathcal{D}'$ была фундаментальным решением оператора $L(D)$, необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Фурье $F[\delta]$ удовлетворяло уравнению

$$L(-i\xi)F[\delta] = 1, \quad (6)$$

где

$$L(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^n a_\alpha \xi^\alpha.$$

Доказательство. Пусть $\delta \in \mathcal{D}'$ — фундаментальное решение оператора $L(D)$. Применяя преобразование Фурье к обеим частям равенства (5), получим

$$F[L(D)\delta] = F[\delta] = 1, \quad (7)$$

Принимая во внимание формулу (16) § 9.3, имеем

$$\begin{aligned} F[L(D)\delta] &= F\left[\sum_{|\alpha|=0}^n a_\alpha D^\alpha \delta\right] = \sum_{|\alpha|=0}^n a_\alpha F[D^\alpha \delta] = \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^n a_\alpha (-i\xi)^\alpha F[\delta] = L(-i\xi)F[\delta]; \end{aligned} \quad (8)$$

отсюда и из (7) вытекает, что $F[\delta]$ удовлетворяет уравнению (6).

Обратно, если $\delta \in \mathcal{D}'$ удовлетворяет уравнению (6), то, в силу (8), δ удовлетворяет уравнению (7), откуда следует, что δ удовлетворяет уравнению (5), т. е. является фундаментальным решением оператора $L(D)$. Лемма доказана.

Доказанная лемма сводит задачу построения фундаментальных решений медленного роста линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами к решению в $\mathcal{D}'$ алгебраических уравнений вида

$$P(\xi)X = 1, \quad (9)$$

где P — произвольный полином.

Как видно из уравнения (9), всякое его решение из $\mathcal{D}'$ (если таковое существует) должно совпадать с функцией $\frac{1}{P(\xi)}$ вне множества N_P нулей полинома $P(\xi)$,

$$N_P = \{\xi: P(\xi) = 0\}.$$

Отсюда следует, что если $N_P \neq \emptyset$, то решение уравнения (9) не единственно: разные решения отличаются друг от друга на обобщенную функцию с носителем в N_P . Например, различными решениями уравнения $\xi X = 1$ являются обобщенные функции

$$\frac{1}{\xi + i0}, \quad \frac{1}{\xi - i0} \text{ и } \mathcal{D}' \frac{1}{\xi},$$

отличающиеся друг от друга на выражение вида $\text{const } \delta(\xi)$ (см. формулы Сохоцкого (15) и (15') § 5.8).

Если функция $\frac{1}{P(\xi)}$ локально интегрируема в R^n , то она (точнее, определяемый ею регулярный функционал) является решением в $\mathcal{D}'$ уравнения (9). Если же функция $\frac{1}{P(\xi)}$ не является локально интегрируемой в R^n , то

возникает нетривиальная задача о построении в $\mathcal{S}'$ решения уравнения (9). Л. Хёрмандером [2] доказано, что уравнение (9) всегда разрешимо в $\mathcal{S}'$, если $P(\xi) \neq 0$.

Обозначим через $\text{reg} \frac{1}{P(\xi)}$ какое-либо решение из $\mathcal{S}'$ уравнения (9). Построение этого решения существенно зависит от структуры множества N_P и может быть проведено для каждого конкретного полинома P .

Таким образом, уравнение (6) всегда разрешимо в $\mathcal{S}'$,

$$F[\xi] = \text{reg} \frac{1}{L(-i\xi)}.$$

Следовательно, всякий линейный дифференциальный оператор $L(D)$ с постоянными коэффициентами имеет фундаментальное решение медленного роста, и это решение дается формулой

$$\xi = F^{-1} \left[\text{reg} \frac{1}{L(-i\xi)} \right] = \frac{1}{(2\pi)^n} F \left[\text{reg} \frac{1}{L(\xi)} \right]. \quad (10)$$

3. Уравнения с правой частью. С помощью фундаментального решения $\xi(x)$ оператора $L(D)$ можно построить решение уравнения

$$L(D)u = f(x) \quad (11)$$

с произвольной правой частью f . Точнее, справедлива следующая

Теорема. Пусть $f \in \mathcal{S}'$ такова, что свертка $\xi * f$ существует в $\mathcal{S}'$. Тогда решение уравнения (11) существует в $\mathcal{S}'$ и дается формулой

$$u = \xi * f. \quad (12)$$

Это решение единственно в классе тех обобщенных функций из $\mathcal{S}'$, для которых существует свертка с ξ .

Доказательство. Пользуясь формулой дифференцирования свертки (см. (20) § 7.5) и учитывая равенство (5), получим

$$\begin{aligned} L(D)(\xi * f) &= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_{\alpha} D^{\alpha} (\xi * f) = \\ &= \left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_{\alpha} D^{\alpha} \xi \right) * f = L(D) \xi * f = \delta * f = f. \end{aligned}$$

Поэтому формула $u = \xi * f$ действительно дает решение уравнения (11).

Докажем единственность решения уравнения (11) в классе тех обобщенных функций из $\mathcal{S}'$, для которых свертка с ξ существует в $\mathcal{S}'$. Для этого достаточно установить, что соответствующее однородное уравнение

$$L(D)u = 0$$

имеет только нулевое решение в этом классе (см. § 1.11). Но это действительно так в силу

$$u = u * \delta = u * L(D)\xi = L(D)u * \xi = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $u \in \mathcal{S}'$ и свертка $u * \xi$ существует в $\mathcal{S}'$, то справедливо равенство

$$u = L(D)u * \xi. \quad (13)$$

Физический смысл решения $u = \xi * f$. Представим источник $f(x)$ в виде «суммы» точечных источников $f(\xi) \delta(x - \xi)$ (см. замечание в конце § 7.4):

$$f(x) = \delta * f = \int f(\xi) \delta(x - \xi) d\xi.$$

В силу (5) каждый точечный источник $f(\xi) \delta(x - \xi)$ определяет влияние $f(\xi) \xi(x - \xi)$. Поэтому решение

$$u(x) = \xi * f = \int f(\xi) \xi(x - \xi) d\xi$$

есть наложение (суперпозиция) этих влияний.

4. Метод спуска. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами в пространстве R^{n+1} переменных $(x, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n, t)$

$$L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f(x) \cdot \delta(t), \quad f \in \mathcal{S}'(R^n), \quad (14)$$

где

$$L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{|\alpha|=1}^p \frac{\partial}{\partial t} L_{\alpha}(D) + L_0(D)$$

и $L_{\alpha}(D)$ — дифференциальные операторы по переменным x . Пусть обобщенная функция u из $\mathcal{S}'(R^{n+1})$ допускает продолжение на функции вида $\varphi(x) l(t)$, где $\varphi \in \mathcal{S}(R^n)$,

в следующем смысле: какова бы ни была последовательность основных функций $\eta_k(t)$, $k=1, 2, \dots$, из $\mathcal{D}(R^1)$, сходящаяся к 1 в R^1 (см. § 7.4), существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) \eta_k(t)) = (u, \varphi(x) 1(t)) \quad (15)$$

и этот предел не зависит от последовательности $\{\eta_k\}$.

Обозначим функционал (15) через u_0 ,

$$(u_0, \varphi) = (u, \varphi(x) 1(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) \eta_k(t)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^n). \quad (16)$$

Очевидно, при всяком k функционал $(u, \varphi(x) \eta_k(t))$ линейный и непрерывный на $\mathcal{D}(R^n)$, т. е. принадлежит $\mathcal{D}'(R^n)$. Поэтому, по теореме о полноте пространства $\mathcal{D}'(R^n)$ (см. § 5.4), и предельный функционал $u_0 \in \mathcal{D}'(R^n)$.

Приведем два примера на построение продолжения u_0 .

а) Пусть $u(x, t)$ — функция такая, что функция $\int |u(x, t)| dt$ локально интегрируема в R^n . Тогда $u_0(x)$ — локально интегрируемая функция в R^n и представляется интегралом

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dt. \quad (17)$$

Действительно, в этом случае функция $u(x, t)$ локально интегрируема в R^{n+1} и, в силу теорем Лебега и Фубини (см. § 1.4), предел (15)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) \eta_k(t)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \varphi(x) \eta_k(t) dx dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \varphi(x) dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dt dx \end{aligned}$$

при всех $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ существует и не зависит от последовательности $\{\eta_k\}$. Отсюда, в силу (16), и вытекает формула (17).

б) Пусть $u = f(x) \cdot \delta(t)$, где $f \in \mathcal{D}'(R^n)$. Тогда $u_0 = f$ в силу

$$\begin{aligned} (u_0, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) \eta_k(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot \delta(t), \varphi(x) \eta_k(t)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x), \varphi(x) \eta_k(0)) = (f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^n). \end{aligned}$$

Теорема. Если решение $u \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$ уравнения (14) допускает продолжение (16), то обобщенная функция u_0 из $\mathcal{D}'(R^n)$ удовлетворяет уравнению

$$L_0(D) u_0 = f(x). \quad (18)$$

Доказательство. Пусть $\eta_k(t)$, $k=1, 2, \dots$, — последовательность функций из $\mathcal{D}(R^1)$, сходящаяся к 1 в R^1 . Тогда при $q=1, 2, \dots$ последовательности функций $\eta_k(t) + \eta_k^{(q)}(t)$, $k=1, 2, \dots$, также сходятся к 1 в R^1 и, следовательно, при всех φ из $\mathcal{D}(R^n)$ (ср. § 7.5, с)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) \eta_k^{(q)}(t)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) [\eta_k(t) + \eta_k^{(q)}(t)]) - \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) \eta_k(t)) = (u_0, \varphi) - (u_0, \varphi) = 0. \quad (19) \end{aligned}$$

Учитывая (19), проверим, что обобщенная функция u_0 удовлетворяет уравнению (18):

$$\begin{aligned} (L_0(D) u_0, \varphi) &= (u_0, L_0(-D) \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (u, L_0(-D) \varphi(x) \eta_k(t)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (u, L_0(-D) \varphi(x) \eta_k(t) + \\ &+ \sum_{q=1}^p (-1)^q L_q(-D) \varphi(x) \eta_k^{(q)}(t)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (u, L(-D, -\frac{\partial}{\partial t}) \varphi(x) \eta_k(t)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (L(D, \frac{\partial}{\partial t}) u, \varphi(x) \eta_k(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot \delta(t), \varphi(x) \eta_k(t)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x), \varphi(x) \eta_k(0)) = (f, \varphi). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Изложенный метод получения решения $u_0(x)$ уравнения (18) с n переменными через решение $u(x, t)$ уравнения (14) с $n+1$ переменными называется *методом спуска по переменной t* .

Метод спуска особенно удобно использовать для построения фундаментальных решений. Действительно, применяя доказанную теорему при $f = \delta(x)$, получаем: если $\mathcal{E}(x, t)$ — фундаментальное решение оператора $L(D, \frac{\partial}{\partial t})$ — допускает продолжение $\mathcal{E}_0$ вида (16), то обобщенная функция

$$(\mathcal{E}_0, \varphi) = (\mathcal{E}, \varphi(x) 1(t)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^n), \quad (20)$$

есть фундаментальное решение оператора $L_n(D)$; в частности, если $E(x, t)$ такова, что функция $\int |E(x, t)| dt$ локально интегрируема в R^n , то

$$E_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x, t) dt. \quad (21)$$

Фундаментальные решения E_0 и E удовлетворяют соотношению

$$E_0(x) \cdot 1(t) = E * [\delta(x) \cdot 1(t)].$$

Физический смысл этой формулы состоит в том, что $E_0(x)$ есть (не зависящее от t) возмущение от источника $\delta(x) \cdot 1(t)$, сосредоточенного на оси t (ср. § 11.3).

5. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с обыкновенными производными.

$$L\mathcal{E} = \frac{d^n \mathcal{E}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \mathcal{E}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \mathcal{E} = \delta(t).$$

В § 6.4, f) (см. также § 10.5, g)) было показано, что фундаментальное решение этого оператора выражается формулой

$$\mathcal{E}(t) = \theta(t) Z(t),$$

где $Z(t)$ удовлетворяет однородному уравнению $LZ = 0$ и начальным условиям

$$Z(0) = Z'(0) = \dots = Z^{(n-2)}(0) = 0, \quad Z^{(n-1)}(0) = 1.$$

В частности, функции

$$\mathcal{E}(t) = \theta(t) e^{-at}, \quad (22)$$

$$\mathcal{E}(t) = \theta(t) \frac{d^k a^k}{dt^k} \quad (23)$$

являются соответственно фундаментальными решениями операторов

$$\frac{d}{dt} + a, \quad \frac{d^2}{dt^2} + a^2.$$

6. Фундаментальное решение оператора теплопроводности.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathcal{E} = \delta(x, t). \quad (24)$$

В § 6.5, f) было показано, что решение уравнения (24) выражается формулой

$$E(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4at}} \quad (25)$$

и, следовательно, эта функция является фундаментальным решением оператора теплопроводности.

Выведем формулу (25) методом преобразования Фурье. Для этого применим преобразование Фурье F_x (см. § 9.2) к равенству (24):

$$F_x \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right] - a^2 F_x [\Delta \mathcal{E}] = F_x [\delta(x, t)].$$

и используем формулы (21) и (22) § 9.3:

$$F_x [\delta(x, t)] = F_x [\delta(x) \cdot \delta(t)] = F[\delta](\xi) \cdot \delta(t) = 1(\xi) \cdot \delta(t),$$

$$F_x \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} F_x [\mathcal{E}], \quad F_x [\Delta \mathcal{E}] = -|\xi|^2 F_x [\mathcal{E}].$$

В результате для обобщенной функции $\tilde{\mathcal{E}}(\xi, t) = F_x[\mathcal{E}](\xi, t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}(\xi, t)}{\partial t} + a^2 |\xi|^2 \tilde{\mathcal{E}}(\xi, t) = 1(\xi) \cdot \delta(t). \quad (26)$$

Используя формулу (22) с заменой a на $a^2 |\xi|^2$, заключаем, что решением в $\mathcal{S}'$ уравнения (26) является функция

$$\tilde{\mathcal{E}}(\xi, t) = \theta(t) e^{-a^2 |\xi|^2 t}.$$

Положив, применяя обратное преобразование Фурье F_x^{-1} и используя формулу (38) § 9.7, получаем равенство (25):

$$\begin{aligned} E(x, t) &= F_x^{-1}[\tilde{\mathcal{E}}(\xi, t)] = \\ &= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n} \int e^{-a^2 |\xi|^2 t - i(\xi, x)} d\xi = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4at}}. \end{aligned}$$

7. Фундаментальное решение волнового оператора.

$$\square_x \mathcal{E} = \delta(x, t). \quad (27)$$

Применив к равенству (27) преобразование Фурье F_x и действуя, как в предыдущем пункте, вместо уравнения (24) для обобщенной функции $F_x[\mathcal{E}] = \tilde{\mathcal{E}}(\xi, t)$ получаем

уравнение

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}_n(\xi, t)}{\partial t^2} + a^2 |\xi|^2 \tilde{\mathcal{E}}_n(\xi, t) = 1(\xi) \cdot \delta(t). \quad (28)$$

Пользуясь формулой (23) с заменой a на $a|\xi|$, заключаем, что решением в $\mathcal{D}'$ уравнения (28) является функция

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(\xi, t) = \theta(t) \frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}_n(x, t) = F_{\xi}^{-1}[\tilde{\mathcal{E}}_n(\xi, t)] = \theta(t) F_{\xi}^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right]. \quad (29)$$

Пусть $n=3$. Тогда из формулы (40) § 9.7 выводим

$$F_{\xi}^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|t}{|\xi|}\right] = \frac{1}{4\pi a t} \delta_{S_{at}}(x),$$

откуда и из (29) получаем

$$\mathcal{E}_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a t} \delta_{S_{at}}(x) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(a^2 t^2 - |x|^2), \quad (30)$$

причем обобщенная функция $\mathcal{E}_3$ действует по правилу:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_3, \varphi) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty (\delta_{S_{at}}, \varphi) \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x, t) dS_x dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^4). \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогично, пользуясь формулами (26) § 9.6 и (43) § 9.7, получим (ср. § 6.5, g))

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(x, t) &= \frac{1}{2a} \theta(at - |x|), \\ \mathcal{E}_2(x, t) &= \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Для получения фундаментального решения $\mathcal{E}_2(x, t)$, $x = (x_1, x_2)$, воспользуемся также методом спуска по переменной x_2 (см. § 11.4). Для этого нужно показать, что $\mathcal{E}_2(x, x_2, t)$ допускает продолжение (16) на функции вида $\varphi(x, t) 1(x_2)$, где $\varphi \in \mathcal{D}(R^3)$.

Пусть $\eta_k \in \mathcal{D}(R^1)$ и последовательность $\eta_k(x_2)$, $k = 1, 2, \dots$, стремится к 1 в R^1 . Тогда, пользуясь (31),

при всех $\varphi \in \mathcal{D}(R^3)$ получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{E}_2, \varphi(x, t) \eta_k(x_2)) =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x, t) \eta_k(x_2) dS dt = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x, t) dS dt = (\mathcal{E}_2, \varphi(x, t) 1(x_2)), \end{aligned}$$

так что этот предел существует и не зависит от последовательности $\{\eta_k\}$. Отсюда, применяя формулу (20), заключаем, что при всех $\varphi \in \mathcal{D}(R^3)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_2, \varphi) &= (\mathcal{E}_2, \varphi(x, t) 1(x_2)) = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x, t) dS dt. \end{aligned}$$

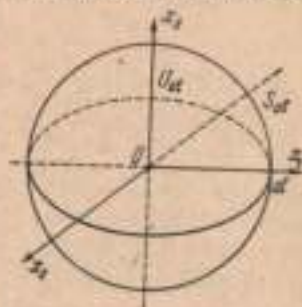


Рис. 41.

Преобразуем последний интеграл. Так как φ не зависит от x_2 , то, заменяя поверхностный интеграл по сфере $S_{at} = \{|x|^2 + x_2^2 = a^2 t^2\}$ на удвоенный интеграл по кругу $|x| < at$ (рис. 41), получим

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_2, \varphi) &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^\infty \int_{|x| < at} \frac{\varphi(x, t)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} dx dt = \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int \frac{\theta(at - |x|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} \varphi(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

откуда и следует формула (32) для $\mathcal{E}_2$.

Аналогично, пользуясь формулой (21), получаем методом спуска по переменной x_2 формулу (32) для

фундаментального решения $\mathcal{E}_1(x, t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_2(x, x_2, t) dx_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(at - \sqrt{x^2 + x_2^2})}{\sqrt{a^2 t^2 - x^2 - x_2^2}} dx_2 = \\ &= \frac{\theta(at - |x|)}{\pi a} \int_0^{\sqrt{a^2 t^2 - x^2}} \frac{dx_2}{\sqrt{a^2 t^2 - x^2 - x_2^2}} = \\ &= \frac{\theta(at - |x|)}{\pi a} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{2\pi} \theta(at - |x|).\end{aligned}$$

8. Фундаментальное решение оператора Лапласа.

$$\Delta \mathcal{E}_n = \delta(x). \quad (33)$$

В § 6.5, d) было показано, что функции

$$\mathcal{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln|x|, \quad \mathcal{E}_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} |x|^{-n+2}, \quad n \geq 3, \quad (34)$$

являются фундаментальными решениями оператора Лапласа. Вычислим эти фундаментальные решения методом преобразования Фурье. Применяя преобразование Фурье к равенству (33), получим

$$-|\xi|^2 F[\mathcal{E}_n] = 1. \quad (35)$$

Пусть $n=2$. Проверим, что обобщенная функция $-\mathcal{F} \frac{1}{|\xi|^2}$ (см. § 9.7, d)) удовлетворяет уравнению (35). Действительно,

$$\begin{aligned}(|\xi|^2 \mathcal{F} \frac{1}{|\xi|^2}, \varphi) &= (\mathcal{F} \frac{1}{|\xi|^2}, |\xi|^2 \varphi) = \\ &= \int_{|\xi| < 1} \frac{|\xi|^2 \varphi(\xi) - |\xi|^2 \varphi(\xi)}{|\xi|^2} d\xi + \int_{|\xi| > 1} \frac{|\xi|^2 \varphi(\xi)}{|\xi|^2} d\xi = \\ &= \int \varphi(\xi) d\xi = (1, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}.\end{aligned}$$

Следовательно, в соответствии со схемой § 11.2 можно положить

$$F[\mathcal{E}_2] = \text{reg} \frac{1}{|\xi|^2} = -\mathcal{F} \frac{1}{|\xi|^2}.$$

Отсюда, пользуясь формулой (41) § 9.7, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2(x) &= F^{-1} \left[-\mathcal{F} \frac{1}{|\xi|^2} \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} F \left[\mathcal{F} \frac{1}{|\xi|^2} \right] = \frac{1}{2\pi} \ln|x| + \frac{C_0}{2\pi}.\end{aligned} \quad (36)$$

Так как постоянная удовлетворяет однородному уравнению Лапласа, то, отбрасывая в (36) слагаемое $\frac{C_0}{2\pi}$, убеждаемся, что фундаментальное решение $\mathcal{E}_2(x)$ можно выбрать равным $\frac{1}{2\pi} \ln|x|$.

Пусть теперь $n \geq 3$. В этом случае функция $-|\xi|^{-2}$ локально интегрируема в R^n и потому, в соответствии с § 11.2,

$$F[\mathcal{E}_n] = -\frac{1}{|\xi|^2}, \quad \mathcal{E}_n = -F^{-1} \left[\frac{1}{|\xi|^2} \right].$$

Отсюда при $n=3$, пользуясь формулой (44) § 9.7, получаем

$$\mathcal{E}_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}. \quad (37)$$

Аналогично вычисляется и $\mathcal{E}_n(x)$ при $n > 3$.

Особенно просто $\mathcal{E}_n(x)$, $n \geq 3$, строится методом спуска по переменной t (см. § 11.4) из фундаментальных решений оператора теплопроводности или волнового оператора. Например, пользуясь формулой (21), из (25) при $a=1$ получаем формулу (34):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n(x) &= -\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(x, t) dt = -\int_0^{\infty} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dt = \\ &= -\frac{|x|^{-n+2}}{4\pi^{n/2}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{n}{2}-2} du = -\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) \frac{|x|^{-n+2}}{4\pi^{n/2}} = \\ &= -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} |x|^{-n+2}, \quad n \geq 3.\end{aligned}$$

9. Фундаментальное решение оператора Гельмгольца.

$$(\Delta + k^2) \mathcal{E}_k = \delta(x). \quad (38)$$

В § 6.5, е) было показано, что

$$\mathcal{E}_2(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad \bar{\mathcal{E}}_2(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|} \quad (39)$$

— фундаментальные решения оператора Гельмгольца при $n=3$. Формулы (39) справедливы и при комплексных k .

Вычислим $\mathcal{E}_2(x)$ методом преобразования Фурье. Из (38) имеем

$$(-|\xi|^2 + k^2)F[\mathcal{E}_2] = 1. \quad (40)$$

Возьмем решение уравнения (40) в виде

$$F[\mathcal{E}_2] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{k^2 + i\varepsilon - |\xi|^2} = \frac{1}{k^2 + i0 - |\xi|^2},$$

и, следовательно, в силу непрерывности преобразования Фурье,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(x) &= F^{-1}\left[\frac{1}{k^2 + i0 - |\xi|^2}\right] = \\ &= \frac{1}{4\pi^3} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\xi| < R} \frac{e^{-i(x, \xi)}}{k^2 + i\varepsilon - |\xi|^2} d\xi = \\ &= \frac{1}{4\pi^3} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\rho}{k^2 + i\varepsilon - \rho^2} \int_0^{2\pi} e^{-i\rho|x|\cos\varphi} d\varphi d\rho = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\rho J_0(\rho|x|)}{k^2 + i\varepsilon - \rho^2} d\rho = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} K_0(-i\sqrt{k^2 + i\varepsilon}|x|) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x|). \end{aligned}$$

Здесь использовалась формула 6.532, 4) из справочника И. С. Градштейна и И. М. Рыжика [1]; $H_n^{(j)}$, $j=1, 2$, — функции Ханкеля (см. § 23.8); пределы понимаются в смысле сходимости в пространстве $\mathcal{D}'$.

Итак, функции

$$\mathcal{E}_2(x) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x|), \quad \bar{\mathcal{E}}_2(x) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|x|) \quad (41)$$

— фундаментальные решения оператора Гельмгольца при $n=2$.

При $n=1$ фундаментальные решения удобно взять в виде (см. § 11.5)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(x) &= \frac{\theta(x)}{k} \sin kx - \frac{\sin kx}{2k} + \frac{\cos kx}{2ik} = \frac{1}{2ik} e^{ik|x|}, \\ \bar{\mathcal{E}}_1(x) &= -\frac{1}{2ik} e^{-ik|x|}. \end{aligned} \quad (42)$$

10. Фундаментальное решение оператора Коши — Римана.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{E} = \delta(x, y). \quad (43)$$

В § 6.5, ж) было показано, что

$$\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{\pi z}. \quad (44)$$

11. Фундаментальное решение оператора переноса *).

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \mathcal{E}_s}{\partial t} + (s, \text{grad } \mathcal{E}_s) + \alpha \mathcal{E}_s = \delta(x, t), \quad |s|=1. \quad (45)$$

Применяя к равенству (45) преобразование Фурье F_x для обобщенной функции $F_x[\mathcal{E}_s] = \tilde{\mathcal{E}}_s(\xi, t)$ получаем уравнение

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_s(\xi, t)}{\partial t} + [\alpha - i(s, \xi)] \tilde{\mathcal{E}}_s(\xi, t) = 1(\xi) \cdot \delta(t). \quad (46)$$

Отсюда, пользуясь формулой (22), заключаем, что решением из $\mathcal{D}'$ уравнения (46) является функция

$$\tilde{\mathcal{E}}_s(\xi, t) = v\theta(t) e^{i[s(\xi, t) - \alpha t]}.$$

Применяя теперь обратное преобразование Фурье F_x^{-1} :

$$\mathcal{E}_s(x, t) = F_x^{-1}[\tilde{\mathcal{E}}_s(\xi, t)] = v\theta(t) e^{-\alpha t} F^{-1}[e^{i[s(\xi, t) - \alpha t]}],$$

и пользуясь формулой (11) § 9.2 при $x_0 = vts$:

$$F^{-1}[e^{i[s(\xi, t) - \alpha t]}] = \delta(x - vts),$$

получаем фундаментальное решение оператора переноса

$$\mathcal{E}_s(x, t) = v\theta(t) e^{-\alpha t} \delta(x - vts). \quad (47)$$

*) См. § 2.4.

Для вычисления фундаментального решения $\mathcal{E}_s(x)$ стационарного оператора переноса

$$(s, \text{grad } \mathcal{E}_s^* + \alpha \mathcal{E}_s^* = \delta(x) \quad (48)$$

воспользуемся методом спуска по переменной t (см. § 11.4). В результате, в силу (47), при всех $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ получим

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_s, \varphi(x) 1(t)) &= v \int_0^\infty e^{-\alpha w} (\delta(x - vts), \varphi(x)) dt = \\ &= v \int_0^\infty e^{-\alpha w} \varphi(vts) dt = \int_0^\infty e^{-\alpha u} \varphi(us) du = \\ &= \left(\frac{e^{-\alpha|x|}}{|x|^2} \delta\left(s - \frac{x}{|x|}\right), \varphi \right), \end{aligned}$$

откуда, в силу (20), вытекает, что

$$\mathcal{E}_s^*(x) = \frac{e^{-\alpha|x|}}{|x|^2} \delta\left(s - \frac{x}{|x|}\right). \quad (49)$$

Из (49), в частности, имеем

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \mathcal{E}_s^*(x) dS = \frac{e^{-\alpha|x|}}{4\pi|x|^2}. \quad (50)$$

12. Упражнения. а) Пользуясь формулой (29), показать, что обобщенные функции

$$\mathcal{E}_n(x, t) = \begin{cases} \frac{v(t)}{2\pi a} \left(\frac{d}{\pi a^2 dt^2} \right)^{\frac{n-3}{2}} \delta(a^2 t^2 - |x|^2), & n \geq 3 - \text{нечетное,} \\ \frac{1}{2\pi a} \left(\frac{1}{\pi a^2} \frac{d}{dt^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{v(at^2 - |x|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, & n \geq 2 - \text{четное,} \end{cases} \quad (51)$$

являются фундаментальными решениями волнового оператора $\square_a$.

б) Доказать, что фундаментальными решениями оператора Клейна—Гордона—Фока $\square + m_0^2$ (см. § 2.8) являются обобщенные функции

$$D^r(x_0, x) = \frac{\delta(x)}{2\pi} \delta(x_0^2 - |x|^2) - \frac{m_0}{4\pi} \delta(x_0 - |x|) \frac{J_1(m_0 \sqrt{x_0^2 - |x|^2})}{\sqrt{x_0^2 - |x|^2}} \quad (52)$$

и $D^s(x_0, x) = D^r(-x_0, x)$; здесь J_1 — функция Бесселя.

с) Доказать, что обобщенные функции

$$\begin{aligned} D^+(x_0, x) &= \frac{1}{8\pi^2} F[0, \xi_0] \delta(\xi_0^2 - |x|^2 - m_0^2), \\ D^-(x_0, x) &= -\frac{1}{8\pi^2} F[0, -\xi_0] \delta(\xi_0^2 - |x|^2 - m_0^2) \end{aligned} \quad (53)$$

удовлетворяют уравнению Клейна—Гордона—Фока и соотношению

$$D^+ + D^- = D^r - D^s.$$

Обобщенные функции D^r , D^s , D^+ и D^- играют важную роль в квантовой теории поля *).

д) Пользуясь формулой (43) § 2.8, показать, что матрица четвертого порядка

$$\mathcal{E}(x_0, x) = - \left(i \sum_{k=0}^3 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} + m_0 I \right) D^r(x_0, x), \quad (54)$$

где D^r определена в (52), есть фундаментальное решение оператора Дирака (см. § 2.8)

$$\left(i \sum_{k=0}^3 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 I \right) \mathcal{E} = \delta(x_0, x) I.$$

е) Пользуясь формулой (39) § 9.7, показать, что функция

$$\mathcal{E}(x, t) = -\frac{1}{2} (t) \frac{1+t}{V 2h} \sqrt{\frac{m_0}{2\pi h}} e^{-\frac{m_0}{2h} x^2} \quad (55)$$

является фундаментальным решением одномерного оператора Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

г) Показать, что функция

$$\mathcal{E}_{n,k}(x) = \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{n}{2} - k\right)}{2^{k+1} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(k)} |x|^{2k-n}$$

есть фундаментальное решение итерированного оператора Лапласа Δ^k при $2k < n$.

з) Доказать, если функция $u \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$ такова, что свертка $u * [\delta(x) \cdot 1(t)]$ существует, то существует функционал u_0 (см. (16)), и

*) См. Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков [1], гл. II.

справедлива формула

$$u * [\delta(x) \cdot 1(t)] = u_0(x) \cdot 1(t).$$

б) Доказать: если функции $\int |u(x, t)| dt$ локально интегрируема, то

$$u * [\delta(x) \cdot 1(t)] = \int u(x, \tau) d\tau.$$

§ 12. Волновой потенциал

1. Свойства фундаментального решения волнового оператора. Фундаментальными решениями волнового оператора при $n=1, 2$ и 3 являются (обобщенные) функции (см. формулы (32) и (30) § 11.7)

$$\mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|), \quad \mathcal{E}_2(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}},$$

$$\mathcal{E}_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2} \delta_{S_{at}}(x) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(a^2 t^2 - |x|^2).$$

Функции $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ локально интегрируемы, а обобщенная

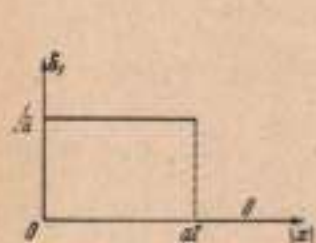


Рис. 42.

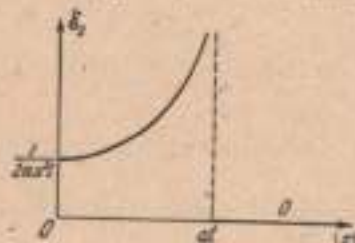


Рис. 43.

функция $\mathcal{E}_3$ действует на основные функции $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ по формуле (31) § 11.7:

$$(\mathcal{E}_3, \varphi) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x, t) dS dt = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{R^n} \frac{\varphi(x, \frac{|x|}{a})}{|x|} dx. \quad (1)$$

Носители функций $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ совпадают с замыканием конуса будущего Γ^+ (рис. 29), а носитель обобщенной функции $\mathcal{E}_3$ совпадает с границей $[at = |x|]$ этого конуса. На рис. 42—44 схематически изображены графики фундаментальных решений $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_3$ в момент времени t .

Пусть $f(x, t) \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$ и $\varphi(x) \in \mathcal{D}(R^n)$.

Введем обобщенную функцию $(f(x, t), \varphi(x)) \in \mathcal{D}'(R^1)$, действующую по формуле

$$((f(x, t), \varphi(x)), \psi) = (f, \varphi\psi), \quad \psi(t) \in \mathcal{D}(R^1). \quad (2)$$

Из этого определения вытекает следующая формула:

$$\left(\frac{\partial^k f(x, t)}{\partial t^k}, \varphi(x) \right) = \frac{d^k}{dt^k} (f(x, t), \varphi(x)), \quad k=1, 2, \dots \quad (3)$$

Действительно, при всех $\psi \in \mathcal{D}(R^1)$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\partial^k f(x, t)}{\partial t^k}, \varphi(x) \right), \psi \right) &= \left(\frac{\partial^k f}{\partial t^k}, \varphi\psi \right) = (-1)^k (f, \varphi \frac{d^k \psi}{dt^k}) = \\ &= (-1)^k (f(x, t), \varphi(x)), \frac{d^k \psi}{dt^k} = \left(\frac{d^k}{dt^k} (f(x, t), \varphi(x)), \psi \right), \end{aligned}$$

откуда и следуют равенства (3).

Будем говорить, что обобщенная функция $f(x, t)$ принадлежит классу C^p , $0 \leq p \leq \infty$, по переменной t в (a, b) (соответственно на $[a, b]$), если для любой $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ обобщенная функция $(f(x, t), \varphi(x))$ принадлежит классу $C^p(a, b)$ (соответственно $C^p([a, b])$) (см. § 5.6).

Лемма. Фундаментальные решения $\mathcal{E}_n(x, t)$, $n=1, 2, 3$, принадлежат классу C^∞ по переменной t в $[0, \infty)$ и удовлетворяют предельным соотношениям при $t \rightarrow +0$

$$\mathcal{E}_n(x, t) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t} \rightarrow \delta(x), \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t^2} \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(R^n). \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $n=3$ и $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$. Из (1) вытекает, что

$$(\mathcal{E}_3(x, t), \varphi(x)) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2} \int_{S_{at}} \varphi(x) dS = \frac{\theta(t)t}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(ats) ds. \quad (5)$$

Так как правая часть равенства (5) бесконечно дифференцируема по t в $[0, \infty)$ в смысле § 1.2, то, следовательно, $\mathcal{E}_3$ принадлежит классу C^∞ по t в $[0, \infty)$. Кроме

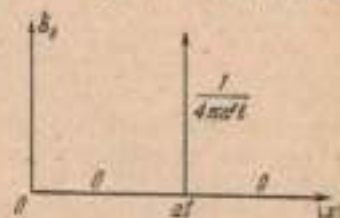


Рис. 44.

того, из (5) вытекает, что

$$(\mathcal{E}_2(x, t), \varphi(x)) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +0, \quad (6)$$

Далее, пользуясь формулой (3) при $f = \mathcal{E}_2$ и $k=1, 2$, из формулы (5) получим при $t \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_2(x, t)}{\partial t}, \varphi(x) \right) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(ats) ds \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(ats) ds + \frac{t}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{S_1} \varphi(ats) ds \rightarrow \varphi(0) = (\delta, \varphi), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_2(x, t)}{\partial t^2}, \varphi(x) \right) &= \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(ats) ds \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{S_1} \varphi(ats) ds + \frac{t}{4\pi} \frac{d^2}{dt^2} \int_{S_1} \varphi(ats) ds \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (8)$$

ибо функция

$$\int_{S_1} \varphi(ats) ds = \int_{S_1} \varphi(-ats) ds$$

— четная бесконечно дифференцируемая по t , а потому ее первая производная при $t=0$ равна нулю. В силу произвольности $\varphi \in \mathcal{D}(R^3)$ предельные соотношения (6) — (8) эквивалентны соотношениям (4) при $n=3$.

Пусть теперь $n=2$, 1 и $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$. Тогда при $t > 0$

$$(\mathcal{E}_2(x, t), \varphi(x)) = \frac{1}{2\pi a} \int_{at} \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} = \frac{t}{2\pi} \int_0^{at} \frac{\varphi(a\eta) d\eta}{\sqrt{1 - |\eta|^2}}. \quad (9)$$

$$(\mathcal{E}_1(x, t), \varphi(x)) = \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \varphi(x) dx = \frac{t}{2} \int_{-1}^1 \varphi(a\eta) d\eta. \quad (10)$$

Отсюда, как и при $n=3$, вытекают все утверждения леммы.

2. Дополнительные сведения о свертках. Установим еще один признак существования свертки.

Теорема. Пусть обобщенные функции f и g из $\mathcal{D}'(R^{n+1})$ таковы, что $f(x, t) = 0, t < 0$ и $\text{supp } g \subset \Gamma^+$. Тогда свертка $f * g$ существует в $\mathcal{D}'(R^{n+1})$ и при всех $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+1})$

представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = \int (\tilde{f}(\xi, t) \cdot g(y, \tau), \eta(\tau) \eta(\tau) \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \varphi(\xi + y, t + \tau)), \quad (11)$$

где $\eta(\tau)$ — любая функция класса $C^\infty(R^1)$, равная 0 при $t < -\delta$ и 1 при $t > \delta$ (δ и ε — любые числа, $\delta > \varepsilon > 0$). При этом свертка $f * g$ обращается в нуль при $t < 0$ и непрерывна относительно f и g в отделимости: 1) если $f_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'(R^{n+1}), f_k = 0, t < 0$, то $f_k * g \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'(R^{n+1})$; 2) если $g_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'(R^{n+1}), \text{supp } g_k \subset \Gamma^+$, то $f * g_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'(R^{n+1})$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x, t)$ — произвольная функция из $\mathcal{D}(R^{n+1}), \text{supp } \varphi \subset U_A$ и $\eta_k(\xi, t; y, \tau), k = 1, 2, \dots$ — последовательность функций из $\mathcal{D}(R^{2n+2})$, сходящаяся к 1 в R^{2n+2} (см. § 7.4). Тогда при всех достаточно больших k

$$\begin{aligned} \Psi_k &= \eta(t) \eta(\tau) \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \eta_k(\xi, t; y, \tau) \varphi(\xi + y, t + \tau) = \\ &= \eta(t) \eta(\tau) \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \varphi(\xi + y, t + \tau) = \varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Для доказательства равенства (12) достаточно установить, что функция $\varphi \in \mathcal{D}(R^{2n+2})$. Но это следует из того, что она бесконечно дифференцируема, а множество

$$\{(\xi, t, y, \tau): t \geq -\delta, \tau \geq -\delta, a^2 \tau^2 - |y|^2 \geq -\delta, |y + \xi|^2 + (t + \tau)^2 \leq A^2\},$$

в котором содержится ее носитель, ограничено, поскольку оно содержится в ограниченном множестве (см. рис. 35)

$$\{-\delta \leq t \leq A + \delta, -\delta \leq \tau \leq A + \delta, |y| \leq \sqrt{a^2(A + \delta)^2 + \delta}, |\xi| \leq \sqrt{a^2(A + \delta)^2 + \delta + A}\}.$$

Далее, по построению $\eta(t) = 1$ в окрестности носителя $f(\xi, t)$ и $\eta(\tau) \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) = 1$ в окрестности носителя $g(y, \tau)$. Следовательно (см. (18) § 5.10),

$$f(\xi, t) = \eta(t) f(\xi, t), g(y, \tau) = \eta(\tau) \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) g(y, \tau).$$

Учитывая теперь эти равенства и равенство (12), убеждаемся в справедливости формулы (11):

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(\xi, t) \cdot g(y, \tau), \eta_k(\xi, t; y, \tau) \varphi(\xi + y, t + \tau)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(\xi, t) \cdot g(y, \tau), \Psi_k) = (f(\xi, t) \cdot g(y, \tau), \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^{n+1}). \end{aligned}$$

Докажем, что $f * g = 0$, $t < 0$. Пусть $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(R^{n+1})$ и $\text{supp } \varphi \subset \{t < 0\}$. Так как носитель φ — компакт в R^{n+1} , то найдется такое число $\delta_1 > 0$, что $\text{supp } \varphi \subset \{t \leq -\delta_1\}$. А тогда, выбирая $\delta < \frac{\delta_1}{2}$, получим

$$\eta(t) \eta(\tau) \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \varphi(\xi + y, t + \tau) = 0, \quad (13)$$

откуда, в силу (11), $(f * g, \varphi) = 0$, что и утверждалось.

Непрерывность свертки $f * g$ относительно f и g следует из представления (11) и из непрерывности прямого произведения $f(\xi, t) \cdot g(y, \tau)$ относительно f и g в отдельности (см. § 7.3, а)). При этом вспомогательную функцию η можно выбрать не зависящей от k . Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема легко обобщается на тот случай, если конус будущего Γ^+ заменить на произвольный замкнутый выпуклый конус C , не содержащий целой прямой.

Отметим, что частный случай этой теоремы (при $n=0$) установлен в § 7.7.

Докажем формулу: если $g(x, t) \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$, $\text{supp } g \subset \Gamma^+$ и $u(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$, то

$$g * [u(x) \cdot \delta(t)] = g(x, t) * u(x), \quad (14)$$

причем обобщенная функция $g(x, t) * u(x)$ действует по правилу

$$(g(x, t) * u(x), \varphi) = (g(y, t) \cdot u(\xi), \eta(a^2 t^2 - |y|^2) \varphi(y + \xi, t)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^{n+1}). \quad (15)$$

Действительно, полагая в формуле (11) $f = u(x) \cdot \delta(t)$, при всех $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+1})$ получим

$$\begin{aligned} (g * [u(x) \cdot \delta(t)], \varphi) &= \\ &= (g(y, \tau) \cdot u(\xi) \cdot \delta(t), \eta(\tau) \eta(t) \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \varphi(y + \xi, \tau + t)) = \\ &= (g(y, \tau) \cdot u(\xi), \eta(\tau) \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) (\delta(t), \eta(t) \varphi(y + \xi, \tau + t))) = \\ &= (g(y, \tau) \cdot u(\xi), \eta(\tau) \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \varphi(y + \xi, \tau)). \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку носитель $g(y, \tau)$ содержится в полупространстве $\tau \geq 0$, то, в силу (18) § 5.10, $g = \eta(\tau) g$. Далее, функция

$$\eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \varphi(y + \xi, \tau) \in \mathcal{D}(R^{2n+1}),$$

Поэтому, продолжая равенства (16) и учитывая (15), получим равенство (14):

$$\begin{aligned} (g * [u(x) \cdot \delta(t)], \varphi) &= \\ &= (\eta(\tau) g(y, \tau) \cdot u(\xi), \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \varphi(y + \xi, \tau)) = \\ &= (g(y, \tau) \cdot u(\xi), \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \varphi(y + \xi, \tau)) = \\ &= (g(x, t) * u(x), \varphi). \end{aligned}$$

Здесь последнее равенство получено в силу теоремы § 7.6.

Пользуясь теперь формулой (14) и правилами дифференцирования прямого произведения (см. § 7.3, с)) и свертки (см. § 7.5, с)), при всех $k=1, 2, \dots$ получаем равенства

$$g * [u(x) \cdot \delta^{(k)}(t)] = \frac{\partial^k}{\partial t^k} [g(x, t) * u(x)] = \frac{\partial^k g(x, t)}{\partial t^k} * u(x). \quad (17)$$

3. Волновой потенциал. Пусть обобщенная функция $f(x, t)$ из $\mathcal{D}'(R^{n+1})$ обращается в нуль в полупространстве $t < 0$. Обобщенная функция

$$V_n = \mathcal{E}_n * f,$$

где $\mathcal{E}_n$ — фундаментальное решение волнового оператора, называется волновым потенциалом с плотностью f .

Так как $\text{supp } \mathcal{E}_n \subset \Gamma^+$, то, по теореме § 12.2, волновой потенциал V_n существует в $\mathcal{D}'(R^{n+1})$ и представляется в виде

$$(V_n, \varphi) = (\mathcal{E}_n(y, \tau) \cdot f(\xi, \tau), \eta(\tau) \eta(\tau') \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \varphi(y + \xi, \tau + \tau')), \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^{n+1}), \quad (18)$$

где $\eta(\tau)$ — любая функция класса $C^\infty(R^1)$, равная 0 при $\tau < -\delta$ и 1 при $\tau > -\varepsilon$; δ и ε — любые, $\delta > \varepsilon > 0$. Кроме того, по той же теореме волновой потенциал $V_n(x, t)$ обращается в нуль при $t < 0$ и непрерывно зависит от плотности f в $\mathcal{D}'(R^{n+1})$. Наконец, по теореме § 11.3, этот потенциал удовлетворяет волновому уравнению

$$\square_n V_n = f. \quad (19)$$

Дальнейшие свойства волнового потенциала V_n существенно зависят от свойств плотности f .

Если f — локально интегрируемая функция в R^{n+1} , то V_n — локально интегрируемая функция в R^{n+1} и

выражается формулами

$$V_2(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{U(x, at)} \frac{f(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{a})}{|x-\xi|} d\xi, \quad (20)$$

$$V_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{U(x, a(t-\tau))} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}}, \quad (20')$$

$$V_1(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^{t+a(t-\tau)} \int_{x-a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (20'')$$

Докажем формулу (20). Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(R^4)$. Так как f — локально интегрируемая функция в R^4 , то, учитывая, что $f=0$ при $t < 0$, и принимая во внимание формулу (1) и теорему Фубини, из представления (18) получаем $(V_2, \varphi) = (\mathcal{E}_2(y, \tau), \varphi)$.

$$\begin{aligned} & \eta(\tau) \eta(a^2\tau^2 - |y|^2) \int f(\xi, \tau') \eta(\tau') \varphi(y + \xi, \tau + \tau') d\xi d\tau' = \\ & = (\mathcal{E}_2(y, \tau), \eta(\tau) \eta(a^2\tau^2 - |y|^2) \int f(x-y, t-\tau) \varphi(x, t) dx dt) = \\ & = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{R^4} \frac{\eta(\frac{|y|}{a})}{|y|} \eta(0) \left[\int f(x-y, t - \frac{|y|}{a}) \varphi(x, t) dx dt \right] dy = \\ & = \frac{1}{4\pi a^2} \int \varphi(x, t) \int_{at} \frac{f(x-y, t - \frac{|y|}{a})}{|y|} dy dx dt. \end{aligned}$$

Это значит, что потенциал V_2 — локально интегрируемая функция в R^4 и представляется в виде

$$V_2(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{at} \frac{f(x-y, t - \frac{|y|}{a})}{|y|} dy. \quad (21)$$

Совершая в этом интеграле замену переменных $x-y=\xi$, получаем формулу (20).

Аналогично, с соответствующими упрощениями, выводятся формулы (20') и (20'') для потенциалов V_2 и V_1 .

Сопоставим каждой точке (x, t) , $t > 0$, открытый конус

$$\Gamma_+(x, t) = \Gamma^-(x, t) \cap [0 < \tau < t]$$

с вершиной (x, t) , основанием $U(x, at)$ и боковой поверхностью $B(x, t)$ (рис. 45); здесь $\Gamma^-(x, t)$ — конус прошлого (см. § 3.3).

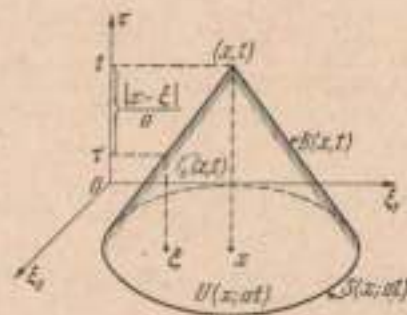


Рис. 45.

Теорема. Если $f \in C^2(t \geq 0)$ при $n=3$ и 2 , $f \in C^1(t \geq 0)$ при $n=1$, то потенциал $V_n \in C^2(t \geq 0)$ и удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} |V_3(x, t)| &\leq \frac{t^n}{2} \max_{\Gamma_+(x, t)} |f(\xi, \tau)|, \\ |V_n(x, t)| &\leq \frac{t^n}{2} \max_{\Gamma_+(x, t)} |f(\xi, \tau)|, \quad n=1, 2, \end{aligned} \quad (22)$$

и начальным условиям

$$V_n|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial V_n}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (23)$$

Доказательство. Докажем теорему при $n=3$. Замена переменных $y = at\eta$, $t > 0$, преобразует формулу (21) к виду

$$V_3(x, t) = \frac{t^3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{f(x+at\eta, t(1-|\eta|))}{|\eta|} d\eta. \quad (24)$$

Так как $f \in C^2(t \geq 0)$ и подынтегральное выражение в (24) имеет интегрируемую особенность, то $V_3 \in C^2(t \geq 0)$ (см. 1.5). Из представления (24) следует также оценка (22) для

потенциала V_2 :

$$|V_2(x, t)| \leq \frac{t^2}{4\pi} \max_{B(x, t)} |f(\xi, \tau)| \int_0^1 \frac{d\eta}{|\eta|} = \frac{t^2}{2} \max_{B(x, t)} |f(\xi, \tau)|.$$

Так как $V_2 \in C^2(t \geq 0)$, то из оценки (22) вытекают начальные условия (23).

Пусть теперь $n=2$. Замена переменных $\xi = x + at\eta$, $\tau = t - at$, $t > 0$, преобразует представление (20') для потенциала V_2 к виду

$$V_2(x, t) = \frac{t^2}{2\pi} \int_0^1 \int_{\partial_x} \frac{f(x + at\eta, t - at)}{V \alpha^2 - |\eta|^2} d\eta d\alpha, \quad (24')$$

из которого непосредственно и вытекают требуемые свойства этого потенциала.

Свойства потенциала V_1 следуют из представления (20'). Теорема доказана.

Замечание. Волновой потенциал $V_2(x, t)$ называется также запаздывающим потенциалом. Это название связано с тем, что согласно формуле (20) значение потенциала V_2 в точке x в момент времени $t > 0$ определяется значениями источника $f(\xi, \tau)$, $\xi \in \bar{U}(x, at)$, взятыми в ранние моменты времени $\tau = t - \frac{|x - \xi|}{a}$, причем время запаздывания $\frac{1}{a} |x - \xi|$ — это то время, которое необходимо для прихода возмущения из точки ξ в точку x . Другими словами, $V_2(x, t)$ зависит лишь от значений источника $f(\xi, \tau)$ на боковой поверхности $B(x, t)$ конуса $\Gamma_0^-(x, t)$ (см. рис. 45).

4. Поверхностные волновые потенциалы. Если $f = u_1(x) \cdot \delta(t)$ или $f = u_0(x) \cdot \delta'(t)$, где u_0 и u_1 произвольные обобщенные функции из $\mathcal{D}'(R^n)$, то соответствующие волновые потенциалы

$$V_n^{(0)} = \mathcal{E}_n * [u_1(x) \cdot \delta(t)], \quad V_n^{(1)} = \mathcal{E}_n * [u_0(x) \cdot \delta'(t)], \quad n = 1, 2, 3,$$

называются *поверхностными волновыми потенциалами* (простого и двойного слоя с плотностями u_1 и u_0 соответственно).

В силу формул (14) и (17) § 12.2 волновые потенциалы $V_n^{(0)}$ и $V_n^{(1)}$ представляются в виде

$$V_n^{(0)} = \mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x), \quad (25)$$

$$V_n^{(1)} = \frac{\partial \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t} * u_0(x) = \frac{\partial}{\partial t} [\mathcal{E}_n(x, t) * u_0(x)], \quad (26)$$

причем обобщенная функция $\mathcal{E}_n(x, t) * u(x)$ действует в соответствии с формулой (15).

Лемма. Поверхностные волновые потенциалы $V_n^{(0)}$ и $V_n^{(1)}$ принадлежат классу C^∞ по переменной t в $[0, \infty)$ и удовлетворяют начальным условиям при $t \rightarrow +\infty$

$$V_n^{(0)}(x, t) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial V_n^{(0)}(x, t)}{\partial t} \rightarrow u_1(x) \text{ в } \mathcal{D}'(R^n), \quad (27)$$

$$V_n^{(1)}(x, t) \rightarrow u_0(x), \quad \frac{\partial V_n^{(1)}(x, t)}{\partial t} \rightarrow 0 \text{ в } \mathcal{D}'(R^n). \quad (28)$$

Доказательство. По лемме § 12.1 обобщенная функция $\mathcal{E}_n(x, t)$ принадлежит классу C^∞ по переменной t в $[0, \infty)$. Далее, при каждом $t > 0$ носитель $\mathcal{E}_n(x, t)$ содержится в шаре $\bar{U}_{at}$ и, следовательно, равномерно ограничен в R^n при $t \rightarrow t_0 \geq 0$. Поэтому, пользуясь теоремой § 7.6 о непрерывности свертки в $\mathcal{D}'$, заключаем, что при всех $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$

$$\left(\frac{\partial^k \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t^k} * u_1(x), \varphi(x) \right) \in C[0, \infty), \quad k = 0, 1, \dots$$

Отсюда, в силу равенств (3) и (17),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial t^k} (\mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x), \varphi) = \\ = \left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} [\mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x)], \varphi \right) = \left(\frac{\partial^k \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t^k} * u_1(x), \varphi \right). \end{aligned}$$

выводим, что $(\mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x), \varphi) \in C^\infty[0, \infty)$. Это и значит, в силу (25), что потенциал $V_n^{(0)}(x, t)$ принадлежит классу C^∞ по t в $[0, \infty)$. Заменяя u_1 на u_0 , выводим из (26), что таким же свойством обладает и потенциал $V_n^{(1)}$.

Докажем предельные соотношения (27). Учитывая предельные соотношения (4) и пользуясь непрерывностью свертки $\mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x)$ в $\mathcal{D}'(R^n)$, получаем при $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(x, t) = \mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x) \rightarrow 0 * u_1(x) = 0 \text{ в } \mathcal{D}'(R^n), \\ \frac{\partial V_n^{(0)}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x)] = \frac{\partial \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t} * u_1(x) \rightarrow \\ \rightarrow \delta * u_1 = u_1(x) \text{ в } \mathcal{D}'(R^n). \end{aligned}$$

Аналогично устанавливаются и предельные соотношения (28). Лемма доказана.

Дальнейшие свойства поверхностных волновых потенциалов $V_n^{(n)}$ и $V_n^{(1)}$ существенно зависят от свойств плотностей u_1 и u_0 .

Если u_1 — локально интегрируемая функция в R^n , то поверхностный потенциал $V_n^{(n)}$ — локально интегрируемая функция в R^{n+1} и выражается формулами

$$V_n^{(n)}(x, t) = \frac{\delta(t)}{4\pi a^n} \int_{S(x, at)} u_1(\xi) dS, \quad (29)$$

$$V_n^{(n)}(x, t) = \frac{\delta(t)}{2\pi a} \int_{U(x, at)} \frac{u_1(\xi) d\xi}{a^2 t^2 - |x - \xi|^2}, \quad (29')$$

$$V_1^{(n)}(x, t) = \frac{\delta(t)}{2a} \int_{s=at}^{s=+at} u_1(\xi) d\xi. \quad (29'')$$

Установим формулу (29). Так как функция u_1 — локально интегрируемая в R^n , то, пользуясь формулами (25), (15) и (I), при всех $\varphi \in \mathcal{D}(R^4)$ получаем

$$\begin{aligned} (V_n^{(n)}, \varphi) &= (\mathcal{E}_2(x, t) * u_1(x), \varphi) = \\ &= (\mathcal{E}_2(y, t), \eta(a^2 t^2 - |y|^2) \int u_1(\xi) \varphi(y + \xi, t) d\xi) = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{\eta(t)}{t} \int_{S_{at}} \int_{R^n} u_1(x-y) \varphi(x, t) dx dS_y dt = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \int_{R^n} \frac{\varphi(x, t)}{t} \int_{S_{at}} u_1(x-y) dS_y dx dt, \end{aligned}$$

откуда следует, что $V_n^{(n)}$ локально интегрируема в R^4 и представляется в виде (ср. с формулой (34) § 7.10)

$$V_n^{(n)}(x, t) = \frac{\delta(t)}{4\pi a^n} \int_{S_{at}} u_1(x-y) dS_y.$$

Совершая в этом интеграле замену переменных $x-y = \xi$, получим формулу (29). Аналогично, с соответствующими упрощениями, выводятся формулы (29') и (29'') для потенциалов $V_n^{(n)}$ и $V_1^{(n)}$.

Теорема. Если $u_0 \in C^2(R^n)$, $u_1 \in C^2(R^n)$ при $n=3$ и 2; $u_0 \in C^2(R^1)$, $u_1 \in C^1(R^1)$ при $n=1$, то потенциалы $V_n^{(n)}$ и $V_n^{(1)}$ принадлежат классу $C^2(t \geq 0)$ и

удовлетворяют оценкам

$$|V_n^{(n)}(x, t)| \leq t \max_{S(x, at)} |u_1(\xi)|; \quad (30)$$

$$|V_n^{(n)}(x, t)| \leq t \max_{U(x, at)} |u_1(\xi)|, \quad n=1, 2; \quad (30')$$

$$|V_n^{(1)}(x, t)| \leq \max_{S(x, at)} |u_0(\xi)| + at \max_{S(x, at)} |\text{grad } u_0(\xi)|, \quad (31)$$

$$|V_1^{(1)}(x, t)| \leq \max_{U(x, at)} |u_0(\xi)| + at \max_{U(x, at)} |\text{grad } u_0(\xi)|, \quad (31')$$

$$|V_1^{(1)}(x, t)| \leq \max_{S(x, at)} |u_0(\xi)| \quad (31'')$$

и начальным условиям

$$V_n^{(n)}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial V_n^{(n)}}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x), \quad (32)$$

$$V_n^{(1)}|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial V_n^{(1)}}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (33)$$

Доказательство. Пусть $n=3$. Совершая в формуле (29) замену переменных $x-\xi=ats$, $t>0$, получим представление

$$V_n^{(n)}(x, t) = \frac{\delta(t)}{4\pi} \int_{S_t} u_1(x-ats) ds, \quad (34)$$

из которого следует, что $V_n^{(n)}$ удовлетворяет оценке (30) и принадлежит классу $C^2(t \geq 0)$, поскольку $u_1 \in C^2(R^3)$. Дифференцируя формулу (34) по t и пользуясь (26), получим представление для потенциала $V_1^{(1)}$:

$$\begin{aligned} V_1^{(1)}(x, t) &= \frac{\delta(t)}{4\pi} \int_{S_t} u_0(x-ats) ds - \\ &\quad - \frac{at\delta(t)}{4\pi} \int_{S_t} (\text{grad}_x u_0(x-ats), s) ds, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что $V_1^{(1)}$ удовлетворяет оценке (31):

$$\begin{aligned} |V_1^{(1)}(x, t)| &\leq \max_{|s|=1} |u_0(x-ats)| + at \max_{|s|=1} |(\text{grad}_x u_0(x-ats), s)| \leq \\ &\leq \max_{S(x, at)} |u_0(\xi)| + at \max_{S(x, at)} |\text{grad}_x u_0(x)| \end{aligned}$$

и принадлежит классу $C^2(t \geq 0)$, поскольку $u_0 \in C^2(R^3)$.

При $n=2$ замена переменных $\xi = x - at\eta$ при $t > 0$ преобразует представления (29') и (26) для потенциалов

$V_2^{(n)}$ и $V_2^{(1)}$ к виду

$$V_2^{(n)}(x, t) = \frac{\delta(t)}{2\pi} \int_{U_1} \frac{u_1(x - at\eta)}{V \sqrt{1 - |\eta|^2}} d\eta,$$

$$V_2^{(1)}(x, t) = \frac{\delta(t)}{2\pi} \int_{U_1} \frac{u_2(x - at\eta)}{V \sqrt{1 - |\eta|^2}} d\eta - \\ - \frac{at\delta(t)}{2\pi} \int_{U_1} \frac{(u_2 \operatorname{grad}_{\eta} u_2)(x - at\eta, \eta)}{V \sqrt{1 - |\eta|^2}} d\eta,$$

откуда и вытекают требуемые свойства гладкости и оценки (30') и (31') для потенциалов $V_2^{(n)}$ и $V_2^{(1)}$, например,

$$|V_2^{(n)}(x, t)| \leq \frac{t}{2\pi} \max_{\eta \in U_1} |u_1(x - at\eta)| \int_{U_1} \frac{d\eta}{V \sqrt{1 - |\eta|^2}} = \\ = t \max_{\xi \in U(x, at)} |u_1(\xi)| \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{V \sqrt{1 - \rho^2}}.$$

Соответствующие свойства потенциалов $V_1^{(n)}$ и $V_1^{(1)}$ следуют из представлений (29') и (26), например:

$$V_1^{(1)}(x, t) = \frac{\delta(t)}{2} [u_0(x + at) + u_0(x - at)].$$

Теперь установим справедливость начальных условий (32) и (33). В силу (27) и (28) эти условия выполнены в смысле сходимости в пространстве $\mathscr{D}'(R^n)$. Но по доказанному функции $V_2^{(n)}(x, t)$ и $V_2^{(1)}(x, t)$ принадлежат классу $C^2(t \geq 0)$. Следовательно, эти функции удовлетворяют условиям (32) и (33) в обычном смысле. Теорема доказана.

Замечание. Формулы (29), (29') и (29'') формально следуют из формул (20), (20') и (20''), если в них положить $f(\xi, \tau) = u_1(\xi) \times \times \delta(\tau)$ и «проинтегрировать» $\delta(\tau)$.

§ 13. Задача Коши для волнового уравнения

В этом параграфе мы применяем теорию обобщенных функций к решению (обобщенной) задачи Коши для волнового уравнения.

1. Задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Прежде всего решим задачу Коши для обыкновен-

ного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$Lu = u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \dots + a_n u = f(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

где $f \in C(t \geq 0)$.

Пусть $u(t)$ — решение задачи Коши (1) — (2). Продолжим функции $u(t)$ и $f(t)$ нулем на $t < 0$. Обозначая продолженные функции через $\hat{u}$ и $\hat{f}$ соответственно и пользуясь формулами (14) § 6.4 и начальными условиями (2), получим

$$\hat{u}^{(k)} = \{u^{(k)}(t)\} + \sum_{l=0}^{k-1} u_l \delta^{(k-l-1)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда и из уравнения (1) заключаем, что

$$L\hat{u} = \{L\hat{u}(t)\} + a_n \delta^{(n-1)}(t) + (a_1 u_0 + a_2) \delta^{(n-2)}(t) + \dots \\ + (a_{n-1} u_0 + \dots + a_1 u_{n-2} + u_{n-1}) \delta(t) = \hat{f}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t),$$

где

$$c_0 = a_{n-1} u_0 + \dots + a_1 u_{n-2} + u_{n-1}, \dots, c_{n-1} = a_1 u_0 + u_1, \\ c_{n-2} = u_0.$$

Таким образом, функция $\hat{u}$ в обобщенном смысле удовлетворяет в R^1 дифференциальному уравнению

$$L\hat{u} = \hat{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t). \quad (3)$$

Построим решение уравнения (3). Функция $\mathcal{E}(t) = \theta(t) Z(t)$, где $LZ = 0$ и

$$Z(0) = Z'(0) = \dots = Z^{(n-2)}(0) = 0, \quad Z^{(n-1)}(0) = 1, \quad (4)$$

есть фундаментальное решение оператора L (см. § 11.5). Поскольку $\mathcal{E}$ и правая часть уравнения (3) принадлежат сверточной алгебре обобщенных функций $\mathscr{D}'_+$ (см. § 7.7), то, по теореме § 11.3, решение уравнения (3) существует

и единственно в $\mathcal{D}'_+$ и выражается сверткой

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \mathcal{E} * \left(\hat{f} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)} \right) = \mathcal{E} * f + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathcal{E}^{(k)}(t) = \\ &= \theta(t) \int_0^t Z(t-\tau) f(\tau) d\tau + \theta(t) \sum_{k=0}^{n-1} c_k Z^{(k)}(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь мы учли равенства

$$\mathcal{E}^{(k)}(t) = [\theta(t) Z(t)]^{(k)} = \theta(t) Z^{(k)}(t), \quad k=0, 1, \dots, n-1,$$

справедливые в силу (4) (см. § 6.4, 1)).

Таким образом, решение $u(t)$ задачи Коши (1)–(2), будучи продолжено нулем на $t < 0$, удовлетворяет уравнению (3), решение которого единственно в алгебре $\mathcal{D}'_+$. Поэтому формула (5) при $t > 0$ дает искомое решение задачи Коши (1), (2):

$$u(t) = \int_0^t Z(t-\tau) f(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} c_k Z^{(k)}(t). \quad (6)$$

В частности, формула (6) для задач Коши

$$u' + au = f(t), \quad u(0) = u_0; \quad (7)$$

$$u'' + a^2 u = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \quad (8)$$

принимает соответственно вид

$$u(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau + u_0 e^{-at}; \quad (9)$$

$$u(t) = \frac{1}{a} \int_0^t \sin a(t-\tau) f(\tau) d\tau + u_0 \cos at + u_1 \frac{\sin at}{a}. \quad (10)$$

2. Постановка обобщенной задачи Коши для волнового уравнения. Схема решения задачи Коши, изложенная в предыдущем пункте для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, применяется для решения задачи Коши для волнового уравнения

$$\square_a u = f(x, t), \quad (11)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x). \quad (12)$$

Считаем, что $f \in C(t \geq 0)$, $u_0 \in C^1(R^n)$ и $u_1 \in C(R^n)$.

Предположим, что существует классическое решение $u(x, t)$ задачи Коши (11)–(12). Это значит, что функция u класса $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$ удовлетворяет уравнению (11) при $t > 0$ и начальным условиям (12) при $t \rightarrow +0$ (см. § 4.2).

Продолжим функции u и f нулем при $t < 0$, положив

$$\hat{u} = \begin{cases} u, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \hat{f} = \begin{cases} f, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Покажем, что функция $\hat{u}(x, t)$ удовлетворяет в R^{n+1} волновому уравнению

$$\square_a \hat{u} = \hat{f}(x, t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t). \quad (13)$$

Действительно, при всех $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+1})$ имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} (\square_a \hat{u}, \varphi) &= (\hat{u}, \square_a \varphi) = \int_0^\infty \int_{R^n} u \square_a \varphi dx dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \int_{R^n} u \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \Delta \varphi \right) dx dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^\infty \int_{R^n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \right) \varphi dx dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_{R^n} \frac{\partial \varphi(x, \varepsilon)}{\partial t} u(x, \varepsilon) dx + \int_{R^n} \varphi(x, \varepsilon) \frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial t} dx \right] = \\ &= \int_0^\infty \int_{R^n} f \varphi dx dt - \int_{R^n} \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t} u(x, 0) dx + \\ &\quad + \int_{R^n} \varphi(x, 0) \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} dx = \int_{R^{n+1}} \hat{f} \varphi dx dt - \\ &\quad - \int_{R^n} u_0(x) \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t} dx + \int_{R^n} u_1(x) \varphi(x, 0) dx = \\ &= (\hat{f} + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t), \varphi), \end{aligned}$$

откуда и вытекает равенство (13).

Равенство (13) показывает, что начальные возмущения u_0 и u_1 для функции $\hat{u}(x, t)$ играют роль источника $u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t)$, действующего мгновенно при $t=0$; при этом начальному возмущению u_0 соответствует двойной слой $u_0(x) \cdot \delta'(t)$, а начальному возмущению u_1 — простой слой $u_1(x) \cdot \delta(t)$ на плоскости $t=0$. Далее классические решения задачи Коши (11)–(12) содержатся среди тех решений уравнения (13), которые обращаются в нуль при $t < 0$. Это дает основание назвать задачу об отыскании (обобщенных) решений уравнения (13), обращающихся в нуль при $t < 0$, обобщенной задачей Коши для волнового уравнения. Но в таком случае в уравнении (13) правую часть можно считать обобщенной функцией.

Итак, введем следующее определение. Обобщенной задачей Коши для волнового уравнения с источником $F \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$, назовем задачу о нахождении обобщенной функции $u \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$, обращающейся в нуль при $t < 0$ и удовлетворяющей волновому уравнению

$$\square_x u = F(x, t). \quad (14)$$

Уравнение (14) эквивалентно следующему (см. § 11.1): для любой $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+1})$ справедливо равенство

$$(u, \square_x \varphi) = (F, \varphi). \quad (14')$$

Из уравнения (14) следует, что необходимым условием разрешимости обобщенной задачи Коши является обращение в нуль F при $t < 0$. Сейчас будет показано, что это условие является и достаточным.

Замечание. При выводе уравнения (13) мы фактически доказали равенство

$$\square_x u = \{\square_x u(x, t) + u(x, +0) \cdot \delta'(t) + u_1(x, +0) \cdot \delta(t)\}, \quad (15)$$

справедливое для любой функции $u \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$, обращающейся в нуль при $t < 0$ и такой, что $\square_x u \in C(t \geq 0)$.

3. Решение обобщенной задачи Коши.

Теорема. Пусть $F \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$, причем $F=0$ при $t < 0$. Тогда решение соответствующей обобщенной задачи Коши существует, единственно и представляется в виде волнового потенциала

$$u = \mathcal{E}_n * F. \quad (16)$$

Это решение непрерывно зависит от F в $\mathcal{D}'$.

Доказательство. По условию правая часть F уравнения (14) обращается в нуль при $t < 0$. Поэтому по теореме § 12.2 свертка F с фундаментальным решением $\mathcal{E}_n$ волнового оператора существует в $\mathcal{D}'(R^{n+1})$ и обращается в нуль при $t < 0$. По теореме § 11.3 решение уравнения (14) существует и единственно в классе обобщенных функций из $\mathcal{D}'(R^{n+1})$, обращающихся в нуль при $t < 0$, причем это решение выражается сверткой (16).

Докажем непрерывную зависимость построенного решения u от F в $\mathcal{D}'(R^{n+1})$. Если $F_k=0$, $t < 0$ и $F_k \rightarrow F$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'(R^{n+1})$, то, в силу непрерывности свертки (см. теорему § 12.2), из (16) получаем

$$u_k = \mathcal{E}_n * F_k \rightarrow \mathcal{E}_n * F = u, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}'(R^{n+1}).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Всякая функция $u(x, t)$ класса $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$, обращающаяся в 0 при $t < 0$ и такая, что $\square_x u \in C(t \geq 0)$, представляется в виде

$$u(x, t) = V_n(x, t) + V_n^{(0)}(x, t) + V_n^{(1)}(x, t), \quad (17)$$

где V_n — волновой потенциал с плотностью $\{\square_x u\}$, $V_n^{(0)}$ и $V_n^{(1)}$ — поверхностные волновые потенциалы простого и двойного слоя с плотностями $u_1(x, 0)$ и $u(x, 0)$ соответственно.

Действительно, функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (15) и, следовательно, по теореме § 13.3, представляется в виде суммы (17) трех волновых потенциалов с указанными плотностями.

Следствие 2. При $F = u_1(x) \cdot \delta(t) + u_0(x) \cdot \delta'(t)$ решение $u(x, t)$ обобщенной задачи Коши принадлежит классу C^∞ по переменной t в $[0, \infty)$ и удовлетворяет начальным условиям (12) в смысле слабой сходимости:

$$u(x, t) \rightarrow u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \rightarrow u_1(x), \quad t \rightarrow +0 \text{ в } \mathcal{D}'(R^n). \quad (18)$$

Действительно, по лемме § 12.4 потенциалы $V_n^{(0)}$ и $V_n^{(1)}$ принадлежат классу C^∞ по t в $[0, \infty)$ и удовлетворяют начальным условиям (27) и (28) из § 12.4. Следовательно, их сумма $V_n^{(0)} + V_n^{(1)}$, являющаяся в силу (16) решением обобщенной задачи Коши при $F = u_1(x) \cdot \delta(t) + u_0(x) \cdot \delta'(t)$,

принадлежит классу C^∞ по t в $[0, \infty)$ и удовлетворяет начальным условиям (18).

Пример. Обобщенное решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(x) \cdot \delta'(t)$$

дается формулой

$$u(x, t) = \frac{\partial \mathcal{H}_1(x, t)}{\partial t} \cdot \theta(x) = \frac{1}{2} \cdot \theta(x - at) + \frac{1}{2} \theta(x + at).$$

На этом примере видно, что разрывы у начальных данных (или у их производных) распространяются вдоль характеристик. Это явление наблюдается у всех уравнений гиперболического типа (см., например, формулы (19) — (19') § 13.4 и (23) § 15.4).

4. Решение классической задачи Коши. Из теорем §§ 12.3, 12.4 и 13.3 при $F(x, t) = f(x, t) + u_1(x) \cdot \delta(t) + u_0(x) \cdot \delta'(t)$ вытекают следующие утверждения о разрешимости классической задачи Коши для волнового уравнения.

Пусть $f \in C^2(t \geq 0)$, $u_0 \in C^2(R^n)$ и $u_1 \in C^2(R^n)$ при $n = 3, 2$; $f \in C^1(t \geq 0)$, $u_0 \in C^2(R^1)$ и $u_1 \in C^1(R^1)$ при $n = 1$. Тогда классическое решение задачи Коши (11) — (12) существует, единственно и выражается формулой Кирхгофа при $n = 3$:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{U(x, at)} \frac{f(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{a})}{|x-\xi|} d\xi + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{S(x, at)} u_1(\xi) dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{S(x, at)} u_0(\xi) dS \right]; \quad (19)$$

формулой Пуассона при $n = 2$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{U(x, a(t-\tau))} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{V a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2} + \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{U(x, a\tau)} \frac{u_1(\xi) d\xi}{V a^2\tau^2 - |x-\xi|^2} + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{U(x, at)} \frac{u_0(\xi) d\xi}{V a^2t^2 - |x-\xi|^2}; \quad (19')$$

формулой Даламбера при $n = 1$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^{t+\frac{x+a(t-\tau)}{a}} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)]. \quad (19'')$$

Это решение непрерывно зависит от данных f , u_0 и u_1 задачи Коши в следующем смысле: если эти данные изменяются так, что

$$|f - \tilde{f}| \leq \epsilon, \quad |u_0 - \tilde{u}_0| \leq \epsilon_0, \quad |u_1 - \tilde{u}_1| \leq \epsilon_1,$$

$$|\text{grad}(u_0 - \tilde{u}_0)| \leq \epsilon'_0$$

(последнее неравенство нужно только при $n = 3$ и 2), то соответствующие решения u и $\tilde{u}$ в любой полосе $0 \leq t \leq T$ удовлетворяют оценкам:

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq \frac{T^2}{2} \epsilon + T\epsilon_1 + \epsilon_0 + aT\epsilon'_0, \quad n = 3, 2;$$

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq \frac{T^2}{2} \epsilon + T\epsilon_1 + \epsilon_0, \quad n = 1.$$

Резюмируя, можно сказать, что задача Коши для волнового уравнения поставлена корректно (см. § 4.7), причем $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$ — класс корректности классической задачи Коши и $\mathcal{D}'(R^{n+1})$ — класс корректности обобщенной задачи Коши (см. теорему § 13.3).

Замечание. Изложенный метод решения задачи Коши для волнового уравнения без существенных изменений переносится на случай любого числа n пространственных переменных, а также на задачи, у которых данные Коши заданы на произвольной пространственноподобной поверхности (см. § 4.3). Более того, этот метод применим к задаче Коши для произвольных уравнений гиперболического типа с постоянными коэффициентами. Такое уравнение характеризуется тем, что оно обладает фундаментальным решением с носителем, заключенным в нулевой конусе, не содержащем целой прямой (см. Л. Хёрмандер [1], гл. V). Впервые в явной форме этот метод был применен С. Л. Соболевым [2] (1936 г.) для решения задачи Коши для гиперболического уравнения второго порядка (см. также Ж. Адамар [1]).

5. Упражнения. а) Пользуясь фундаментальным решением оператора Дирака (см. § 11, 12, д)), показать, что решение задачи Коши

для уравнения Дирака (см. § 2.8)

$$\left(i \sum_{k=1}^3 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 I \right) \Psi = 0,$$

$$\Psi|_{x_0=0} = \Psi_0(x), \quad \Psi_0 = (\psi_{01}, \psi_{02}, \psi_{03}, \psi_{04}), \quad \psi_{0j} \in \mathcal{D}'(R^3)$$

выражается формулой

$$\Psi = \left(\sum_{k=1}^3 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} - im_0 I \right) D^r(x_0, x) * \gamma^0 \Psi_0(x).$$

Свертка матрицы с вектором определяется по обычным правилам с заменой операции умножения на операцию свертки *.

б) Пользуясь фундаментальным решением оператора Клейна—Гордона—Фока (см. § 11, 12, б)), показать, что решение задачи Коши для уравнения Клейна—Гордона—Фока (см. § 2.8) выражается формулой

$$u = D^r(x_0, x) * u_1(x) + \frac{\partial D^r(x_0, x)}{\partial x_0} * u_0(x),$$

в) Показать, что решения смешанных задач

$$\square_a u = 0, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x, \quad t < \infty,$$

1) $u|_{x=0} = \psi_0(t)$, 2) $u_x|_{x=0} = \psi_1(t)$, где функции ψ_0 и ψ_1 непрерывны в $[0, \infty)$ и обращаются в 0 при $t < 0$, задаются соответственно формулами

$$1) u(x, t) = -2a^2 \frac{\partial \mathcal{E}_1(x, t)}{\partial x} * \psi_0(t) = \psi_0\left(t - \frac{x}{a}\right),$$

$$2) u(x, t) = -2a^2 \mathcal{E}_1(x, t) * \psi_1(t) = -a \int_0^{t - \frac{x}{a}} \psi_1(\tau) d\tau.$$

д) Пользуясь фундаментальными решениями (22) и (23) § 11.5, установить, что задачи Коши

$$u'' + au = ru, \quad u|_{x=0} = u_0, \quad r \in C(t \geq 0);$$

$$u'' + a^2 u = ru, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u'|_{t=0} = u_1$$

эквивалентны соответственно следующим интегральным уравнениям:

$$u(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} r(\tau) u(\tau) d\tau + u_0 e^{-at},$$

$$u(t) = \frac{1}{a} \int_0^t \sin a(t-\tau) r(\tau) u(\tau) d\tau + u_0 \cos at + u_1 \frac{\sin at}{a}.$$

е) Пусть обобщенная функция F финитна. Доказать, что решение $u(x, t)$ соответствующей обобщенной задачи Коши для волнового

уравнения в R^4 обладает свойством: для любой ограниченной области $G \subset R^3$ существует такое число $T = T(G)$, что $u(x, t) = 0$, $x \in G$, $t > T$.

г) Пусть $f=0$ и функции $u_0 \in C^2(R^3)$ и $u_1 \in C^1(R^3)$ финитны. Доказать, что соответствующее решение $u(x, t)$ задачи Коши для волнового уравнения в R^4 обладает свойством: для любой ограниченной области $G \subset R^3$ существует постоянная $K = K(G)$ такая, что

$$|u(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad x \in G, \quad t > 0.$$

д) Показать, что частные решения n -мерного волнового уравнения $\square_n u = 0$ (см. § 2.1) вида $f\left(\frac{t}{|x|}\right)$ определяются дифференциальным уравнением

$$(\xi^2 + 1) f''(\xi) + (3-n) f'(\xi) = 0, \quad \xi^2 \neq 1.$$

В частности:

$$u(x, t) = c_1 \ln \left| \frac{t-|x|}{t+|x|} \right| + c_2, \quad \frac{t}{|x|} \neq \pm 1, \quad n=1;$$

$$u(x, t) = \begin{cases} c_1 \ln \left(\left| \frac{t}{|x|} \right| + \sqrt{\left| \frac{t}{|x|} \right|^2 - 1} \right) + c_2, & \left| \frac{t}{|x|} \right| > 1, \\ c_1 \arcsin \left| \frac{t}{|x|} \right| + c_2, & \left| \frac{t}{|x|} \right| < 1, \end{cases} \quad n=2;$$

$$u(x, t) = c_1 \frac{t}{|x|} + c_2, \quad x \neq 0, \quad n=3.$$

§ 14. Распространение волн

В этом параграфе будет дана физическая интерпретация решений волнового уравнения, полученных в § 13.

1. Наложение волн и области влияния. Пусть задан источник $F(x, t)$, обращающийся в нуль при $t < 0$. Решение $u(x, t)$ обобщенной задачи Коши для волнового уравнения с источником $F(x, t)$ выражается согласно формуле (16) § 13.3 волновым потенциалом с плотностью F : $u = \mathcal{E}_n * F$.

Физический смысл этой формулы (см. § 11.3) состоит в том, что возмущение $u(x, t)$ в точке x в момент времени $t > 0$ представляет собой наложение (суперпозицию, сумму) элементарных возмущений

$$F(\xi, \tau) \mathcal{E}_n(x - \xi, t - \tau),$$

порождаемых точечными источниками

$$F(\xi, \tau) \delta(x - \xi) \cdot \delta(t - \tau),$$

когда точки (ξ, τ) пробегают множество, где сосредоточено возмущение F . В этом состоит принцип наложения волн (см. § 11.3).

Из принципа наложения волн следует, что возмущение u от источника F , сосредоточенного в множестве T (т. е. $\text{supp } F \subset T$) может достичь лишь тех точек пространства $t \geq 0$, которые состоят из объединения носителей $\mathcal{E}_a(x - \xi, t - \tau)$, когда точка (ξ, τ) пробегает множество T . Полученное таким путем множество $M(T)$ называется областью влияния множества T ,

$$M(T) = \bigcup_{(\xi, \tau) \in T} \text{supp } \mathcal{E}_a(x - \xi, t - \tau) = \text{supp } \mathcal{E}_a + T.$$

Ясно, что вне множества $M(T)$ будет покой, другими словами $\text{supp } u \subset M(T)$, если $\text{supp } F \subset T$.

Конкретная реализация принципа суперпозиции существенно зависит от структуры носителя фундаментального решения $\mathcal{E}_a(x, t)$ и, стало быть, от числа n пространственных переменных (см. § 12.1). Это, в свою очередь, определяет особенности в характере распространения волн в пространстве, на плоскости и на прямой.

2. Распространение волн в пространстве. Из выражения для фундаментального решения трехмерного волнового оператора

$$\mathcal{E}_3(x, t) = \frac{\delta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x) = \frac{\delta(t)}{2\pi a} \delta(a^2 t^2 - |x|^2),$$

$$x = (x_1, x_2, x_3),$$

вытекает, что возмущение $\mathcal{E}_3(x, t)$ от точечного, мгновенно действующего источника $\delta(x) \cdot \delta(t)$ к моменту времени $t > 0$ будет сосредоточено на сфере радиуса at с центром в точке $x = 0$ (рис. 46 и 44). Это значит, что такое возмущение распространяется в виде сферической волны $|x| = at$, движущейся со скоростью a , причем после прохождения этой

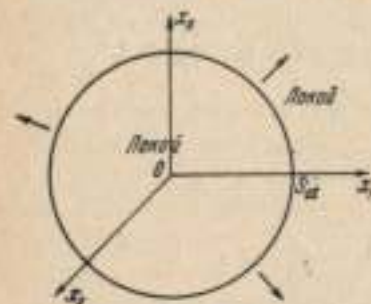


Рис. 46.

волны опять наступает покой. В этом случае говорят, что в пространстве имеет место принцип Гюйгенса.

Отсюда, в силу принципа наложения волн (см. § 14.1), вытекает, что возмущение u от произвольного источника F , сосредоточенного в T , может достичь лишь тех точек, которые состоят из объединения границ $a(t - \tau) = |x - \xi|$ конусов будущего $\Gamma^+(\xi, \tau)$, когда их вершины (ξ, τ) пробегает множество T (рис. 47), так что

$$M(T) = \bigcup_{(\xi, \tau) \in T} \text{gr } \Gamma^+(\xi, \tau).$$

При этом возмущение $u(x, t)$ (запаздывающий потенциал) при $t > 0$ полностью определяется значениями источника

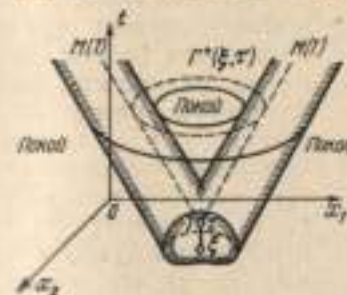


Рис. 47.

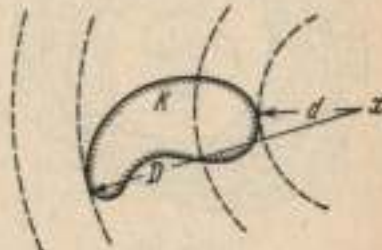


Рис. 48.

$F(\xi, \tau)$ на боковой поверхности $B(x, t)$ конуса $\Gamma_0^+(x, t)$ (см. § 12.3, замечание и рис. 45). В этом состоит математическая формулировка принципа Гюйгенса.

В частности, если возмущение F сводится к начальному возмущению вида

$$F(x, t) = u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t), \quad (1)$$

то $u(x, t)$ при $t > 0$ полностью определяется значениями $u_0(\xi)$ и $u_1(\xi)$ на сфере $S(x, at)$, т. е. в точках границы основания конуса $\Gamma_0^+(x, t)$.

Пусть теперь возмущение (1) сосредоточено в компакте K плоскости $t = 0$, т. е. $\text{supp } u_0 \subset K$, $\text{supp } u_1 \subset K$. В силу сказанного в точку $x \in K$ возмущение придет в момент времени $t_0 = \frac{d}{a}$ и будет действовать в этой точке в течение

времени $\frac{D-d}{a}$, где d и D — минимальное и максимальное расстояния от точки x до точек множества K (рис. 48).

При $t > \frac{D}{a} = t_1$ в точке x снова наступает покой. Таким образом, в момент времени t_0 через точку x проходит передний фронт волны, а в момент времени t_1 через эту точку проходит задний фронт волны. При этом в момент времени t передний фронт будет внешней огибающей сфер $S(\xi; at)$, когда ξ пробегает K , а задний фронт — внутренней огибающей этих сфер (рис. 49).



Рис. 49.

Другими словами, к моменту времени $t > 0$ возмущение распространяется на область, заключенную между передним и задним фронтами. Рассматривая эту картину при всех $t \geq 0$, заключаем, что в пространстве R^4 переменных (x, t) это возмущение будет сосредоточено на объединении границ $|x - \xi| = at$ конусов будущего $\Gamma^+(\xi, 0)$, когда их вершины $(\xi, 0)$ пробегает компакт K (в плоскости $t=0$), т. е. на $M(K)$.

3. Распространение волн на плоскости. Из формулы для фундаментального решения двумерного волнового оператора

$$\mathcal{E}_2(x, t) = \frac{\delta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, \quad x = (x_1, x_2),$$

вытекает, что возмущение $\mathcal{E}_2(x, t)$ от точечного, мгновенно действующего источника $\delta(x) \cdot \delta(t)$ к моменту времени $t > 0$ будет сосредоточено в замкнутом круге радиуса at с центром в точке $x=0$ (рис. 50). Таким образом, наблюдается передний фронт волны $|x|=at$, движущийся на плоскости со скоростью a . Однако в отличие от пространственного случая за передним фронтом возмущение наблюдается во все последующие моменты времени, так что

задний фронт волны отсутствует. В этом случае говорят, что на плоскости имеет место диффузия волн. При этом принцип Гюйгенса, очевидно, нарушается.

Чтобы понять, почему происходит диффузия волн, на плоскости, заметим, что фундаментальное решение $\mathcal{E}_2(x, t)$, рассматриваемое как функция четырех переменных

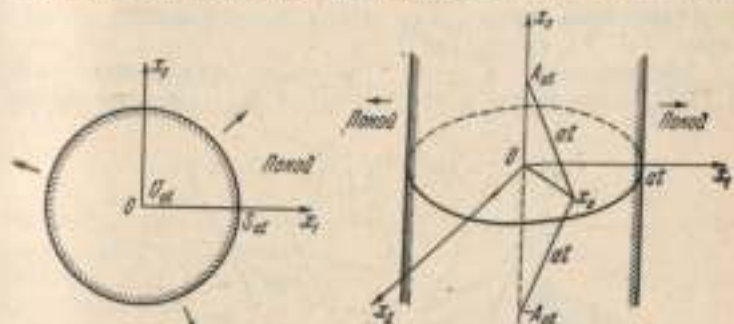


Рис. 50.

Рис. 51.

(x, x_3, t) , представляет собой возмущение от мгновенного источника $\delta(x) \cdot 1(x_3) \cdot \delta(t)$, сосредоточенного на оси x_3 (см. § 11.7),

$$\mathcal{E}_2(x, t) = \mathcal{E}_2[\delta(x) \cdot 1(x_3) \cdot \delta(t)].$$

От такого источника в R^3 возмущение распространяется в виде цилиндрической волны $|x| \leq at$, передний фронт которой $|x|=at$ движется со скоростью a перпендикулярно оси x_3 (рис. 51). После прохождения переднего фронта возмущение сохраняется бесконечно долго.

Действительно, в силу принципа Гюйгенса (см. § 14.2) в данную точку $(x_0, 0) \in R^3$ в момент времени $t > 0$ возмущение от источника $\delta(x) \cdot 1(x_3) \cdot \delta(t)$ будет приходить из тех точек сферы $|x - x_0|^2 + x_3^2 = a^2 t^2$, которые лежат на оси x_3 , т. е. из точек (рис. 51)

$$\pm A_{at} = \{0, \pm \sqrt{a^2 t^2 - |x - x_0|^2}\}.$$

Отсюда следует, что при $t < \frac{|x_0|}{a} = t_0$ в точке $(x_0, 0)$ будет покой: в момент времени t_0 через эту точку пройдет передний фронт волны (возмущение придет из точки $x=0$); во все последующие моменты времени $t > t_0$ в эту

точку будут приходить одинаковые возмущения из точек $\pm A_{\pm}$ и, стало быть, в ней будет наблюдаться отличное от нуля суммарное возмущение (задний фронт волны отсутствует).

Из наличия диффузии волн на плоскости в случае точечного начального возмущения $\delta(x) \cdot \delta(t)$ следует, что диффузия волн наблюдается и для произвольного возмущения $F(x, t)$, $F=0$, $t < 0$.

Действительно, в силу принципа наложения волн (§ 14.1), возмущение u от источника F , сосредоточенного

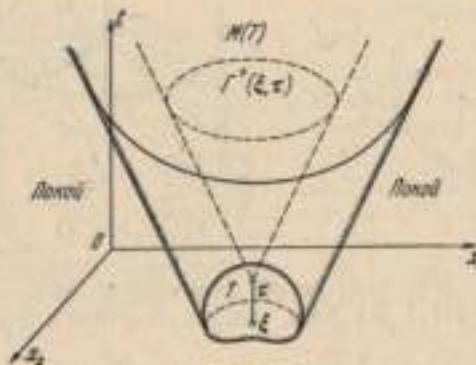


Рис. 52.

в T может достичь лишь тех точек, которые состоят из объединения замыканий конусов будущего $\Gamma^+(\xi, \tau)$, когда их вершины (ξ, τ) пробегает множество T (рис. 52), так что

$$M(T) = \bigcup_{(\xi, \tau) \in T} \Gamma^+(\xi, \tau).$$

При этом $u(x, t)$ при $t > 0$ полностью определяется значениями источника $F(\xi, \tau)$ на замыкании конуса $\bar{\Gamma}_+(x, t)$ (см. рис. 45). (В этом состоит математическое содержание понятия «диффузия волн»).

В частности, если F — начальное возмущение вида (1), то $u(x, t)$ при $t > 0$ полностью определяется значениями $u_0(\xi)$ и $u_1(\xi)$ в круге $U(x; at)$, т. е. на основании конуса $\Gamma_+(x, t)$. Поэтому если начальное возмущение сосредоточено на K , то к моменту времени $t > 0$ возмущение $u(x, t)$

распространится на область, представляющую собой объединение кругов $U(\xi; at)$, когда их центры ξ пробегает K (рис. 53). Таким образом, здесь наблюдается передний фронт и отсутствует задний фронт волны.

В соответствии со сказанным областью влияния $M(K)$ компакта K является объединение замкнутых будущих световых конусов $\bar{\Gamma}^+(\xi, 0)$, когда их вершины $(\xi, 0)$ пробегает K в плотности $\tau=0$ (см. § 12.3 и рис. 52).

4. Распространение волн на прямой. Из вида фундаментального решения одномерного волнового оператора

$$\mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|), \quad x = x_1,$$

вытекает, что возмущение $\mathcal{E}_1(x, t)$ от точечного, мгновенно действующего источника $\delta(x) \cdot \delta(t)$ к моменту времени $t > 0$ будет сосредоточено на отрезке $-at \leq x \leq at$ (рис. 42). В этом случае наблюдаются два передних фронта $x=at$ и $x=-at$, движущихся на прямой со скоростью a направо и налево соответственно. Как и в плоском случае, за фронтом волны наблюдается возмущение (в данном случае оно постоянно и равно $\frac{1}{2a}$), т. е. имеет место диффузия волн.

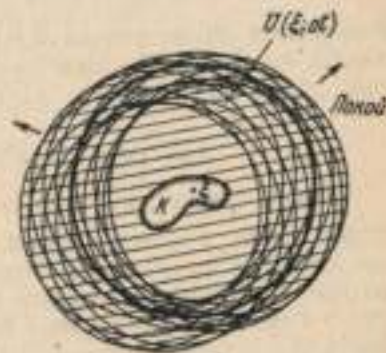


Рис. 53.

Чтобы понять это явление, дадим трехмерную интерпретацию фундаментальному решению $\mathcal{E}_1(x, t)$. Это решение представляет собой возмущение от мгновенного источника $\delta(x) \cdot 1(x_2, x_3) \cdot \delta(t)$, сосредоточенного на плоскости $x=0$:

$$\mathcal{E}_1(x, t) = \mathcal{E}_1 * [\delta(x) \cdot \delta(x_2, x_3) \cdot \delta(t)].$$

От такого источника в R^4 возмущение распространяется в виде плоской волны $|x| \leq at$, передний фронт которой $|x|=at$ движется со скоростью a , перпендикулярной пло-

скости $x=0$. Отметим, что в этом случае передний фронт состоит из двух плоскостей $x=at$ и $x=-at$, движущихся

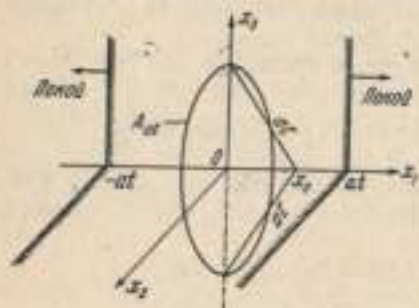


Рис. 54.

со скоростью a направо и налево соответственно относительно плоскости $x=0$ (рис. 54). После прохождения переднего фронта волны возмущение сохранится бесконечно долго.

Действительно, в силу принципа Гюйгенса (см. § 14.2) в данную точку $(x_0, 0, 0) \in R^3$ в момент времени $t > 0$

возмущение от источника $\delta(x) \cdot 1(x_0, x_0) \cdot \delta(t)$ будет приходить из тех точек сферы $|x - x_0|^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 t^2$, которые лежат на плоскости $x=0$, т. е. из точек окружности (рис. 54)

$$A_{at} = [x_1^2 + x_2^2 = a^2 t^2 - x_0^2, x=0].$$

Отсюда следует, что при $t < \frac{|x_0|}{a} = t_0$ в точке $(x_0, 0, 0)$ будет покой: в момент времени t_0 через эту точку пройдет передний фронт волны (возмущение придет из точки 0); во все последующие моменты времени $t > t_0$ в эту точку будут приходить одинаковые возмущения из точек окружности A_{at} и, стало быть, в ней будет наблюдаться отличное от нуля суммарное возмущение (задний фронт волны отсутствует).

Из наличия диффузии волн на прямой в случае точечного начального возмущения $\delta(x) \cdot \delta(t)$ следует, что диффузия волн наблюдается и для произвольного начального возмущения $u_0(x) \cdot \delta(t)$.

Рассмотрим теперь мгновенный точечный источник вида $\delta(x) \cdot \delta'(t)$. По теореме § 13.3 этот источник порождает возмущение

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_1(x, t) &= \tilde{\varepsilon}_1(x, t) * [\delta(x) \cdot \delta'(t)] = \\ &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_1(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial t} \theta(at - |x|) = \frac{1}{2} \delta(at - |x|). \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда видно, что возмущение $\tilde{\varepsilon}_1(x, t)$ в момент времени $t > 0$ будет сосредоточено только в двух точках $x = \pm at$,

так что после прохождения фронта волны $|x| = at$ снова наступает покой. В этом случае имеет место принцип Гюйгенса.

Для произвольного начального возмущения вида $u_0(x) \cdot \delta'(t)$ возмущение $u(x, t)$ при $t > 0$ полностью определяется значениями $u_0(\xi)$ в точках $x \pm at$, т. е. в точках границы основания конуса $\Gamma_a^+(x, t)$ (рис. 45). Это возмущение, в силу теоремы § 13.3, дается формулой

$$u = \tilde{\varepsilon}_1(x, t) * [u_0(x) \cdot \delta'(t)] = \tilde{\varepsilon}_1(x, t) * u_0(x).$$

Отсюда, учитывая равенства (2), при $t > 0$ получаем

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \delta(at - |x|) * u_0(x) = \\ &= \frac{1}{2} u_0(x + at) + \frac{1}{2} u_0(x - at). \end{aligned} \quad (3)$$

Физический смысл формулы (3) состоит в том, что начальное возмущение $u_0(x) \cdot \delta'(t)$ при $t > 0$ как бы распадается на два подобных возмущения $\frac{1}{2} u_0(x \pm at)$, каждое половинной интенсивности (рис. 55).

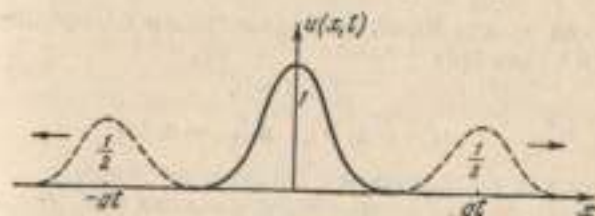


Рис. 55.

В соответствии со сказанным области влияния отрезка $K = [b, c]$ для начальных возмущений $u_1(x) \cdot \delta(t)$ и $u_0(x) \cdot \delta'(t)$ имеют вид, указанный на рис. 56 и 57.

Таким образом, на прямой для начального возмущения $u_1(x) \cdot \delta(t)$ имеет место диффузия волн, а для начального возмущения $u_0(x) \cdot \delta'(t)$ — принцип Гюйгенса. Для произвольного возмущения F , $F(x, t) = 0$, $t < 0$, могут иметь место либо принцип Гюйгенса, либо диффузия волн, либо их наложение. Физические интерпретации и геометрические построения аналогичны рассмотренным в § 14.2 и § 14.3 соответственно.

5. Метод распространяющихся волн. Изложим другой метод — метод распространяющихся волн — решения классической задачи Коши для одномерного однородного волнового уравнения

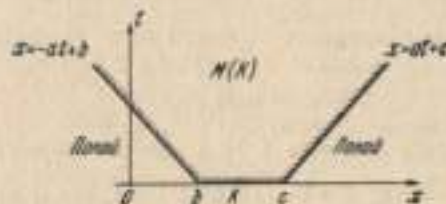


Рис. 56.

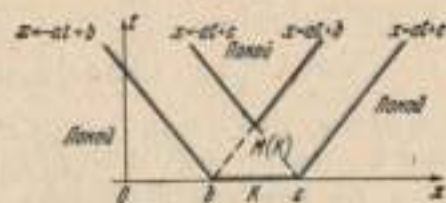


Рис. 57.

сической задачи Коши для одномерного однородного волнового уравнения

$$\square u = 0, \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x). \quad (5)$$

Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма. Для того чтобы функция $u(x, t)$ класса C^2 была решением волнового уравнения (4) в некоторой области, необходимо и достаточно, чтобы в этой области она представлялась в виде

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at), \quad (6)$$

где $f(\xi)$ и $g(\eta)$ — функции класса C^2 в соответствующих интервалах изменения переменных ξ и η .

Доказательство. Функция (6) удовлетворяет уравнению (4), так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x - at) + a^2 g''(x + at) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Обратно, пусть функция $u(x, t)$ класса C^2 удовлетворяет уравнению (4) в некоторой области. Представим урав-

нение (4) в каноническом виде. В соответствии со сказанным в § 3.4 его дифференциальные уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = -a, \quad \frac{dx}{dt} = a,$$

и, следовательно, замена переменных

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at \quad (7)$$

приводит уравнение (4) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Интегрируя это уравнение по ξ , получим

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \chi(\eta),$$

где χ — некоторая функция класса C^1 . Интегрируя теперь полученное уравнение по η , запишем функцию u в виде

$$u(\xi, \eta) = \int_{\eta}^{\eta} \chi(\eta') d\eta' + f(\xi) = f(\xi) + g(\eta), \quad (8)$$

где f и g — некоторые функции класса C^2 . Переходя к старым переменным x и t по формулам (7), выводим из (8) представление (6) для решения $u(x, t)$. Лемма доказана.

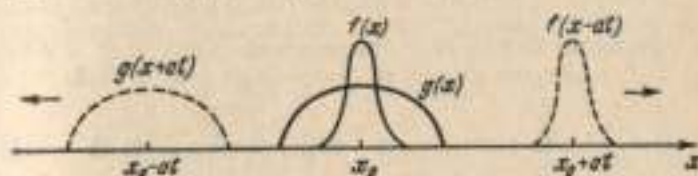


Рис. 58

Физическая интерпретация решения (6). Функция $f(x - at)$ описывает возмущение, которое из точки x_0 в момент времени $t=0$ приходит в точку $x = x_0 + at$ в момент времени t (рис. 58). Поэтому эта функция представляет собой волну, двигающуюся направо со скоростью a . Аналогично функция $g(x + at)$ представляет собой волну, двигающуюся налево со скоростью a (рис. 58).

Общее решение (6) волнового уравнения (4) есть наложение этих двух волн.

С помощью представления (6) общего решения волнового уравнения (4) классическое решение задачи Коши (4) — (5) строится следующим образом.

Предположим, что решение $u(x, t)$ этой задачи существует. Тогда, по лемме § 14.5, это решение представляется в виде (6) с функциями f и g из класса $C^2(R^1)$. Для того чтобы решение $u(x, t)$ удовлетворяло начальным условиям (5), необходимо, чтобы функции f и g удовлетворяли соотношениям

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= u_0(x), \quad -af'(x) + ag'(x) = u_1(x), \\ \text{т. е.} \end{aligned}$$

$$f(\xi) + g(\xi) = u_0(\xi), \quad g(\xi) - f(\xi) = \frac{1}{a} \int_0^\xi u_1(\xi') d\xi' + C, \quad (9)$$

где C — некоторая постоянная. Решая уравнения (9) относительно неизвестных функций f и g ,

$$f(\xi) = \frac{1}{2} u_0(\xi) - \frac{1}{2a} \int_0^\xi u_1(\xi') d\xi' - \frac{C}{2},$$

$$g(\eta) = \frac{1}{2} u_0(\eta) + \frac{1}{2a} \int_0^\eta u_1(\xi') d\xi' + \frac{C}{2},$$

и подставляя полученные выражения для f и g в формулу (6), получаем формулу Даламбера (см. § 13.4)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi. \quad (10)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что формула Даламбера (10) действительно дает классическое решение задачи Коши (4) — (5), если $u_0 \in C^2(R^1)$ и $u_1 \in C^1(R^1)$. Это решение единственно (см. § 13.4).

Замечание. Для построения решений уравнения колебаний струны мы воспользовались основным свойством характеристик, состоящим в том, что на характеристике $\eta = \text{const}$ это уравнение приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $u_2(\xi, \eta)$ с независимой переменной ξ , и поэтому решение строится при помощи квадратур. Это свойство характери-

стик — наличие уравнений с меньшим числом переменных, связывающих значения неизвестной функции и ее производных, — лежит в основе ряда важных методов интегрирования (квазилинейных) уравнений гиперболического типа (см. § 15).

6. Метод отражений. Полубесконечная струна. Изложенный в предыдущем пункте метод распространяющихся волн решения задачи Коши для уравнения (4) позволяет решать некоторые смешанные задачи для этого уравнения. Для определенности рассмотрим смешанную задачу (см. § 4.5), описывающую колебание полубесконечной струны $x > 0$ с закрепленным левым концом

$$u|_{x=0} = 0. \quad (11)$$

Предварительно докажем, что всякое классическое решение $u(x, t)$ волнового уравнения (4) в квадранте $x > 0$, $t > 0$, удовлетворяющее условию (11), представляется в виде

$$u(x, t) = g(x+at) - g(-x+at), \quad g \in C^2(R^1). \quad (12)$$

Действительно, по лемме § 14.5 решение $u(x, t)$ представляется в виде (6), где $f(\xi) \in C^2(R^1)$ и $g(\eta) \in C^2(\eta > 0)$. Отсюда, учитывая условие (11), получим

$$0 = f(-at) + g(at),$$

откуда и следует представление (12).

Физическая интерпретация решения (12). Это решение представляет собой наложение двух волн:

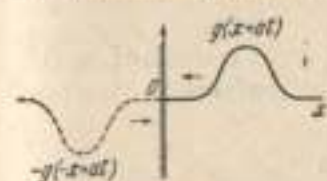


Рис. 59.

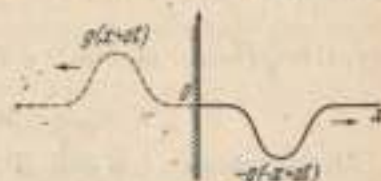


Рис. 60.

волны $g(x+at)$, движущейся со скоростью a налево, и волны $-g(-x+at)$, движущейся с той же скоростью направо. Пусть волна $g(x+at)$ движется по полубесконечной струне $x > 0$, закрепленной в точке $x=0$. Тогда волна $-g(-x+at)$ будет двигаться по полуоси $x < 0$ навстречу волне $g(x+at)$ (рис. 59). В некоторый момент

времени эти волны встретятся в точке $x=0$ и, накладываясь друг на друга, дадут нулевое возмущение в этой точке. При дальнейшем движении волна $g(x+at)$ окажется за пределами струны, и то время как волна $-g(-x+at)$ перейдет на саму струну. В результате на струне будет наблюдаться отражение волны $g(x+at)$ от конца струны $x=0$ с изменением знака (рис. 60).

Построим теперь решение смешанной задачи (4) — (5) — (11). Всякое классическое решение $u(x, t)$ этой задачи, в силу (12), допускает нечетное продолжение $\tilde{u}(x, t)$ по x класса $C^2(R^2)$, и это продолжение удовлетворяет уравнению (4) в R^2 . Отсюда и из условий (5) вытекает, что решение $\tilde{u}(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0(x), \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{u}_1(x), \quad (13)$$

где $\tilde{u}_0$ и $\tilde{u}_1$ — нечетные продолжения функций u_0 и u_1 соответственно. Но решение такой задачи Коши единственно и представляется формулой Даламбера (10) с заменой u_0 на $\tilde{u}_0$ и u_1 на $\tilde{u}_1$, если $\tilde{u}_0 \in C^2(R^1)$ и $\tilde{u}_1 \in C^1(R^1)$. Эти последние условия будут выполнены, если

$$u_0 \in C^2(x \geq 0), \quad u_1 \in C^1(x \geq 0), \quad u_0(0) = u_0'(0) = u_1(0) = 0. \quad (14)$$

Итак, если выполнены условия (14), то решение смешанной задачи (4) — (5) — (11) существует, единственно и задается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{u}_0(x+at) + \tilde{u}_0(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(\xi) d\xi, \quad (15)$$

$$x \geq 0.$$

Пусть теперь $x-at \geq 0$. Тогда

$$\tilde{u}_0(x-at) = u_0(x-at), \quad \tilde{u}_1(\xi) = u_1(\xi), \quad \xi \geq x-at \geq 0,$$

и формула (15) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi, \quad (16)$$

$$x \geq at.$$

Пусть теперь $x-at \leq 0$. В этом случае

$$\tilde{u}_0(x-at) = -u_0(-x+at), \quad \tilde{u}_1(\xi) = -u_1(-\xi),$$

$$x-at \leq \xi \leq 0,$$

и формула (15) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x+at) - u_0(at-x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} u_1(\xi) d\xi, \quad (17)$$

$$0 \leq x \leq at.$$

Как видно из формулы (17), в точку (x, t) , $0 \leq x \leq at$, приходят две волны: прямая волна из точки $(x+at, 0)$ и один раз отраженная волна из точки $(at-x, 0)$ (совпадающая с прямой волной из фиктивной точки $(x-at, 0)$, см. рис. 61).

Аналогично рассматривается смешанная задача для полубесконечной струны $x > 0$ со свободным левым концом:

$$u_x|_{x=0} = 0.$$

Здесь также имеет место отражение волн от конца струны $x=0$, но уже без изменения знака.

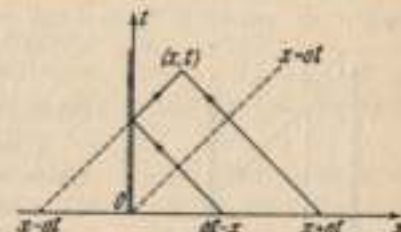


Рис. 61.

7. Метод отражений.

Конечная струна. Применим метод отражений, изложенный в предыдущем пункте, для решения смешанной задачи для конечной струны $0 \leq x \leq l$ с закрепленными концами:

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \quad (18)$$

Сначала докажем, что всякое классическое решение $u(x, t)$ волнового уравнения (4) в полуполосе $0 < x < l$, $t > 0$, удовлетворяющее условиям (18), представляется в виде

$$u(x, t) = g(x+at) - g(-x+at),$$

$$g(\xi+2l) = g(\xi), \quad g \in C^2(R^1). \quad (19)$$

Действительно, по лемме § 14.5 решение $u(x, t)$ представляется в виде (6), где $f(\xi) \in C^2(\xi < l)$ и $g(\eta) \in$

$\in C^2(\eta > 0)$. Отсюда, учитывая условия (18), получим

$$g(\xi) = -f(-\xi), \quad f(l-\xi) = -g(l+\xi). \quad (20)$$

Эти соотношения определяют продолжение функций f и g на всю ось с сохранением класса C^2 . В самом деле, равенство $g(\xi) = -f(-\xi)$ распространяет функцию g на интервал $(-l, \infty)$. А тогда второе из равенств (20), записанное в виде $f(\eta) = -g(2l-\eta)$, распространяет функцию f на интервал $(-\infty, 3l)$ и т. д. В результате такого продолжения функции f и g будут принадлежать классу $C^2(R^1)$ и удовлетворять соотношениям (20). Отсюда вытекает представление (19) и $2l$ -периодичность функции g :

$$-g(l+\xi) = f(l-\xi) = -g(-l+\xi).$$

Решение (19) показывает, что имеет место отражение волн от обоих концов $x=0$ и $x=l$ с изменением знака. Отсюда следует, что движение струны — периодическое по времени с периодом $\frac{2l}{a}$ (рис. 62).

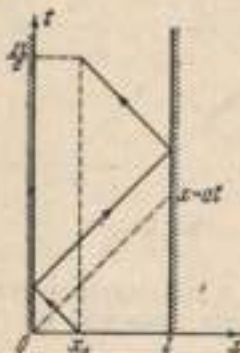


Рис. 62.

Теперь построим решение смешанной задачи (4)–(5)–(18). Если классическое решение $u(x, t)$ этой задачи существует, то, в силу (19), оно допускает $2l$ -периодическое нечетное продолжение $\tilde{u}(x, t)$ по x относительно точек $x=0$ и $x=l$ и это продолжение принадлежит классу $C^2(R^2)$ и удовлетворяет уравнению (4) в R^2 . Отсюда и из условий (5) вытекает, что функция $\tilde{u}(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям (13), в которых функции $\tilde{u}_0$ и $\tilde{u}_1$ — соответственно — $2l$ -периодические нечетные продолжения функций u_0 и u_1 относительно точек $x=0$ и $x=l$.

Рассуждая теперь, как и в предыдущем пункте, заключаем, что если функции u_0 и u_1 удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} u_0 &\in C^2([0, l]), \quad u_0(0) = u_0'(0) = u_0(l) = u_0'(l) = 0, \\ u_1 &\in C^1([0, l]), \quad u_1(0) = u_1(l) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

то решение смешанной задачи (4)–(5)–(18) существует, единственно и дается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{u}_0(x+at) + \tilde{u}_0(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(\xi) d\xi, \quad (22)$$

$$0 \leq x \leq l.$$

Пусть точка (x, t) расположена так, как показано на рис. 63. Тогда формула (22) в этой точке принимает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(\gamma) - u_0(\beta)] - \frac{1}{2a} \int_{\beta}^{\gamma} u_1(\xi) d\xi. \quad (23)$$

Действительно, пользуясь правилом отражений, имеем

$$\tilde{u}_0(b) = u_0(\gamma), \quad \tilde{u}_0(c) = -u_0(\beta),$$

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{\gamma} \tilde{u}_1(\xi) d\xi &= \int_{\beta}^{-l} \tilde{u}_1(\xi) d\xi + \int_{-l}^l \tilde{u}_1(\xi) d\xi = \\ &= \int_{\gamma}^l u_1(\xi) d\xi + \int_{-l}^l u_1(\xi) d\xi = \int_{\beta}^{\gamma} u_1(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

откуда и из (22) вытекает формула (23). Она показывает, что в точку (x, t) приходят две волны: одна волна — из

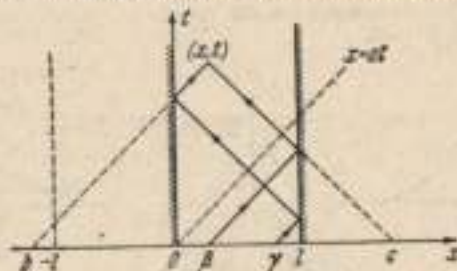


Рис. 63.

точки β (один раз отраженная от конца $x=l$), другая волна — из точки γ (по одному разу отраженная от концов $x=l$ и $x=0$) (рис. 63).

8. Нелинейные волновые уравнения. Аналог метода Даламбера построения решений линейного волнового уравнения с двумя пере-

меняясь, изложенный в §§ 14.5—14.7, применим и к некоторым нелинейным уравнениям. Ищем частные решения нелинейного уравнения

$$F(u, \dots, D^2 u, \dots) = 0 \quad (24)$$

в виде

$$u(x) = f(\xi), \quad \xi = (l, x) - x_0,$$

где l и x_0 — постоянные векторы. В силу (24) функция f должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$F(f, \dots, f'' f'(a), \dots) = 0. \quad (25)$$

Примеры. 1) Уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (26)$$

$$f(\xi) = \frac{a}{2 \operatorname{ch}^2 \left[\frac{\sqrt{a}}{2} (x - at - x_0) \right]}, \quad a > 0, \quad (27)$$

2) Уравнение Ливуилля

$$u_{tt} - u_{xx} = gu^3, \quad g > 0, \quad (28)$$

$$f(\xi) = \ln \frac{a^2(1-a^2)}{2g \operatorname{ch}^2 \left[\frac{a}{2} (x - at - x_0) \right]}, \quad 0 \leq a < 1. \quad (29)$$

Решениями уравнения (28) является функция

$$u(x, t) = \ln \frac{8\varphi'(x+t)\psi'(x-t)}{g[\varphi(x+t) - \psi(x-t)]^2}, \quad (30)$$

где φ и ψ — произвольные функции класса C^2 , удовлетворяющие условиям $\varphi' > 0$ и $\psi' > 0$.

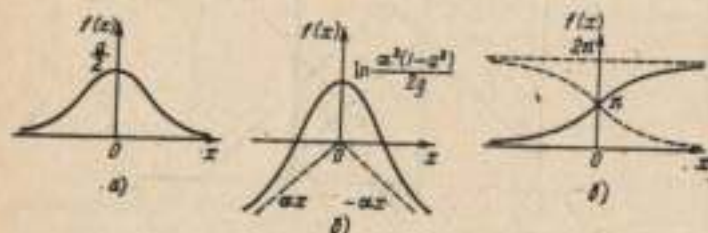


Рис. 64.

3) Уравнение Сине — Гордон (ср. § 1.8)

$$u_{tt} - u_{xx} = -g \sin u, \quad g > 0, \quad (31)$$

$$f(\xi) = 4 \arctg e^{\pm \sqrt{g} \frac{x - at - x_0}{\sqrt{1-a^2}}}. \quad (32)$$

Решения (27), (29) и (32) имеют характер «соединенной волны» — поведение при $t \rightarrow 0$ и $x_0 = 0$ изображено на рис. 64 соответственно. Такие решения называются солитонными.

Волны (27) и (32) характеризуются тем, что их энергия конечна:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2 + u_x^2) dx + \frac{1+a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f'(\xi)|^2 d\xi.$$

Перечисленные уравнения возникают во многих нелинейных задачах распространения волн*). Они также представляют интерес для квантовой теории поля как модели с нетривиальным взаимодействием.

§ 15. Метод Римана

В этом параграфе мы изложим метод Римана для решения задачи Коши для линейного уравнения гиперболического типа с двумя независимыми переменными, приведенного к каноническому виду

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y). \quad (1)$$

1. Решение задачи Гурса. Для уравнения (1) рассмотрим задачу Гурса (см. § 4.6, а))

$$\left. \begin{aligned} u|_{y=0} &= \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq x_0, \\ u|_{x=0} &= \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq y_0, \end{aligned} \right\} \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0). \quad (2)$$

Функции a , b и c предполагаются непрерывными на замкнутом прямоугольнике $\bar{\Pi}$, где $\Pi = (0, x_0) \times (0, y_0)$; решение $u(x, y)$ ищется в Π .

Допустим, что $f \in C(\bar{\Pi})$, $\varphi_1 \in C^1([0, x_0])$ и $\varphi_2 \in C^1([0, y_0])$. Сведем задачу Гурса (1) — (2) к эквивалентной системе трех интегральных уравнений, предполагая, что решение $u \in C^1(\Pi)$ (и тогда $u_{xy} \in C(\bar{\Pi})$).

Пусть $u(x, y)$ — решение этой задачи, $u \in C^1(\Pi)$. Положим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = w. \quad (3)$$

*) См. Дж. Уизем [1].

Тогда уравнение (1) и условия (2) примут соответственно вид

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} = f - av - bw - cu, \quad (4)$$

$$v|_{y=0} = \varphi'_1(x), \quad w|_{x=0} = \varphi'_2(y). \quad (5)$$

Из (3) — (5) немедленно получаем систему трех интегральных уравнений относительно трех функций u , v и w :

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \varphi_1(x) + \int_0^y w(x, y') dy', \\ v(x, y) &= \varphi'_1(x) + \int_0^y (f - av - bw - cu)(x, y') dy', \\ w(x, y) &= \varphi'_2(y) + \int_0^x (f - av - bw - cu)(x', y) dx'. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Обратно, пусть функции u , v и w непрерывны на $\bar{\Pi}$ и удовлетворяют системе интегральных уравнений (6). Докажем, что функция $u \in C^1(\bar{\Pi})$ и является решением задачи Гурса (1) — (2). Действительно, из (6) непосредственно следуют равенства (4), $\frac{\partial u}{\partial y} = w$ и

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi'_1(x) + \int_0^y \frac{\partial w(x, y')}{\partial x} dy' = \\ &= \varphi'_1(x) + \int_0^y (f - av - bw - cu)(x, y') dy' = v, \end{aligned}$$

так что функция $u \in C^1(\bar{\Pi})$ и удовлетворяет уравнению (1) в Π :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} = f - av - bw - cu = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Кроме того, функция u удовлетворяет и граничным условиям (2):

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= \varphi_1(x), \quad u|_{x=0} = \varphi_1(0) + \int_0^y w(0, y') dy' = \\ &= \varphi_1(0) + \int_0^y \varphi'_2(y') dy' = \varphi_1(0) + \varphi_2(y) - \varphi_2(0) = \varphi_2(y). \end{aligned}$$

Таким образом, задача Гурса (1) — (2) эквивалентна системе интегральных уравнений (6). Поэтому достаточно исследовать эту систему.

Решение системы (6) будем строить методом последовательных приближений, положив

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \varphi_1(x), \quad v_0 = \varphi'_1(x) + \int_0^y f(x, y') dy', \\ w_0 &= \varphi'_2(y) + \int_0^x f(x', y) dx'; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} u_p &= \int_0^y w_{p-1}(x, y') dy', \\ v_p &= - \int_0^y (av_{p-1} + bw_{p-1} + cu_{p-1})(x, y') dy', \\ w_p &= - \int_0^x (av_{p-1} + bw_{p-1} + cu_{p-1})(x', y) dx', \end{aligned} \right\} \quad p=1, 2, \dots \quad (8)$$

Докажем для всех $(x, y) \in \bar{\Pi}$ и $p=0, 1, \dots$ оценки

$$\left. \begin{aligned} |u_p(x, y)| &\leq MK^p \frac{(x+y)^p}{p!}, \\ |v_p(x, y)| &\leq MK^p \frac{(x+y)^p}{p!}, \\ |w_p(x, y)| &\leq MK^p \frac{(x+y)^p}{p!}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$M = \max[\max |u_0|, \max |v_0|, \max |w_0|],$$

$$K = 1 + \max(|a| + |b| + |c|).$$

При $p=0$ оценки (9), очевидно, выполнены. Покажем, что неравенства (9) останутся справедливыми и при замене p на $p+1$. Сделаем это, например, для v_{p+1} . Из рекуррентных соотношений (8) и из неравенств (9) имеем

$$\begin{aligned} |v_{p+1}| &\leq \int_0^y (|a||v_p| + |b||w_p| + |c||u_p|)(x, y') dy' \leq \\ &\leq \frac{MK^p}{p!} \int_0^y (x+y')^p (|a| + |b| + |c|)(x, y') dy' \leq \\ &\leq \frac{MK^{p+1}}{(p+1)!} [(x+y)^{p+1} - x^{p+1}] \leq MK^{p+1} \frac{(x+y)^{p+1}}{(p+1)!}, \end{aligned}$$

что и утверждалось. Из оценок (9) следует регулярная (см. § 1.3) сходимость рядов

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} u_p, \quad v = \sum_{p=0}^{\infty} v_p, \quad w = \sum_{p=0}^{\infty} w_p, \quad (10)$$

которые мажорируются равномерно сходящимся на $\bar{\Pi}$ рядом

$$M \sum_{p=1}^{\infty} K^p \frac{(x+y)^p}{p!} = Me^{K(x+y)}. \quad (11)$$

Построенные функции u , v и w непрерывны на $\bar{\Pi}$. Докажем, что они удовлетворяют системе (6). Установим это, например, для первого из уравнений (6). Суммируя первое из рекуррентных соотношений (8) по p от 0 до N и пользуясь (7), получим

$$\sum_{p=0}^N u_p(x, y) = \varphi_1(x) + \int_0^y \sum_{p=0}^{N-1} w_p(x, y') dy', \quad N=1, 2, \dots$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $N \rightarrow \infty$ и пользуясь равномерной сходимостью рядов (10), получим первое из уравнений (6).

Докажем единственность решения системы уравнений (6) в классе $C(\bar{\Pi})$. Для этого достаточно доказать, что соответствующая однородная система (6) имеет только нулевое решение (см. § 1.11). Пусть u^* , v^* и w^* — решение однородной системы (6), $|u^*| \leq M$, $|v^*| \leq M$ и

$|w^*| \leq M$. Так как функции $u_p = u^*$, $v_p = v^*$ и $w_p = w^*$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям (8), то, по доказанному, для них справедливы оценки типа (9):

$$|u^*(x, y)| \leq MK^p \frac{(x+y)^p}{p!}, \quad \dots, \quad p=1, 2, \dots$$

Переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, получаем $u^* = v^* = w^* = 0$, что и требовалось.

Докажем непрерывную зависимость решения от данных f , φ_1 и φ_2 . Пусть $\tilde{f}$, $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ — другие данные, причем

$$\left. \begin{aligned} |f - \tilde{f}| &\leq \varepsilon, \quad |\varphi_1 - \tilde{\varphi}_1| \leq \varepsilon_1, \quad |\varphi'_1 - \tilde{\varphi}'_1| \leq \varepsilon'_1, \\ |\varphi_2 - \tilde{\varphi}_2| &\leq \varepsilon_2, \quad |\varphi'_2 - \tilde{\varphi}'_2| \leq \varepsilon'_2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Обозначим через u и $\tilde{u}$ соответствующие решения задачи Гурса. Тогда найдется такая постоянная C , что

$$\left. \begin{aligned} |u - \tilde{u}| &\leq C(\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon'_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon'_2), \\ |u_x - \tilde{u}_x| &\leq C(\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon'_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon'_2), \\ |u_y - \tilde{u}_y| &\leq C(\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon'_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon'_2), \\ |u_{xy} - \tilde{u}_{xy}| &\leq C(\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon'_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon'_2). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Действительно, функция $u - \tilde{u}$ есть решение задачи Гурса с данными $f - \tilde{f}$, $\varphi_1 - \tilde{\varphi}_1$ и $\varphi_2 - \tilde{\varphi}_2$. По доказанному функции $u - \tilde{u}$, $v - \tilde{v}$ и $w - \tilde{w}$, определяемые соответствующими рядами (10), мажорируются на $\bar{\Pi}$ величиной (11),

$$\max[\max|u_0 - \tilde{u}_0|, \max|v_0 - \tilde{v}_0|, \max|w_0 - \tilde{w}_0|] e^{K(x+y)},$$

т. е., в силу (7) и (12), величиной

$$\begin{aligned} \max \left[\max|\varphi_1 - \tilde{\varphi}_1|, \max \left| \varphi'_1 - \tilde{\varphi}'_1 + \int_0^y (f - \tilde{f})(x, y') dy' \right|, \right. \\ \left. \max \left| \varphi'_2 - \tilde{\varphi}'_2 + \int_0^y (f - \tilde{f})(x', y) dx' \right| \right] e^{K(x+y)} \leq \\ \leq C(\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon'_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon'_2). \end{aligned}$$

Отсюда, а также из соотношений (3) и из уравнения (1) следуют оценки (13).

Резюмируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема. Если функции a, b, c, f непрерывны на Π , $\varphi_1 \in C^1([0, x_0])$, $\varphi_2 \in C^1([0, y_0])$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, то решение задачи Гурса (1)–(2) в классе $C^1(\Pi)$ существует, единственно и непрерывно зависит от данных f, φ_1, φ_2 в смысле (12)–(13).

2. Формула Грина. Пусть функции a, b, a_x и b_y непрерывны на замкнутой ограниченной области G с кусочно-гладкой границей S и n — внешняя нормаль к G . Тогда для любых функций u и v класса $C^1(\bar{G})$ и тако, что u_{xy} и v_{xy} непрерывны на G , справедливо равенство (формула Грина)

$$\int_G (vLu - uL^*v) dx dy = \int_S \left[\left(\frac{v}{2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + auv \right) \cos(n_x) + \left(\frac{v}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + buv \right) \cos(n_y) \right] dS, \quad (14)$$

где L^* — дифференциальный оператор, формально сопряженный с оператором L (см. (3) § 11.1),

$$L^*v = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(av)}{\partial x} - \frac{\partial(bv)}{\partial y} + cv.$$

Формула (14) получается интегрированием по области G тождества

$$vLu - uL^*v = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + auv \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + buv \right)$$

и применением к интегралу в правой части формулы Гаусса — Остроградского *).

3. Функция Римана. Функцией Римана оператора L называется функция $\mathcal{R}(x, y; \xi, \eta)$, удовлетворяющая условиям:

1) функции $\mathcal{R}, \mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y$ и $\mathcal{R}_{xy}$ непрерывны по совокупности переменных $(x, y; \xi, \eta)$ на $\Pi \times \Pi$;

2) при каждой $(\xi, \eta) \in \Pi$ функция $\mathcal{R}$ удовлетворяет уравнению

$$L_{(x,y)} \mathcal{R}(x, y; \xi, \eta) = 0, \quad (x, y) \in \Pi,$$

*) Для областей на плоскости эта формула часто называется формулой Грина.

удовлетворяет на характеристиках $x = \xi$ и $y = \eta$ (рис. 65)

$$\mathcal{R}|_{y=\eta} = e^{\int_0^x a(x', \eta) dx'}, \quad \mathcal{R}|_{x=\xi} = e^{\int_0^y b(\xi, y') dy'}. \quad (15)$$

Из условий (15) выводим:

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1, \quad (16)$$

$$\mathcal{R}|_{x=\eta} = b(x, \eta) \mathcal{R}|_{x=\eta}, \quad \mathcal{R}|_{y=\xi} = a(\xi, y) \mathcal{R}|_{y=\xi}. \quad (17)$$

В соответствии с этим определением функция Римана $\mathcal{R}^*(x, y; \xi, \eta)$ оператора L^* непрерывна на $\Pi \times \Pi$ вместе

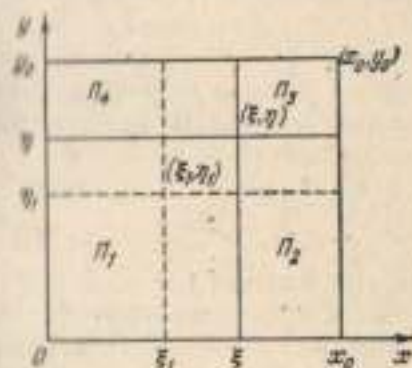


Рис. 65.

производными $\mathcal{R}_x^*$, $\mathcal{R}_y^*$ и $\mathcal{R}_{xy}^*$, удовлетворяет уравнению $L^* \mathcal{R}^* = 0$ на Π и условиям на характеристиках $x = \xi$ и $y = \eta$

$$\mathcal{R}^*|_{y=\eta} = e^{-\int_0^x a(x', \eta) dx'}, \quad \mathcal{R}^*|_{x=\xi} = e^{-\int_0^y b(\xi, y') dy'}, \quad (15^*)$$

или

$$\mathcal{R}^*(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1, \quad (16^*)$$

$$\mathcal{R}^*|_{x=\eta} = -b(x, \eta) \mathcal{R}^*|_{x=\eta}, \quad \mathcal{R}^*|_{y=\xi} = -a(\xi, y) \mathcal{R}^*|_{y=\xi}. \quad (17^*)$$

Теорема. Если функции a, b, c, a_x и b_y непрерывны на Π , то функция Римана $\mathcal{R}$ существует, единственна и

справедливо равенство

$$\mathcal{R}(x, y; \xi, \eta) = \mathcal{R}^*(\xi, \eta; x, y), \quad (18)$$

где $\mathcal{R}^*$ — функция Римана оператора L^* .

Доказательство. Так как характеристические данные (15) принадлежат классам $C^1([0, x_0])$ и $C^1([0, y_0])$ соответственно, то по теореме § 15.1 при каждой $(\xi, \eta) \in \Pi$ существуют и единственные решения четырех задач Гурса в прямоугольниках Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4^* (рис. 65) для уравнения $L^*u=0$ с данными (15). Это решение обозначим через $\mathcal{R}(x, y; \xi, \eta)$.

По построению функция $\mathcal{R}$ непрерывна по (x, y) на $\bar{\Pi}$, функции $\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y$ и $\mathcal{R}_{xy}$ непрерывны по (x, y) на $\bar{\Pi}_i, i=1, 2, 3, 4$ (теорема § 15.1). Докажем, что $\mathcal{R}_x$ непрерывна по (x, y) на $\bar{\Pi}$. Для этого рассмотрим задачу Гурса в прямоугольнике $\Pi_2 \cup \Pi_3$ для уравнения $L^*v=0$ с данными на характеристиках $x=\xi$ и $y=0$:

$$v|_{x=\xi} = \mathcal{R}(\xi, y; \xi, \eta), \quad v|_{y=0} = \mathcal{R}(x, 0; \xi, \eta). \quad (19)$$

Так как данные (19) принадлежат классу C^1 , то по теореме § 15.1 существует единственное решение $v \in C^1(\Pi_2 \cup \Pi_3)$. Поэтому $v=\mathcal{R}$ на $\bar{\Pi}_2$ и, следовательно, $v=\mathcal{R}$ на $\bar{\Pi}_3$. Таким образом, $\mathcal{R} \in C^1(\Pi_2 \cup \Pi_3)$. Аналогично доказывается, что $\mathcal{R} \in C^1(\Pi_1 \cup \Pi_4)$. Но на линии $x=\xi$, в силу второй из формул (17), функция $\mathcal{R}_x$ непрерывна. Поэтому $\mathcal{R}_x$ непрерывна по (x, y) на $\bar{\Pi}$. Аналогично доказывается, что и $\mathcal{R}_y$ непрерывна по (x, y) на $\bar{\Pi}$. Но тогда из равенства $L^*\mathcal{R}=0, (x, y) \in \Pi_i, i=1, 2, 3, 4$, вытекает, что $\mathcal{R}_{xy}$ непрерывна по (x, y) на $\bar{\Pi}$ и удовлетворяет уравнению $L^*\mathcal{R}_{xy}=0$ на $\bar{\Pi}$.

Непрерывность функций $\mathcal{R}, \mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y$ и $\mathcal{R}_{xy}$ по совокупности переменных $(x, y; \xi, \eta)$ на $\bar{\Pi} \times \bar{\Pi}$ следует из непрерывности этих функций по (x, y) на $\bar{\Pi}$ и из непрерывной зависимости решения задачи Гурса от данных (15) в смысле (12) — (13).

* Если точка (ξ, η) лежит на границе Π , то соответствующие прямоугольники Π_i вырождаются.

Докажем равенство (18). Пусть точки $(\xi, \eta) \in \Pi$ и $(\xi_1, \eta_1) \in \Pi$. Считаем для определенности $\xi_1 < \xi$ и $\eta_1 < \eta$. Применяя формулу Грина (14) к функциям $u = \mathcal{R}^*(x, y; \xi_1, \eta_1)$ и $v = \mathcal{R}(x, y; \xi, \eta)$ и к области $G = \{(x, y): \xi_1 < x < \xi, \eta_1 < y < \eta\}$ (рис. 65) и пользуясь равенствами $L^*\mathcal{R}=0, L^*\mathcal{R}^*=0, (15)-(17)$ и $(15^*)-(17^*)$, получим соотношение (18):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\xi_1}^{\xi} \left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial x} - \frac{\mathcal{R}^*}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} + a \mathcal{R} \mathcal{R}^* \right) \Big|_{y=\eta_1}^{y=\eta} dx + \\ &+ \int_{\eta_1}^{\eta} \left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial y} - \frac{\mathcal{R}^*}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} + b \mathcal{R} \mathcal{R}^* \right) \Big|_{x=\xi_1}^{x=\xi} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi} d_x(\mathcal{R} \mathcal{R}^*) \Big|_{y=\eta_1}^{y=\eta} + \frac{1}{2} \int_{\eta_1}^{\eta} d_y(\mathcal{R} \mathcal{R}^*) \Big|_{x=\xi_1}^{x=\xi} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi} d_x(\mathcal{R} \mathcal{R}^*) \Big|_{x=\xi_1}^{x=\xi} + \frac{1}{2} \int_{\eta_1}^{\eta} d_y(\mathcal{R} \mathcal{R}^*) \Big|_{y=\eta_1}^{y=\eta} = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{R}(\xi, \eta; \xi, \eta) \mathcal{R}^*(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) - \frac{1}{2} \mathcal{R}(\xi_1, \eta; \xi, \eta) \times \\ &\times \mathcal{R}^*(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1) + \frac{1}{2} \mathcal{R}(\xi, \eta_1; \xi, \eta) \mathcal{R}^*(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1) - \\ &- \frac{1}{2} \mathcal{R}(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) \mathcal{R}^*(\xi_1, \eta_1; \xi_1, \eta_1) + \frac{1}{2} \mathcal{R}(\xi, \eta; \xi, \eta) \times \\ &\times \mathcal{R}^*(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) - \frac{1}{2} \mathcal{R}(\xi, \eta_1; \xi, \eta) \mathcal{R}^*(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1) + \\ &+ \frac{1}{2} \mathcal{R}(\xi_1, \eta; \xi, \eta) \mathcal{R}^*(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1) - \\ &- \frac{1}{2} \mathcal{R}(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) \mathcal{R}^*(\xi_1, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = \\ &= \mathcal{R}^*(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) - \mathcal{R}^*(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta), \end{aligned}$$

если $\xi_1 < \xi$ и $\eta_1 < \eta$. Аналогично рассматриваются и остальные случаи. По непрерывности равенство (18) остается справедливым на $\bar{\Pi} \times \bar{\Pi}$. Теорема доказана.

Пример. Функция Римана для уравнения $u_{xy} + cu = 0, c$ — постоянная, имеет вид

$$\mathcal{R}(x, y; \xi, \eta) = J_0 \left[\sqrt{4c} (\xi - x)(\eta - y) \right],$$

где J_0 — функция Бесселя (см. ниже, § 23).

Физический смысл функции Римана. Пользуясь формулой Грина (14), можно показать (ср. § 6.5, g)), что функция

$$\mathcal{R}(x, y; \xi, \eta) = \theta(x - \xi) \theta(y - \eta) \mathcal{R}(x, y; \xi, \eta)$$

удовлетворяет уравнению

$$L_{(x, y)} \mathcal{R}(x, y; \xi, \eta) = \delta(x - \xi) \cdot \delta(y - \eta).$$

Поэтому функцию $\mathcal{R}$ можно истолковать как возмущение в точке (x, y) , порожденное точечным источником интенсивности 1 в точке (ξ, η) . Таким образом, функция $\mathcal{R}$ является естественным обобщением фундаментального решения (см. § 11.2) на уравнения с переменными коэффициентами гиперболического типа.

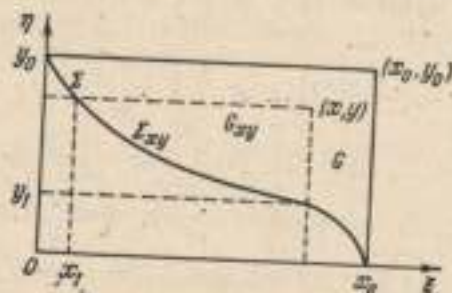


Рис. 66.

4. Задача Коши. Пусть G обозначает треугольную область, ограниченную характеристиками $\xi = x_0$ и $\eta = y_0$ и отрезком гладкой кривой $\Sigma = [\eta = \sigma(\xi)]$. Для определенности считаем, что кривая Σ проходит через точки $(x_0, 0)$ и $(0, y_0)$ (рис. 66). Предположим, что кривая Σ нигде не касается характеристик, т. е. $\sigma'(\xi) < 0$, $0 \leq \xi \leq x_0$.

Поставим следующую задачу Коши для уравнения (1) в области G (см. § 4.2). Найти функцию $u(x, y)$, $u \in C^1(G)$, $u_{xy} \in C(G)$, удовлетворяющую уравнению (1) в G и данным Коши на Σ :

$$u|_{\Sigma} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = u_1. \quad (20)$$

Как показано в § 4.3, задание u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ на Σ эквивалентно заданию u , u_x (или u_y) на Σ , в силу соотношений $\cos(\pi x) = \frac{\sigma'}{\Delta}$, $\cos(\pi y) = -\frac{1}{\Delta}$, $\Delta = \sqrt{1 + (\sigma')^2}$; (21)

$$u_x|_{\Sigma} + u_y|_{\Sigma} \sigma' = u_{\pi x}|_{\Sigma}, \quad u_x|_{\Sigma} \frac{\sigma'}{\Delta} - u_y|_{\Sigma} \frac{1}{\Delta} = u_1. \quad (22)$$

С помощью функции Римана представим решение задачи Коши (1) — (20) в явном виде.

Теорема. Если Σ — кривая класса C^2 , функции a , b , c , a_x и b_y принадлежат $C(\Pi)$, $f \in C(\bar{G})$, $u_0[x, \sigma(x)] \in C^2([0, x_0])$ и $u_1[x, \sigma(x)] \in C^1([0, x_0])$, то решение задачи Коши (1) — (20) существует, единственно и выражается формулой Римана

$$u(x, y) = \frac{1}{2} u_0(x_1, y) \mathcal{R}(x_1, y; x, y) + \frac{1}{2} u_0(x, y_1) \mathcal{R}(x, y_1; x, y) + \int_{\Sigma} \left[\left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} + b u_0 \mathcal{R} \right) d\xi - \left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{u}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} + a u_0 \mathcal{R} \right) d\eta \right] + \int_{G_{xy}} \mathcal{R} f d\xi d\eta, \quad (23)$$

где G_{xy} и Σ_{xy} — части области G и кривой Σ , лежащие между характеристиками $\xi = x$ и $\eta = y$, $y = \sigma(x)$, $y_1 = \sigma(x)$ (см. рис. 66).

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи Коши (1) — (20). Так как $f = Lu \in C(\bar{G})$, то $u_{xy} \in C(\bar{G})$. Фиксируем точку (x, y) из области G . Применяя формулу Грина (14) к функциям $u(\xi, \eta)$, $v = \mathcal{R}(\xi, \eta; x, y)$ и к области G_{xy} , получим

$$\int_{G_{xy}} \mathcal{R} f d\xi d\eta = \int_{\Sigma} \left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} + b u_0 \mathcal{R} \right) d\xi + \int_{\Sigma} \left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{u}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} + a u_0 \mathcal{R} \right) d\eta - \int_{\Sigma_{xy}} \left[\left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} + b u_0 \mathcal{R} \right) d\xi + \left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{u}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} + a u_0 \mathcal{R} \right) d\eta \right]. \quad (24)$$

Пользуясь соотношениями (15)–(17), преобразуем первые два слагаемых в правой части равенства (24):

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^x \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} \frac{du}{d\xi} - \frac{u}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} + bu \mathcal{R} \right) \Big|_{\eta=x} d\xi = \\ = \frac{1}{2} \int_{x_1}^x \left(\mathcal{R} \frac{du}{d\xi} + u \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} \right) \Big|_{\eta=x} d\xi = \frac{1}{2} \int_{x_1}^x d_\xi (u \mathcal{R}) \Big|_{\eta=x} = \\ = \frac{1}{2} u(x, y) - \frac{1}{2} u(x_1, y) \mathcal{R}(x_1, y; x, y), \end{aligned}$$

и аналогично:

$$\begin{aligned} \int_{\eta_1}^{\eta} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} \frac{du}{d\eta} - \frac{u}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} + au \mathcal{R} \right) \Big|_{\xi=x} d\eta = \\ = \frac{1}{2} u(x, y) - \frac{1}{2} u(x, y_1) \mathcal{R}(x, y_1; x, y). \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в формулу (24), получим представление (23).

Докажем единственность решения задачи Коши (1)–(20). Действительно, если u – решение соответствующей однородной задачи (т. е. при $f=0$ $u_0=u_1=0$ и тогда, в силу (22), $u_x|_x=u_y|_y=0$), то формула (23) сразу даст $u=0$, что эквивалентно единственности (см. § 1.11).

Осталось доказать существование решения задачи Коши (1)–(20). Для этого достаточно установить существование решения этой задачи при $u_0=u_1=0$. Действительно, вводя новую неизвестную функцию

$$v = u - u_0[x, \sigma(x)] - [y - \sigma(x)] u_y[x, \sigma(x)],$$

мы приходим к уравнению (1) с измененной правой частью f_1 и нулевыми данными Коши на Σ . Из условий гладкости функций u_0 , u_1 и σ следует, в силу (22), что $u_y[x, \sigma(x)] \in C^1([0, x_0])$, и потому $Lv = f_1 \in C(\bar{G})$.

Таким образом, осталось проверить, что функция

$$u(x, y) = \int_{\sigma_{xy}} \mathcal{R}(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad f \in C(\bar{G}), \quad (25)$$

есть решение задачи Коши (1)–(20) с нулевыми данными Коши. Очевидно, $u \in C(\bar{G})$ и $u|_\Sigma = 0$. Далее, в

силу формулы (18)

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; x, y) = \mathcal{R}^*(x, y; \xi, \eta), \quad (26)$$

так что функции $\mathcal{R}_x(\xi, \eta; x, y)$, $\mathcal{R}_y(\xi, \eta; x, y)$ и $\mathcal{R}_{xy}(\xi, \eta; x, y)$ непрерывны на $\Pi \times \Pi$ и $L_{(x,y)} \mathcal{R}(\xi, \eta; x, y) = 0$. Поэтому формулу (25) можно дифференцировать по x и y по классическим правилам дифференцирования интегралов по переменной области,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{\sigma_{xy}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} f d\xi d\eta + \int_{\eta_1}^{\eta} \mathcal{R}(x, \eta; x, y) f(x, \eta) d\eta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{\sigma_{xy}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} f d\xi d\eta + \int_{x_1}^x \mathcal{R}(\xi, y; x, y) f(\xi, y) d\xi,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \int_{\sigma_{xy}} \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial x \partial y} f d\xi d\eta + \int_{x_1}^x \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}(\xi, y; x, y) f(\xi, y) d\xi + \\ + \mathcal{R}(x, y; x, y) f(x, y) + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y}(x, \eta; x, y) f(x, \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Из этих формул заключаем, что $u \in C^1(\bar{G})$, $u_{xy} \in C(\bar{G})$ и $u_x|_x = 0$. Пользуясь равенствами (16), (26) и (17*), убеждаемся, что u удовлетворяет уравнению $Lu = f$,

$$\begin{aligned} Lu = \int_{\sigma_{xy}} L_{(x,y)} \mathcal{R} f d\xi d\eta + \\ + \int_{\eta_1}^{\eta} \left[a(x, y) \mathcal{R}(x, \eta; x, y) + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y}(x, \eta; x, y) \right] f(x, \eta) d\eta + \\ + \int_{x_1}^x \left[b(x, y) \mathcal{R}(\xi, y; x, y) + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}(\xi, y; x, y) \right] f(\xi, y) d\xi + f = \\ = \int_{\eta_1}^{\eta} \left[a(x, y) \mathcal{R}^*(x, y; x, \eta) + \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial y}(x, y; x, \eta) \right] f(x, \eta) d\eta + \\ + \int_{x_1}^x \left[b(x, y) \mathcal{R}^*(x, y; \xi, y) + \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial x}(x, y; \xi, y) \right] \times \\ \times f(\xi, y) d\xi + f = f. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Отметим некоторые качественные следствия, вытекающие из формулы Римана (23). Из этой формулы видно, что решение задачи Коши в точке (x, y) полностью определяется значениями данных f , u_0 и u_1 в замкнутой треугольной области G_{xy} — области зависимости точки (x, y) (ср. § 14.4). Поэтому, если эти данные изменять вне фиксированной области $G_{x^*y^*}$ (с соблюдением надлежащих свойств гладкости), то и решение будет меняться лишь вне этой области. Таким образом, мы приходим к следующему выводу: к данному решению задачи Коши, зафиксированному в области $G_{x^*y^*}$, можно присоединить вдоль характеристик $\xi = x^*$ и $\eta = y^*$, вообще говоря, различные решения, являющиеся его продолжением.

Замечание. Существование классического решения задачи Коши для уравнения колебаний струны установлено при всех $f \in C^1$ ($t \geq 0$) (см. § 13.4). Здесь мы доказали существование решения задачи Коши для уравнения (1) при всех $f \in C(\bar{D})$. Ослабление требований на f связано с тем, что решение уравнения (1) ищется в более широком классе функций $u \in C^1(\bar{D})$, $u_{xy} \in C(\bar{D})$ (в этом случае $u_{xy} = u_{yx} \in C(\bar{D})$).

§ 16. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности строится методом, аналогичным методу, изложенному в § 13 для решения этой задачи для волнового уравнения.

1. Тепловой потенциал. В § 11.6 было показано, что функция

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{t(t)}{(2\pi\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4\pi t}}$$

является фундаментальным решением оператора теплопроводности. Эта функция неотрицательна, обращается в нуль при $t < 0$, бесконечно дифференцируема при $(x, t) \neq (0, 0)$ и локально интегрируема в R^{n+1} . Более того (см. § 6.5, f)),

$$\int \mathcal{E}(x, t) dx = 1, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$\mathcal{E}(x, t) \rightarrow \delta(x), \quad t \rightarrow +0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(R^n). \quad (2)$$

График функции $\mathcal{E}(x, t)$ при различных $t > 0$ ($t_1 < t_2 < t_3$) построен на рис. 67.

Фундаментальное решение $\mathcal{E}(x, t)$ дает распределение температуры от точечного мгновенного источника $\delta(x) \cdot \delta(t)$. Поскольку $\mathcal{E}(x, t) > 0$ при всех $t > 0$ и $x \in R^n$, то, стало быть, тепло распространяется с бесконечной скоростью. Но это противоречит опыту. Следовательно, уравнение теплопроводности недостаточно точно качественно описывает механизм передачи тепла. Тем не менее это уравнение

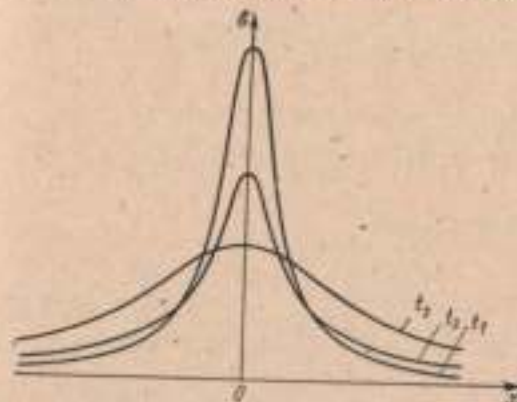


Рис. 67.

дает хорошее количественное согласие с опытом (например, при больших x и малых t величиной $\mathcal{E}(x, t)$ с большой точностью можно пренебречь). Более точное описание процессов переноса (тепла, частиц) дается уравнениями переноса (см. § 2.4).

Пусть обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$ обращается в нуль при $t < 0$. Обобщенная функция $V = \mathcal{E} * f$, где $\mathcal{E}$ — фундаментальное решение оператора теплопроводности, называется *тепловым потенциалом с плотностью f* .

Если тепловой потенциал V существует в $\mathcal{D}'(R^{n+1})$, то, в силу теоремы § 11.3, он удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \Delta V + f(x, t). \quad (3)$$

Из теоремы § 7.5 следует, что если f — финитная обобщенная функция и обращается в нуль при $t < 0$, то тепловой потенциал заведомо существует в $\mathcal{D}'(R^{n+1})$.

Выделим еще один класс плотностей f , для которых тепловой потенциал существует. Пусть $\mathcal{K}$ — класс функций, обращающихся в нуль при $t < 0$ и ограниченных в каждой полосе $0 \leq t \leq T$.

Теорема. Если $f \in \mathcal{K}$, то тепловой потенциал V с плотностью f существует в классе $\mathcal{K}$ и выражается формулой

$$V(x, t) = \int_0^t \int_{R^n} \frac{f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau. \quad (4)$$

Потенциал V удовлетворяет оценке

$$|V(x, t)| \leq t \sup_{0 \leq \tau \leq t} |f(\xi, \tau)|, \quad t > 0, \quad (5)$$

и начальному условию

$$V(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +0} 0, \quad x \in R^n. \quad (6)$$

Если к тому же функция $f \in C^2(t \geq 0)$ и все ее производные до второго порядка включительно ограничены в каждой полосе, то $V \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$.

Доказательство. Так как функции $\mathcal{E}$ и f локально интегрируемы в R^{n+1} , то их свертка

$$\mathcal{E} * f = \int_0^t \int_{R^n} f(\xi, \tau) \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau$$

существует и является локально интегрируемой функцией в R^{n+1} , если функция

$$h(x, t) = \int_0^t \int_{R^n} |f(\xi, \tau)| \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau$$

локально интегрируема в R^{n+1} (см. § 7.4). Проверим, что это условие выполнено. Так как $h = 0$ при $t < 0$, то достаточно установить, что функция h удовлетворяет оценке (5) при $t > 0$. Это следует из равенства (1) в силу теоремы Фубини:

$$\begin{aligned} h(x, t) &\leq \sup_{0 \leq \tau \leq t} |f(\xi, \tau)| \int_0^t \int_{R^n} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau = \\ &= t \sup_{0 \leq \tau \leq t} |f(\xi, \tau)|, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, тепловой потенциал $V = \mathcal{E} * f$ представляется формулой (4). Так как $|V| \leq h$, то этот потенциал обращается в нуль при $t < 0$ и, в силу (7), удовлетворяет оценке (5). Это значит, что $V \in \mathcal{K}$. Из оценки (5) следует, что V удовлетворяет начальному условию (6).

Совершая в формуле (4) замену переменных интегрирования

$$\xi = x - 2a\sqrt{s}y, \quad \tau = t - s,$$

представим ее в виде

$$V(x, t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t \int_{R^n} f(x - 2a\sqrt{s}y, t - s) e^{-|y|^2} dy ds. \quad (4')$$

Пусть функция $f \in C^2(t \geq 0)$ и все ее производные до второго порядка включительно содержатся в классе $\mathcal{K}$. Тогда, пользуясь теоремами о непрерывности и дифференцируемости интегралов, зависящих от параметра (см. § 1.5), из формулы (4') и из равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t \int_{R^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x - 2a\sqrt{s}y, t - s) e^{-|y|^2} dy ds + \\ &+ \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{R^n} f(x - 2a\sqrt{t}y, +0) e^{-|y|^2} dy \end{aligned}$$

выводим, что функции V , V_x , V_t , $V_{x_i x_j}$, $V_{x_i t}$ непрерывны при $t \geq 0$, а V_{tt} непрерывна при $t > 0$. Теорема доказана.

2. Поверхностный тепловой потенциал. Тепловой потенциал $V^{(0)}$ с плотностью $f = u_0(x) \cdot \delta(t)$ называется **поверхностным тепловым потенциалом** (просто слов с плотностью u_0).

$$V^{(0)} = \mathcal{E} * [u_0(x) \cdot \delta(t)] = \mathcal{E}(x, t) * u_0(x).$$

Если u_0 финитна в R^n , то поверхностный тепловой потенциал $V^{(0)}$ заведомо существует в $\mathcal{D}'(R^{n+1})$ (см. § 7.6).

Следующая теорема дает еще один признак существования поверхностного теплового потенциала и его свойства.

Теорема. Если $u_0(x)$ — ограниченная функция в R^n , то поверхностный тепловой потенциал $V^{(0)}$ существует

в $\mathcal{E}$, принадлежит классу $C^\infty(t > 0)$, представляется интегралом Пуассона

$$V^{(0)}(x, t) = \frac{\delta(t)}{(2\pi V \pi t)^n} \int_{R^n} u_0(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\pi t}} d\xi \quad (8)$$

и удовлетворяет неравенству

$$|V^{(0)}(x, t)| \leq \sup_{\xi} |u_0(\xi)|, \quad t > 0. \quad (9)$$

Если к тому же функция $u_0(x)$ непрерывна в R^n , то потенциал $V^{(0)} \in C(t \geq 0)$ и удовлетворяет начальному условию

$$V^{(0)}|_{t=0} = u_0(x). \quad (10)$$

Доказательство. Так как функция

$$h(x, t) = \int |u_0(\xi)| \bar{E}(x - \xi, t) d\xi$$

обращается в нуль при $t < 0$, а при $t > 0$, в силу (1), удовлетворяет оценке (9):

$$h(x, t) \leq \sup_{\xi} |u_0(\xi)| \int \bar{E}(x - \xi, t) d\xi = \sup_{\xi} |u_0(\xi)|,$$

то эта функция локально интегрируема в R^{n+1} . Следовательно, поверхностный тепловой потенциал $V^{(0)} = \bar{E}(x, t) * u_0(x)$ представляется формулой (8) (см. § 7.4):

$$V^{(0)}(x, t) = \int u_0(\xi) \bar{E}(x - \xi, t) d\xi. \quad (8')$$

обращается в нуль при $t < 0$ и, в силу неравенства $|V^{(0)}| \leq h$, удовлетворяет оценке (9). Это значит, что $V^{(0)} \in \mathcal{E}$.

Далее из формулы (8) следует, что $V^{(0)} \in C^\infty(t > 0)$ (см. § 1.5).

Пусть теперь u_0 — непрерывная ограниченная функция в R^n . Докажем, что потенциал $V^{(0)} \in C(t \geq 0)$ и удовлетворяет условию (10).

Пусть $(x, t) \rightarrow (x_0, 0)$, $t > 0$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. В силу непрерывности $u_0(x)$ существует такое число $\delta > 0$, что $|u_0(\xi) - u_0(x_0)| < \varepsilon$ при $|\xi - x_0| < 2\delta$. Поэтому, если $|x - x_0| < \delta$, то $|x - y - x_0| < 2\delta$, если

$|y| < \delta$, и в силу (1) и (8') при $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |V^{(0)}(x, t) - u_0(x_0)| &\leq \int |u_0(\xi) - u_0(x_0)| \bar{E}(x - \xi, t) d\xi = \\ &= \int_{|y| < \delta} |u_0(x - y) - u_0(x_0)| \bar{E}(y, t) dy + \\ &+ \int_{|y| > \delta} |u_0(x - y) - u_0(x_0)| \bar{E}(y, t) dy \leq \\ &\leq \varepsilon + \frac{2}{2^n \pi^n} \sup_{\xi} |u_0(\xi)| \int_{|z| > \frac{\delta}{2\sqrt{t}}} e^{-\frac{|z|^2}{4\pi t}} d\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

Второе слагаемое в (11) также можно сделать $< \varepsilon$ за счет $t \rightarrow 0$, так что при некотором $\delta_1 \leq \delta$

$$|V^{(0)}(x, t) - u_0(x_0)| < 2\varepsilon, \quad |x - x_0| < \delta_1, \quad |t| < \delta_1.$$

Теорема доказана.

Замечание. Формула (8) формально вытекает из формулы (4), если в ней положить $f(\xi, \tau) = u_0(\xi) \cdot \delta(\tau)$ и «проинтегрировать» $\delta(\tau)$.

3. Постановка обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности. Схема решения задачи Коши, изложенная в § 13.1 для обыкновенного линейного дифференциального уравнения, применяется и для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad (12)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (13)$$

Считаем $f \in C(t \geq 0)$ и $u_0 \in C(R^n)$. Предположим, что существует классическое решение $u(x, t)$ этой задачи. Это значит, что $u \in C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$, удовлетворяет уравнению (12) при $t > 0$ и начальное условие (13) при $t \rightarrow 0$ (см. § 4.2).

Продолжая функции u и f нулем при $t < 0$, как и в § 13.2, заключаем, что продолженные функции $\tilde{u}$ и $\tilde{f}$ удовлетворяют в R^{n+1} уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = a^2 \Delta \tilde{u} + \tilde{f}(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t). \quad (14)$$

Равенство (14) показывает, что начальное возмущение u_0 для функции $\tilde{u}(x, t)$ играет роль мгновенно действующего источника $u_0(x) \cdot \delta(t)$ (типа простого слоя на

плоскости $t=0$) и классические решения задачи Коши (12) — (13) содержатся среди тех решений уравнения (14), которые обращаются в нуль при $t < 0$. Это дает основание ввести следующее обобщение задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Обобщенной задачей Коши для уравнения теплопроводности с источником $F \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$ назовем задачу о нахождении обобщенной функции $u \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$, обращающейся в нуль при $t < 0$ и удовлетворяющей уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + F(x, t). \quad (15)$$

Уравнение (15) эквивалентно следующему (см. § 11.1): для любой $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+1})$ справедливо равенство

$$-\left(u, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = a^2 (u, \Delta \varphi) + (F, \varphi). \quad (15')$$

Из уравнения (15) следует, что необходимым условием разрешимости обобщенной задачи Коши является обращение в нуль F при $t < 0$.

Замечание. Уравнение (14) фактически есть тождество

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u \right\} + u(x, +0) \cdot \delta(t), \quad (16)$$

справедливое для любой функции $u \in C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$, обращаемой в нуль при $t < 0$ и такой, что $u_t - a^2 \Delta u \in C(t \geq 0)$.

4. Решения задачи Коши.

Теорема. Пусть $F(x, t) = f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t)$, где $f \in \mathcal{M}$ и u_0 — ограниченная функция в R^n . Тогда решение соответствующей обобщенной задачи Коши существует и единственно в классе $\mathcal{M}$ и представляется формулой Пуассона

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{R^n} \frac{f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau + \\ + \frac{\delta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{R^n} u_0(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi. \quad (17)$$

Решение u непрерывно зависит от f и u_0 в следующем смысле: если

$$|f - \tilde{f}| \leq \varepsilon, \quad |u_0 - \tilde{u}_0| \leq \varepsilon_0,$$

то соответствующие решения u и $\tilde{u}$ в любой полосе $0 \leq t \leq T$ удовлетворяют оценке

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq T\varepsilon + \varepsilon_0. \quad (18)$$

Если к тому же $f \in C^2(t \geq 0)$, все ее производные до второго порядка включительно принадлежат классу $\mathcal{M}$ и $u_0 \in C(R^n)$, то решение $u(x, t)$ — классическое.

Доказательство. В силу условий теоремы свертка $\tilde{u}$ с правой частью F уравнения (15) существует в $\mathcal{M}$ и представляется в виде суммы (17) двух тепловых потенциалов V и $V^{(0)}$, и эти потенциалы выражаются формулами (4) и (8) соответственно (см. теоремы §§ 16.1 и 16.2). Таким образом, по теореме § 11.3 формула (17) дает решение обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности и это решение единственно в классе $\mathcal{M}$. Непрерывная зависимость решения u от данных задачи f и u_0 вытекает из оценок (5) и (9).

Если функции f и u_0 удовлетворяют дополнительным условиям гладкости, сформулированным в теореме, то по теоремам §§ 16.1 и 16.2 построенное обобщенное решение $u \in C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ и удовлетворяет начальному условию (13). По лемме § 11.1 $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (12) в каждой точке области $t > 0$. Поэтому u — классическое решение задачи Коши (12) — (13). Теорема доказана.

Резюмируя, можно сказать, что задача Коши для уравнения теплопроводности поставлена корректно (см. § 4.7), причем $C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$, $D^2 u \in \mathcal{M}$, $|\alpha| \leq 2$ — класс корректности классической задачи Коши и $\mathcal{M}$ — класс корректности обобщенной задачи Коши.

Замечание. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности можно установить в более широком классе, а именно в классе функций, удовлетворяющих в любой полосе $0 \leq t \leq T$ оценке

$$|u(x, t)| \leq C_T e^{\alpha|x|^2}.$$

(См. А. Н. Тихонов [2].)

5. Упражнения. а) Показать, что решения смешанных задач

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$

$$1) u|_{x=0} = \psi(t), \quad 2) u_x|_{x=0} = \psi(t)$$

являются соответственно функции

$$\begin{aligned}
 1) \quad u(x, t) &= \bar{E}(x, t) * \bar{u}_0(x) - 2\alpha^2 \frac{\partial \bar{E}(x, t)}{\partial x} * \psi(t) = \\
 &= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u_0(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha^2 t}} \right] d\xi + \\
 &\quad + \frac{\pi}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2(t-\tau)}} d\tau, \\
 2) \quad u(x, t) &= \bar{E}(x, t) * \bar{u}_0(x) - 2\alpha^2 \bar{E}(x, t) * \psi(t) = \\
 &= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u_0(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha^2 t}} \right] d\xi - \\
 &\quad - \frac{\pi}{\sqrt{\pi t}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2(t-\tau)}} d\tau.
 \end{aligned}$$

Здесь $u_0 \in C([0, \infty))$ ограничена, $\bar{u}_0$ и $\bar{u}_0$ — ее нечетное и четное продолжения соответственно и $\psi \in C([0, \infty))$, $\psi=0$, $t < 0$.

б) Пусть функция $u_0(x)$ ограничена в $\mathbb{R}^n$ и обладает шаровым предельным средним

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_n R^n} \int_{|x| < R} u_0(x) dx = a.$$

Доказать, что решение $u(x, t)$ соответствующей задачи Коши для уравнения теплопроводности стабилизируется к a при $t \rightarrow \infty$, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) \xrightarrow{|x| \leq R} a, \quad R - \text{любое.}$$

в) Пользуясь фундаментальным решением оператора Шредингера (см. § 11.12, е)) показать, что задача Коши для одномерного уравнения Шредингера (см. § 2.7) сводится к интегральному уравнению

$$\begin{aligned}
 \psi(x, t) &= \lambda \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{m_0(x-\xi)^2}{2\hbar(t-\tau)}} \frac{V(\xi, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau + \\
 &\quad + \frac{\lambda \hbar}{V t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{m_0(x-\xi)^2}{2\hbar t}} \psi_0(\xi) d\xi, \\
 \lambda &= \frac{1}{\hbar} \left(\frac{m_0}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} e^{i \frac{3\pi}{4}}.
 \end{aligned}$$

д) Пользуясь фундаментальным решением оператора переноса (см. § 11.11), показать, что задача Коши для уравнения переноса

(см. § 2.4) сводится к интегральному уравнению

$$\begin{aligned}
 \psi(x, z, t) &= \alpha \delta v \int_0^t \int_{S_1} \psi[x-v(t-\tau)z, s', \tau] e^{-\alpha v(t-\tau)} ds' d\tau + \\
 &\quad + v \int_0^t F[x-v(t-\tau)z, z, \tau] e^{-\alpha v(t-\tau)} d\tau + \psi_0(x-vtz, z) e^{-\alpha vt}.
 \end{aligned}$$

е) Показать, что задача Коши для уравнения Бюргерса *)

$$u_t + uu_x = \alpha^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0(x)$$

с помощью замены $u = \frac{\varphi}{\psi} - 2\alpha^2 \frac{\varphi_x}{\varphi}$ сводится к задаче Коши для уравнения теплопроводности

$$\varphi_t = \alpha^2 \varphi_{xx}, \quad \varphi|_{t=0} = \exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \int_0^t u_0(\xi) d\xi \right].$$

г) Проверить, что уравнение Кортевега — де Фриза (см. § 14.8) имеет решение типа двух «соединенных волн» *)

$$u(x, t) = 2 \frac{a_1 f_1 + a_2 f_2 + \alpha f_1 f_2 + \beta (a_1 f_1 + a_2 f_2) f_2}{(1 + f_1 + f_2 + \beta f_1 f_2)^2},$$

где

$$f_j = \exp[-\sqrt{a_j}(x - a_j t - x_j)], \quad a_j > 0, \quad j = 1, 2,$$

$$\alpha = 2(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2, \quad \beta = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2}.$$

Указание: воспользоваться подстановкой $u = 2 \left(\frac{\varphi_x}{\varphi} \right)_x$.

г) Показать, что нелинейное уравнение Шредингера

$$iu_t + u_{xx} - v|u|^2 u = 0, \quad v > 0$$

имеет решения типа солитонных (см. § 14.5)

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{v}} \frac{\exp i \left[\frac{a}{2} x - \left(\frac{a^2}{4} - \alpha \right) t \right]}{\operatorname{ch} \sqrt{\alpha} (x - x_0 - at)}.$$

*) См. Дж. Уизем [1], гл. 4 и 17.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Интегральными уравнениями называются уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла.

Многие задачи математической физики сводятся к линейным интегральным уравнениям вида

$$\int_0^1 \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (1)$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (2)$$

относительно неизвестной функции $\varphi(x)$ в области $G \subset R^1$. Уравнения (1) и (2) называются интегральными уравнениями Фредгольма первого и второго рода соответственно. Известные функции $\mathcal{K}(x, y)$ и $f(x)$ называются ядром и свободным членом интегрального уравнения; λ — комплексный параметр.

Интегральные уравнения Фредгольма первого рода здесь рассматриваться не будут.

Интегральное уравнение (2) при $f=0$

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy \quad (3)$$

называется однородным интегральным уравнением Фредгольма второго рода, соответствующим уравнению (2). Интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$\psi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}^*(x, y) \psi(y) dy + g(x), \quad (2^*)$$

$$\psi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}^*(x, y) \psi(y) dy, \quad (3^*)$$

где $\mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}$, называются сопряженными к уравнениям (2) и (3) соответственно. Ядром $\mathcal{K}^*(x, y)$ называется эрмитово сопряженным (сопряженным) ядром к ядру $\mathcal{K}(x, y)$.

Мы будем записывать интегральные уравнения (2), (3), (2*) и (3*) сокращенно, в операторной форме:

$$\varphi = \lambda K\varphi + f, \quad \varphi = \lambda K\varphi,$$

$$\psi = \lambda K^*\psi + g, \quad \psi = \lambda K^*\psi,$$

где интегральные операторы K и K^* определяются ядрами $\mathcal{K}(x, y)$ и $\mathcal{K}^*(x, y)$ соответственно (см. § 1.10):

$$(Kf)(x) = \int_0^1 \mathcal{K}(x, y) f(y) dy,$$

$$(K^*f)(x) = \int_0^1 \mathcal{K}^*(x, y) f(y) dy.$$

К интегральным операторам и уравнениям применимы все определения и факты, изложенные в §§ 1.10—1.12. Кроме того, оказывается полезным следующее определение: то комплексное значение λ , при котором однородное интегральное уравнение (3) имеет ненулевые решения из $\mathcal{L}_2(G)$, называется характеристическим числом ядра $\mathcal{K}(x, y)$, а соответствующие решения — собственными функциями этого ядра, соответствующими этому характеристическому числу. Таким образом, характеристические числа ядра $\mathcal{K}(x, y)$ и собственные значения оператора K взаимно обратны, а их собственные функции совпадают.

§ 17. Метод последовательных приближений

1. Интегральные уравнения с непрерывным ядром.

Предположим, что в интегральном уравнении (2) область G ограничена в R^1 , функция f непрерывна на замкнутой области G и ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно на $G \times G$ (такие ядра будем называть непрерывными).

Напомним определение норм в пространствах $\mathcal{L}_2(G)$ и $C(G)$ и скалярного произведения в $\mathcal{L}_2(G)$ (см. §§ 1.3 и 1.7):

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx, \quad f, g \in \mathcal{L}_2(G);$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx} = \sqrt{(f, f)}, \quad f \in \mathcal{L}_2(G);$$

$$\|f\|_C = \max_{x \in G} |f(x)|, \quad f \in C(G).$$

Лемма. Интегральный оператор K с непрерывным ядром $\mathcal{K}(x, y)$ переводит $\mathcal{L}_2(G)$ в $C(\bar{G})$ и, следовательно, $C(\bar{G})$ в $C(\bar{G})$ и $\mathcal{L}_2(G)$ в $\mathcal{L}_2(G)$ и ограничен, причем

$$\|Kf\|_C \leq M\sqrt{V}\|f\|, \quad f \in \mathcal{L}_2(G), \quad (4)$$

$$\|Kf\|_C \leq MV\|f\|_C, \quad f \in C(\bar{G}), \quad (5)$$

$$\|Kf\| \leq MV\|f\|, \quad f \in \mathcal{L}_2(G), \quad (6)$$

где

$$M = \max_{x \in \bar{G}, y \in \bar{G}} |\mathcal{K}(x, y)|, \quad V = \int_G dy.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{L}_2(G)$. Тогда f — абсолютно интегрируемая функция на G (см. § 1.7) и, поскольку ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно на $G \times G$, функция $(Kf)(x)$ непрерывна на G . Поэтому оператор K переводит $\mathcal{L}_2(G)$ в $C(\bar{G})$ и, в силу неравенства Коши — Буняковского, ограничен:

$$\begin{aligned} \|Kf\|_C &= \max_{x \in \bar{G}} |(Kf)(x)| = \max_{x \in \bar{G}} \left| \int_G \mathcal{K}(x, y) f(y) dy \right| \leq \\ &\leq \max_{x \in \bar{G}} \sqrt{\int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy} \sqrt{\int_G |f(y)|^2 dy} \leq M\sqrt{V}\|f\|. \end{aligned}$$

Аналогично, проще, доказываются неравенства (5) и (6). Лемма доказана.

Для того чтобы интегральный оператор K с непрерывным ядром $\mathcal{K}(x, y)$ был нулевым в $\mathcal{L}_2(G)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{K}(x, y) = 0$, $x \in G$, $y \in G$.

Достаточность условия очевидна, а необходимость вытекает из леммы де Буа-Реймона (см. § 5.6): если при всех $f \in \mathcal{L}_2(G)$

$$(Kf)(x) = \int_G \mathcal{K}(x, y) f(y) dy = 0, \quad x \in G,$$

то

$$\mathcal{K}(x, y) = 0, \quad x \in G, \quad y \in G.$$

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между непрерывными ядрами и соответствующими им интегральными операторами.

Аналогично доказывается такое утверждение: если $(Kf, g) = 0$ при всех f и g из $\mathcal{L}_2(G)$, то $K = 0$ и, стало быть, $\mathcal{K}(x, y) = 0$.

Будем искать решение уравнения (2) методом последовательных приближений, положив $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$,

$$\varphi^{(p)}(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y) \varphi^{(p-1)}(y) dy + f(x) = \lambda K \varphi^{(p-1)} + f, \quad (7)$$

$$p = 1, 2, \dots$$

Докажем, что

$$\varphi^{(p)} = \sum_{k=0}^p \lambda^k K^k f, \quad p = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

где K^k — степени оператора K (см. § 1.10).

Действительно, при $p = 0$ формула (8) верна: $\varphi^{(0)} = f$. Предполагая эту формулу верной при p и заменяя в рекуррентной последовательности (7) p на $p+1$, получаем формулу (8) при $p+1$:

$$\begin{aligned} \varphi^{(p+1)} &= \lambda K \varphi^{(p)} + f = \\ &= \lambda K \sum_{k=0}^p \lambda^k K^k f + f = f + \sum_{k=0}^p \lambda^{k+1} K^{k+1} f = \sum_{k=0}^{p+1} \lambda^k K^k f. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (8) верна при всех p .

Функции $(K^p f)(x)$, $p = 0, 1, \dots$, называются итерациями функции f .

По лемме § 17.1 итерации f непрерывны на G и в силу (5) удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} \|K^p f\|_C &= \|K(K^{p-1} f)\|_C \leq MV \|K^{p-1} f\|_C \leq \\ &\leq (MV)^2 \|K^{p-2} f\|_C \leq \dots \leq (MV)^p \|f\|_C, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|K^p f\|_C \leq (MV)^p \|f\|_C, \quad p = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Из этой оценки следует, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x), \quad x \in G, \quad (10)$$

называемый рядом Неймана, мажорируется числовым рядом

$$\|f\|_C \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k (MV)^k = \frac{\|f\|_C}{1 - |\lambda| MV}, \quad (11)$$

сходящимся в круге $|\lambda| < \frac{1}{MV}$. Поэтому при этих λ ряд (10) сходится регулярно (см. § 1.3) по $x \in G$, определяя

тем самым непрерывную на G функцию $\varphi(x)$. Это значит, в силу (8), что последовательные приближения $\varphi^{(p)}(x)$ при $p \rightarrow \infty$ равномерно стремятся к функции $\varphi(x)$:

$$\varphi^{(p)}(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x), \quad p \rightarrow \infty, \quad (12)$$

причем, в силу (11), справедлива оценка

$$\|\varphi\| \leq \frac{\|f\|}{1 - |\lambda| MV}. \quad (13)$$

Докажем, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (2). Действительно, переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$ в рекуррентном соотношении (7) и пользуясь равномерной сходимостью последовательности $\varphi^{(p)}(x)$ к $\varphi(x)$ на G , получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi^{(p)}(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y) \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi^{(p-1)}(y) dy + f(x) = \\ &= \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x). \end{aligned}$$

Докажем единственность решения уравнения (2) в классе $\mathcal{L}_2(G)$, если $|\lambda| < \frac{1}{MV}$. Для этого достаточно показать, что однородное уравнение (3) имеет только нулевое решение в этом классе (см. § 1.11). Действительно, если $\varphi_0 \in \mathcal{L}_2(G)$ — решение уравнения (3), $\varphi_0 = \lambda K \varphi_0$, то, по лемме § 17.1,

$$\|\varphi_0\| \leq |\lambda| MV \|\varphi_0\|,$$

откуда, благодаря неравенству $|\lambda| MV < 1$, следует $\|\varphi_0\| = 0$, т. е. $\varphi_0 = 0$, что и требовалось установить.

Резюмируем полученные результаты в следующей теореме.

Теорема. Всякое интегральное уравнение Фредгольма (2) с непрерывным ядром $\mathcal{K}(x, y)$ при $|\lambda| < \frac{1}{MV}$ имеет единственное решение φ в классе $C(\bar{G})$ для любого свободного члена $f \in C(\bar{G})$. Это решение представляется в виде регулярно сходящегося на $\bar{G}$ ряда Неймана (12) и удовлетворяет оценке (13). Другими словами, в круге $|\lambda| < \frac{1}{MV}$ существует и ограничен обратный оператор $(I - \lambda K)^{-1}$.

Замечание. Методом последовательных приближений можно пользоваться для приближенного решения интегрального уравнения (2) при достаточно малых $|\lambda|$.

2. Повторные ядра. Резольвента. Предварительно убедимся в справедливости равенства

$$(Kf, g) = (f, K^*g), \quad f \text{ и } g \in \mathcal{L}_2(G). \quad (14)$$

Действительно, если f и $g \in \mathcal{L}_2(G)$, то, по лемме § 17.1, Kf и $K^*g \in \mathcal{L}_2(G)$, и поэтому

$$\begin{aligned} (Kf, g) &= \int_G (Kf) \bar{g} dx = \int_G \left[\int_G \mathcal{K}(x, y) f(y) dy \right] \bar{g}(x) dx = \\ &= \int_G f(y) \left[\int_G \mathcal{K}(x, y) \bar{g}(x) dx \right] dy = \int_G f \bar{K^*g} dy = (f, K^*g). \end{aligned}$$

Лемма. Если K_i , $i=1, 2$, — интегральные операторы с непрерывными ядрами $\mathcal{K}_i(x, y)$ соответственно, то оператор $K_2 = K_2 K_1$ — интегральный с непрерывным ядром

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \int_G \mathcal{K}_2(x, y') \mathcal{K}_1(y', y) dy'. \quad (15)$$

При этом справедлива формула

$$(K_2 K_1)^* = K_1^* K_2^*. \quad (16)$$

Доказательство. При всех $f \in \mathcal{L}_2(G)$ имеем

$$\begin{aligned} (K_2 f)(x) &= (K_2 K_1 f)(x) = \\ &= \int_G \mathcal{K}_2(x, y') \int_G \mathcal{K}_1(y', y) f(y) dy dy' = \\ &= \int_G \left[\int_G \mathcal{K}_2(x, y') \mathcal{K}_1(y', y) dy' \right] f(y) dy, \end{aligned}$$

откуда и вытекает формула (14). Очевидно, ядро $\mathcal{K}_2(x, y)$ непрерывно при $x \in G$, $y \in G$.

Принимая во внимание равенство (14), при всех f и $g \in \mathcal{L}_2(G)$ получаем

$$(f, K_2^* g) = (K_2 f, g) = (K_2 K_1 f, g) = (K_1 f, K_2^* g) = (f, K_1^* K_2^* g),$$

т. е.

$$(f, K_2^* g - K_1^* K_2^* g) = 0,$$

и, следовательно, $K_2^* = K_1^* K_2^*$, что и эквивалентно равенству (16). Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что операторы $K^p = K(K^{p-1}) = (K^{p-1})K$, $p=2, 3, \dots$, — интегральные и их ядра $\mathcal{K}_p(x, y)$ непрерывны и удовлетворяют рекуррентным соотношениям: $\mathcal{K}_1(x, y) = \mathcal{K}(x, y)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_p(x, y) &= \int_G \mathcal{K}(x, y') \mathcal{K}_{p-1}(y', y) dy' = \\ &= \int_G \mathcal{K}_{p-1}(x, y') \mathcal{K}(y', y) dy'. \quad (17)\end{aligned}$$

Ядра $\mathcal{K}_p(x, y)$ называются повторными ядрами ядра $\mathcal{K}(x, y)$.

Из рекуррентных соотношений (17) вытекает, что повторные ядра удовлетворяют неравенству

$$|\mathcal{K}_p(x, y)| \leq M^p V^{p-1}, \quad p=1, 2, \dots \quad (18)$$

Из оценки (18) следует, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x, y), \quad x \in G, \quad y \in G, \quad (19)$$

мажорируется числовым рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k M^{k+1} V^k,$$

сходящимся в круге $|\lambda| < \frac{1}{MV}$. Поэтому ряд (19) сходится регулярно при $x \in G$, $y \in G$, $|\lambda| < \frac{1}{MV} - \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Следовательно, его сумма непрерывна в $G \times G \times U$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < \frac{1}{MV}$. Обозначим сумму ряда (19) через $\mathcal{R}(x, y, \lambda)$:

$$\mathcal{R}(x, y, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x, y).$$

Функция $\mathcal{R}(x, y, \lambda)$ называется резольвентой ядра $\mathcal{K}(x, y)$.

Теорема. Решение φ интегрального уравнения (2) с непрерывным ядром $\mathcal{K}(x, y)$ единственно в классе $C(\bar{G})$ при $|\lambda| < \frac{1}{MV}$ и для любого $f \in C(\bar{G})$ представляется через

резольвенту $\mathcal{R}(x, y, \lambda)$ ядра $\mathcal{K}(x, y)$ по формуле

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_G \mathcal{R}(x, y, \lambda) f(y) dy. \quad (20)$$

Другими словами, справедливо операторное равенство

$$(I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda R, \quad |\lambda| < \frac{1}{MV}, \quad (21)$$

где R — интегральный оператор с ядром $\mathcal{R}(x, y, \lambda)$.

Доказательство. По теореме § 17.1 решение φ уравнения (2) единственно в классе $C(\bar{G})$ при $|\lambda| < \frac{1}{MV}$ и для любой $f \in C(\bar{G})$ представляется в виде равномерно сходящегося ряда Неймана (12). Подставляя в этот ряд выражения итераций $K^k f$ через повторные ядра $\mathcal{K}_k(x, y)$ и пользуясь равномерной сходимостью ряда (19) для резольвенты $\mathcal{R}(x, y, \lambda)$, получаем формулу (20):

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_G \left[\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x, y) \right] f(y) dy + f(x) = \\ &= \lambda \int_G \mathcal{R}(x, y, \lambda) f(y) dy + f(x).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Докажем, что повторные ядра $(K^*)^p(x, y)$ и резольвента $\mathcal{R}^*(x, y, \lambda)$ эрмитово сопряженного ряда $\mathcal{K}^*(x, y)$ выражаются через повторные ядра $\mathcal{K}_p(x, y)$ и резольвенту исходного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ по формулам

$$(\mathcal{K}^*)^p(x, y) = \mathcal{K}_p^*(x, y), \quad p=1, 2, \dots, \quad (22)$$

$$\mathcal{R}^*(x, y, \lambda) = \overline{\mathcal{R}(y, x, \bar{\lambda})}, \quad |\lambda| < \frac{1}{MV}. \quad (23)$$

Равенство (22) следует из формулы (16), согласно которой

$$(\mathcal{K}^*)^p = (\mathcal{K}^p)^*, \quad p=1, 2, \dots$$

Так как $|\mathcal{K}^*(x, y)| = |\mathcal{K}(y, x)| \leq M$, то, по доказанному, ряд (19) для резольвенты $\mathcal{R}^*(x, y, \lambda)$ ядра $\mathcal{K}^*(x, y)$ сходится при $x \in G$, $y \in G$, $|\lambda| < \frac{1}{MV}$. Отсюда, пользуясь

равенством (22), получаем формулу (23):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n(x, y; \lambda) &= \sum_{k=0}^n \lambda^k (\mathcal{R}^*)_{k+1}(x, y) = \sum_{k=0}^n \lambda^k \mathcal{R}_{k+1}^*(x, y) = \\ &= \sum_{k=0}^n \lambda^k \mathcal{R}_{k+1}^*(y, x) = \sum_{k=0}^n \bar{\lambda}^k \mathcal{R}_{k+1}^*(y, x) = \mathcal{R}^*(y, x; \bar{\lambda}). \end{aligned}$$

Из (23) получаем

$$\mathcal{R}_n(x, y; \bar{\lambda}) = \mathcal{R}^*(y, x; \bar{\lambda}) = \mathcal{R}^*(x, y; \lambda), \quad |\lambda| < \frac{1}{M\bar{V}}.$$

и, следовательно, в силу (21) справедлива формула

$$(I - \bar{\lambda} \mathcal{R}^*)^{-1} = I + \bar{\lambda} \mathcal{R}^*, \quad |\bar{\lambda}| < \frac{1}{M\bar{V}}. \quad (21^*)$$

Замечание. Можно доказать, что резольвента $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ непрерывного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ допускает мероморфное продолжение на всю плоскость комплексного переменного λ , причем полюсами ее являются характеристические числа ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Это предложение ниже будет доказано для вырожденных и для эрмитовых ядер.

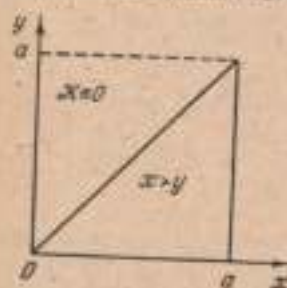


Рис. 68.

3. Интегральные уравнения Вольтерра. Пусть $n=1$, область G есть интервал $(0, a)$ и ядро $\mathcal{K}(x, y)$ обращается в нуль в треугольнике $0 < x < y < a$ (рис. 68). Такое ядро называется *ядром Вольтерра*. Интегральные уравнения (1) и (2) с ядром Вольтерра принимают вид

$$\int_0^x \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^x \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (24)$$

и называются *интегральными уравнениями Вольтерра* первого и второго родов соответственно.

Интегральные уравнения Вольтерра первого рода дифференцированием сводятся к уравнениям второго рода

$$\mathcal{K}(x, x) \varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial \mathcal{K}(x, y)}{\partial x} \varphi(y) dy = f'(x).$$

если $\mathcal{K}(x, y)$ и $\mathcal{K}_x(x, y)$ непрерывны при $0 \leq y \leq x \leq a$, $\mathcal{K}(x, x) \neq 0$, $x \in [0, a]$, $f \in C^1([0, a])$ и $f(0) = 0$. Интегральные уравнения Вольтерра первого рода здесь рассматриваться не будут.

Предположим, что в интегральном уравнении (24) $f \in C([0, a])$ и ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом треугольнике $0 \leq y \leq x \leq a$ (см. рис. 68). В таком случае $|\mathcal{K}(x, y)| \leq M$ и интегральный оператор

$$(Kf)(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x, y) f(y) dy$$

переводит $C([0, a])$ в $C([0, a])$.

Как и для уравнения Фредгольма (см. § 17.1), определим последовательные приближения $\varphi^{(p)}$ по формуле:

$$\varphi^{(0)} = f, \quad \varphi^{(p)} = \sum_{k=0}^p \lambda^k K^k f = \lambda K \varphi^{(p-1)} + f, \quad p = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Итерации $K^p f \in C([0, a])$ и удовлетворяют оценке

$$|(K^p f)(x)| \leq \|f\|_C \frac{(M\lambda)^p}{p!}, \quad x \in [0, a], \quad p = 0, 1, \dots \quad (26)$$

Докажем оценку (26) по индукции по p . Для $p=0$ оценка (26) верна. Предполагая ее верной при $p-1$, докажем ее для p :

$$\begin{aligned} |(K^p f)(x)| &= |K(K^{p-1} f)| = \left| \int_0^x \mathcal{K}(x, y) (K^{p-1} f)(y) dy \right| \leq \\ &\leq M \|f\|_C M^{p-1} \int_0^x \frac{y^{p-1}}{(p-1)!} dy = \|f\|_C \frac{(M\lambda)^p}{p!}. \end{aligned}$$

Из оценки (26) вытекает, что ряд Неймана (10) мажорируется на $[0, a]$ сходящимся числовым рядом

$$\|f\|_C \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \frac{(Ma)^k}{k!} = \|f\|_C e^{|\lambda| Ma} \quad (27)$$

и потому сходится регулярно по x на $[0, a]$ при любом λ , определяя непрерывную функцию $\varphi(x)$. Таким образом, в силу (25) последовательные приближения $\varphi^{(p)}$ при $p \rightarrow \infty$

равномерно стремятся к функции φ :

$$\varphi^{(p)}(x) \xrightarrow{x \in [0, a]} \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x), \quad p \rightarrow \infty, \quad (28)$$

При этом, в силу (27), справедлива оценка

$$\|\varphi\|_C \leq \|f\|_C e^{\lambda \|M\|}. \quad (29)$$

Переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$ в рекуррентном соотношении (25) и пользуясь равномерной сходимостью последовательности $\varphi^{(p)}$ к φ на $[0, a]$, заключаем, что построенная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (24).

Докажем единственность решения уравнения (24) в классе $C([0, a])$ при любом λ . Для этого достаточно показать, что соответствующее однородное уравнение имеет в этом классе только нулевое решение (см. § 1.11). Действительно, если φ_0 — решение однородного уравнения (24), $\varphi_0 = \lambda K \varphi_0$, то

$$\varphi_0 = \lambda K (\lambda K \varphi_0) = \lambda^2 K^2 \varphi_0 = \dots = \lambda^p K^p \varphi_0, \quad p = 1, 2, \dots$$

Применяя к этим равенствам оценку (26):

$$\|\varphi_0(x)\| = \|\lambda^p K^p \varphi_0\| \leq \|\lambda^p\| \|\varphi_0\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

и устремляя p к ∞ , получаем $\varphi_0(x) = 0$, $x \in [0, a]$, что и утверждалось.

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема. Всякое интегральное уравнение Вольтерра (24) с непрерывным ядром $\mathcal{K}(x, y)$ при любом λ имеет единственное решение φ в классе $C([0, a])$ для любого свободного члена $f \in C([0, a])$. Это решение представляется регулярно сходящимся рядом Неймана (28) и удовлетворяет оценке (29).

Следствие. Непрерывное ядро Вольтерра не имеет характеристических чисел.

4. Интегральные уравнения с полярным ядром. Ядро

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{\mathcal{K}^*(x, y)}{|x-y|^\alpha}, \quad \alpha < n,$$

где $\mathcal{K}^*(x, y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$, называется полярным ядром; если $\alpha < \frac{n}{2}$, то $\mathcal{K}(x, y)$ называется слабо полярным ядром.

Для того чтобы ядро $\mathcal{K}(x, y)$ было полярным, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывным при $x \neq y$, $x \in G$, $y \in G$ и удовлетворяло оценке

$$|\mathcal{K}(x, y)| \leq \frac{A}{|x-y|^\alpha}, \quad \alpha < n, \quad x \in G, y \in G.$$

Действительно, необходимость условия очевидна, а достаточность следует из представления

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{\mathcal{K}^*(x, y) |x-y|^{n-\alpha}}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \varepsilon < n - \alpha,$$

где функция

$$\mathcal{K}^*(x, y) = \mathcal{K}(x, y) |x-y|^{n-\alpha}$$

непрерывна на $\bar{G} \times \bar{G}$.

Лемма 1. Интегральный оператор K с полярным ядром $\mathcal{K}(x, y)$ переводит $C(\bar{G})$ в $C(\bar{G})$, $\mathcal{L}_2(G)$ в $\mathcal{L}_2(G)$ и ограничен:

$$\|Kf\|_C \leq N \|f\|_C, \quad f \in C(\bar{G}), \quad (30)$$

$$\|Kf\| \leq \sqrt{NN^*} \|f\|, \quad f \in \mathcal{L}_2(G), \quad (31)$$

где

$$N = \max_{x \in \bar{G}} \int_{\bar{G}} |\mathcal{K}(x, y)| dy, \quad N^* = \max_{y \in \bar{G}} \int_{\bar{G}} |\mathcal{K}^*(x, y)| dy.$$

Доказательство. Пусть $f \in C(\bar{G})$. Тогда функция

$$(Kf)(x) = \int_{\bar{G}} \mathcal{K}(x, y) f(y) dy = \int_{\bar{G}} \frac{\mathcal{K}^*(x, y)}{|x-y|^\alpha} f(y) dy$$

непрерывна на $\bar{G}$ (см. § 1.6), так что оператор K переводит $C(\bar{G})$ в $C(\bar{G})$ и справедливо неравенство (30):

$$\begin{aligned} \|Kf\|_C &= \max_{x \in \bar{G}} \left| \int_{\bar{G}} \mathcal{K}(x, y) f(y) dy \right| \leq \\ &\leq \|f\|_C \max_{x \in \bar{G}} \int_{\bar{G}} |\mathcal{K}(x, y)| dy = N \|f\|_C. \end{aligned}$$

Пусть $f \in \mathcal{L}_2(G)$. Пользуясь неравенством Коши — Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} \|Kf\|^2 &= \int_G |Kf|^2 dx = \int_G \left| \int_G \mathcal{K}(x, y) f(y) dy \right|^2 dx \leq \\ &\leq \int_G \left[\int_G V |\mathcal{K}(x, y)| V |\mathcal{K}(x, y)| |f(y)| dy \right]^2 dx \leq \\ &\leq \int_G \left[\int_G |\mathcal{K}(x, y')| dy' \int_G |\mathcal{K}(x, y)| |f(y)|^2 dy \right] dx \leq \\ &\leq N \int_G |f(y)|^2 \int_G |\mathcal{K}(x, y)| dx dy \leq \\ &\leq NN^* \int_G |f(y)|^2 dy = NN^* \|f\|^2, \end{aligned}$$

откуда следует, что оператор K переводит $\mathcal{L}_2(G)$ в $\mathcal{L}_2(G)$ и справедливо неравенство (31).

Лемма доказана.

Пользуясь доказанной леммой и повторяя рассуждения § 17.1, заключаем, что теорема § 17.1 остается справедливой и для интегрального уравнения (2) с полярным ядром $\mathcal{K}(x, y)$ в ограниченной области $G \times G$ с заменой MV на N : если $|\lambda| < \frac{1}{N}$, то в классе $C(\bar{G})$ существует единственное решение для любой $f \in C(\bar{G})$ и это решение представляется рядом Неймана, регулярно сходящимся на $\bar{G}$.

Лемма 2. Если $\mathcal{K}_i(x, y)$ — полярные ядра,

$$|\mathcal{K}_i(x, y)| \leq \frac{A_i}{|x-y|^{\alpha_i}}, \quad \alpha_i < n, \quad i=1, 2,$$

и область G ограничена, то ядро

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \int_G \mathcal{K}_1(x, y') \mathcal{K}_1(y', y) dy'$$

— также полярное, причем

$$\left. \begin{aligned} |\mathcal{K}_2(x, y)| &\leq \frac{A_2}{|x-y|^{\alpha_1+\alpha_2-n}}, & \text{если } \alpha_1+\alpha_2 > n, \\ |\mathcal{K}_2(x, y)| &\leq A_4 |\ln|x-y|| + A_2, & \text{если } \alpha_1+\alpha_2 = n; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$\mathcal{K}_2(x, y)$ непрерывно на $\bar{G} \times \bar{G}$, если $\alpha_1+\alpha_2 < n$.

Доказательство. Представляя полярные ядра $\mathcal{K}_i(x, y)$ в виде

$$\mathcal{K}_i(x, y) = \frac{\mathcal{K}_i(x, y)}{|x-y|^{\alpha_i+\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < n - \alpha_i,$$

где $\mathcal{K}_i(x, y)$ — непрерывные функции на $\bar{G} \times \bar{G}$, перепишем ядро $\mathcal{K}_2(x, y)$ в виде

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \int_G \frac{\mathcal{K}_1(x, y') \mathcal{K}_1(y', y)}{|x-y'|^{\alpha_1+\varepsilon} |y'-y|^{\alpha_1+\varepsilon}} dy'.$$

Если $\alpha_1+\alpha_2 < n$, то при $\varepsilon < \frac{1}{2}(n - \alpha_1 - \alpha_2)$, $\varepsilon > 0$

ядро $\mathcal{K}_2(x, y)$ непрерывно на $\bar{G} \times \bar{G}$ (см. § 1.6). Если же $\alpha_1+\alpha_2 \geq n$, то, рассуждая, как и в § 1.6, заключаем, что $\mathcal{K}_2(x, y)$ непрерывно при $x \neq y$, $x \in G$, $y \in G$.

Таким образом, для доказательства леммы осталось установить оценки (32) при $\alpha_1+\alpha_2 \geq n$. Принимая во внимание оценки для ядер $\mathcal{K}_i(x, y)$, имеем

$$|\mathcal{K}_2(x, y)| \leq A_1 A_2 \int_G \frac{dy'}{|x-y'|^{\alpha_1+\varepsilon} |y'-y|^{\alpha_1+\varepsilon}}, \quad x \in G, y \in G.$$

Переходя в этом интеграле к новым переменным интегрирования $\eta = x - y'$ и заменяя полученную область интегрирования на большую — шар U_D , где D — диаметр области G (рис. 69), выводим оценку

$$|\mathcal{K}_2(x, y)| \leq A_1 A_2 \int_{U_D} \frac{d\eta}{|\eta|^{\alpha_1+\varepsilon} |x-y-\eta|^{\alpha_1+\varepsilon}}.$$

Обозначая

$$|x-y|=r, \quad \frac{x-y}{r}=s, \quad |s|=1$$

и совершая в последнем интеграле замену переменных интегрирования $\eta = r\xi$, $d\eta = r^n d\xi$, получаем

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_2(x, y)| &\leq A_1 A_2 r^{n-\alpha_1-\alpha_2-\varepsilon} \int_{U_D} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_1+\varepsilon} |s-\xi|^{\alpha_1+\varepsilon}} = \\ &= A_1 A_2 r^{n-\alpha_1-\alpha_2-\varepsilon} \left(\int_{|\xi| \leq r} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_1+\varepsilon} |s-\xi|^{\alpha_1+\varepsilon}} + \int_{r < |\xi| \leq \frac{D}{r}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_1+\varepsilon} |s-\xi|^{\alpha_1+\varepsilon}} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

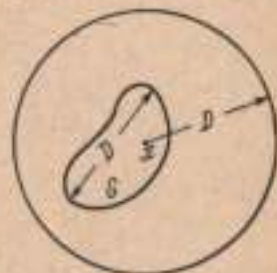


Рис. 69.

В силу $|s|=1$ интеграл в первом слагаемом представляет собой равномерно ограниченную величину

$$\int_{|z|<1} \frac{d\zeta}{|\zeta|^{\alpha_1} |s-\zeta|^{\alpha_2}} \leq A_4. \quad (34)$$

Учитывая при $|\zeta| > 2$ неравенство

$$|\zeta-s| \geq |\zeta|-|s| = |\zeta|-1 \geq \frac{1}{2}|\zeta|,$$

оценим второй интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{|z|<1} \frac{d\zeta}{|\zeta|^{\alpha_1} |s-\zeta|^{\alpha_2}} &\leq \\ &\leq 2^{\alpha_2} \int_{|z|<1} \frac{d\zeta}{|\zeta|^{\alpha_1+\alpha_2}} = 2^{\alpha_2} \sigma_n \int_0^1 \rho^{n-1-\alpha_1-\alpha_2} d\rho \leq \\ &\leq 2^{\alpha_2} \sigma_n \begin{cases} \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2-n}, & \text{если } \alpha_1+\alpha_2 > n; \\ \ln \frac{D}{r}, & \text{если } \alpha_1+\alpha_2 = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

Из оценок (33)–(35) и вытекают оценки (32). Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что все повторные ядра $\mathcal{K}_p(x, y)$ полярного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ — полярные и удовлетворяют оценкам

$$|\mathcal{K}_p(x, y)| \leq \begin{cases} A_p |x-y|^{-p\alpha-(p-1)n}, & \text{если } p\alpha-(p-1)n > 0; \\ A_p |\ln|x-y|| + B_p, & \text{если } p\alpha-(p-1)n = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Начиная же с номера $p_0 = \left[\frac{n}{\alpha} \right] + 1$ повторные ядра $\mathcal{K}_p(x, y)$ непрерывны. (Здесь $[t]$ обозначает целую часть числа $t \geq 0$.)

Отсюда, пользуясь леммой 1 § 17.4 и рассуждая, как в § 17.2, выводим, что резольвента полярного ядра $\mathcal{K}(x, y)$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x, y; \lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x, y) = \\ &= \mathcal{R}_1(x, y; \lambda) + \mathcal{R}_2(x, y; \lambda) \end{aligned} \quad (37)$$

представляет собой сумму двух слагаемых: полярного слагаемого

$$\mathcal{R}_1(x, y; \lambda) = \sum_{k=0}^{p_0-1} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x, y)$$

и непрерывного слагаемого

$$\mathcal{R}_2(x, y; \lambda) = \sum_{k=p_0-1}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x, y). \quad (38)$$

При этом ряд (38) сходится равномерно при $x \in G, y \in G, |\lambda| < \frac{1}{N} - \varepsilon$, при любом $\varepsilon > 0$, определяя непрерывную функцию $\mathcal{R}_2(x, y; \lambda)$ при $x \in G, y \in G, |\lambda| > \frac{1}{N}$ и аналитическую по λ в круге $|\lambda| < \frac{1}{N}$.

Из сказанного следует, что теорема § 17.2 остается справедливой для интегрального уравнения (2) с полярным ядром $\mathcal{K}(x, y)$ при условии, что $|\lambda| < \frac{1}{N}$. Далее, формулы (22), (23) и (21*) для $(\mathcal{K}^*)_p(x, y)$, $\mathcal{R}_p(x, y; \lambda)$ и $(I - \lambda \mathcal{K}^*)^{-1}$, очевидно, также сохраняются, если $|\lambda| < \frac{1}{N}$ и $|\lambda| < \frac{1}{N^*}$.

5. Упражнения. а) Доказать, что резольвента $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ непрерывного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма при $|\lambda| M V < 1$:

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y') \mathcal{R}(y', y; \lambda) dy' + \mathcal{K}(x, y).$$

б) Пусть ядро $\mathcal{K}(x, y)$ интегрального уравнения Фредгольма (2) принадлежит $\mathcal{L}_2(G \times G)$. Пользуясь оценкой (28) § 1.10, доказать сходимость в $\mathcal{L}_2(G)$ метода последовательных приближений для любой $f \in \mathcal{L}_2(G)$, если $|\lambda| C < 1$.

с) Доказать, что резольвента ядра Вольтерра аналитична по всей плоскости комплексного переменного λ (целая функция).

д) Пусть $\mathcal{K} \in C(x \geq 0)$, $\mathcal{K}(x) = 0, x < 0$. Доказать, что обобщенная функция

$$\delta(x) = \delta(x) + \mathcal{R}(x) \cdot \mathcal{R} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mathcal{K} * \mathcal{K} * \dots * \mathcal{K}}_{k \text{ раз}}$$

есть фундаментальное решение оператора $(\delta - \mathcal{K})$ в алгебре $\mathcal{D}'$ (см. §§ 7.7 и 7.8). При этом ряд для $\mathcal{R}(x)$ сходится равномерно в каждом конечном промежутке и удовлетворяет интегральному

уравнению Вольтерра

$$\mathcal{R}(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x-y) \mathcal{R}(y) dy + \mathcal{R}(x), \quad x \geq 0.$$

Функция $\mathcal{R}(x-y)$ является резольвентой ядра $\mathcal{K}(x-y)$ при $\lambda=1$.
 в) Доказать, что при $|\lambda| < 1$ интегральное уравнение Милна

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\infty} \mathcal{K}(x-y) \varphi(y) dy, \quad \mathcal{K}(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

имеет единственное решение $\varphi=0$ в классе ограниченных функций на $[0, \infty)$.

г) Доказать, что при $\lambda < 1/2$ решение интегрального уравнения $\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} \varphi(y) dy + f(x)$ единственно в классе ограниченных функций в R^1 и выражается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{1-2\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy.$$

д) Для интегрального оператора Павераса

$$K\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\pi|x-y|}}{|x-y|^2} \varphi(y) dy$$

доказать оценку $N = N^* \leq \frac{1}{\pi} (1 - e^{-\pi D})$, где D — диаметр области $G \subset R^1$.

§ 18. Теоремы Фредгольма

В этом параграфе для интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi = \lambda K\varphi + f \quad (1)$$

с непрерывным ядром $\mathcal{K}(x, y)$ и союзного к нему уравнения

$$\psi = \lambda K^* \psi + g \quad (1^*)$$

будут доказаны теоремы разрешимости Фредгольма.

1. Интегральные уравнения с вырожденным ядром.

Ядро

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^N f_i(x) g_i(y), \quad (2)$$

где f_i и $g_i \in C(G)$, называется *вырожденным ядром*.

Без ограничения общности можно считать, что системы функций $\{f_i, 1 \leq i \leq N\}$ и $\{g_i, 1 \leq i \leq N\}$ линейно независимы. Действительно, если это не так, то, например,

$$f_N(x) = c_1 f_1(x) + \dots + c_{N-1} f_{N-1}(x)$$

и ядро $\mathcal{K}(x, y)$, в силу (2), принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x, y) &= \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x) g_i(y) + \sum_{i=1}^{N-1} c_i f_i(x) g_N(y) = \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x) g_i^*(y), \\ g_i^*(y) &= g_i(y) + c_i g_N(y). \end{aligned}$$

Действуя подобным образом, через конечное число шагов добьемся того, что в представлении (2) системы функций $\{f_i\}$ и $\{g_i\}$ окажутся линейно независимыми.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром (2)

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^N f_i(x) \int_G g_i(y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (3)$$

и союзное к нему уравнение

$$\psi(x) = \lambda \sum_{i=1}^N \bar{g}_i(x) \int_G f_i(y) \psi(y) dy + g(x). \quad (3^*)$$

Решения φ и ψ интегральных уравнений (3) и (3*) будем искать в классе $C(G)$.

Покажем, что эти уравнения сводятся к системам линейных алгебраических уравнений и потому могут быть исследованы и решены известными методами линейной алгебры.

Перепишем уравнение (3) в виде

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_i f_i(x) + f(x), \quad (4)$$

где

$$c_i = \int_G \varphi(y) g_i(y) dy = (\varphi, \bar{g}_i) \quad (5)$$

— неизвестные числа. Умножая равенство (4) на $\bar{g}_k(x)$, интегрируя по области G и пользуясь (5), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений

для неизвестных чисел c_i ,

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^N c_i \int_a^b g_k(x) f_i(x) dx + \int_a^b g_k(x) f(x) dx.$$

Обозначая

$$\alpha_{ki} = \int_a^b g_k(x) f_i(x) dx, \quad a_k = \int_a^b f(x) g_k(x) dx = (f, g_k),$$

перепишем систему (6):

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_{ki} c_i + a_k, \quad k=1, 2, \dots, N.$$

Вводя матрицу A и векторы c и a :

$$A = (\alpha_{ki}), \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_N), \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_N),$$

представим систему (8) в матричной форме:

$$c = \lambda A c + a.$$

Докажем, что интегральное уравнение (3) и алгебраическое уравнение (9) эквивалентны. Действительно, если $\varphi \in C(\bar{G})$ — решение уравнения (3), то, как мы только что показали, числа $c_i = (\varphi, g_i)$, $i=1, 2, \dots, N$, удовлетворяют системе (8). Обратно, если числа c_i , $i=1, 2, \dots, N$, удовлетворяют системе (8), то функция $\varphi(x)$, построенная по формуле (4), непрерывна на $\bar{G}$ и, в силу (7), удовлетворяет уравнению (3):

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^N f_i(x) \int_a^b g_i(y) \varphi(y) dy - f(x) &= \lambda \sum_{i=1}^N c_i f_i(x) + \\ + f(x) - \lambda \sum_{i=1}^N f_i(x) \int_a^b g_i(y) \left[\lambda \sum_{k=1}^N c_k f_k(y) + f(y) \right] dy - f(x) &= \\ = \lambda \sum_{i=1}^N f_i(x) \left(c_i - \lambda \sum_{k=1}^N c_k \alpha_{ik} - a_i \right) &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим через $D(\lambda)$ определитель системы (9),

$$D(\lambda) = \det(I - \lambda A), \quad (10)$$

и через $M_{ki}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение матрицы $I - \lambda A$. Ясно, что $D(\lambda)$ и $M_{ki}(\lambda)$ — полиномы по λ , причем $D(0) \neq 0$, ибо $D(0) = \det I = 1$.

Пусть (комплексное) число λ таково, что $D(\lambda) \neq 0$. По теореме Крамера решение алгебраической системы (9) единственно и выражается формулой

$$c_k = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^N M_{ki}(\lambda) a_i, \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

Подставляя найденное решение (11) в формулу (4) и используя определение чисел a_k , получим решение интегрального уравнения (3) при $D(\lambda) \neq 0$ в виде

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{i,k=1}^N M_{ik}(\lambda) f_i(x) \int_a^b g_k(y) f(y) dy + f(x). \quad (12)$$

С другой стороны, по теореме § 17.2 при достаточно малом λ (и тогда $D(\lambda) \neq 0$) это решение выражается через резольвенту $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ по формуле (20) § 17.2. Следовательно,

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i,k=1}^N M_{ik}(\lambda) f_i(x) g_k(y). \quad (13)$$

Таким образом, резольвента $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ вырожденного ядра есть рациональная функция λ и, стало быть, допускает мероморфное продолжение на всю плоскость комплексного переменного λ (см. § 17.2, замечание).

4. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений вырожденным ядром. В предыдущем пункте мы получили в явном виде решение интегрального уравнения вырожденным ядром. Здесь мы продолжим исследование систем уравнений и установим условия их разрешимости. Как и уравнение (3), приведем союзное к нему уравнение (3*) к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений. Имеем

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^N d_i g_i(x) + g(x), \quad (4^*)$$

где $d_i = (\varphi, f_i)$ — неизвестные числа. Соответствующая система линейных алгебраических уравнений, эквивалентная уравнению (3*), имеет вид

$$d_k - \lambda \sum_{i=1}^N \beta_{ki} d_i + b_k, \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (8^*)$$

где

$$\beta_{ki} = \int_G f_k(x) \bar{e}_i(x) dx = \alpha_{ik}, \quad b_k = (g, f_k). \quad (7^*)$$

Таким образом, система (8*) — сожужная к системе (8):

$$d = \lambda A^* d + b, \quad (9^*)$$

где

$$A^* = (\beta_{ki}) = (\alpha_{ik}) = A', \quad d = (d_1, d_2, \dots, d_N),$$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_N).$$

Из курса линейной алгебры известно*), что определители и ранги матрицы и ее транспонированной совпадают. Поэтому, в силу (10),

$$\left. \begin{aligned} \det(I - \lambda A^*) &= \det(I - \lambda A') = \overline{\det(I - \lambda A)} = \overline{D(\lambda)}, \\ \text{rang}(I - \lambda A^*) &= \text{rang}(I - \lambda A') = \text{rang}(I - \lambda A) = q. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Могут представиться два случая.

I. $D(\lambda) \neq 0$. Тогда $q = N$ и системы (9) и (9*) однозначно разрешимы при любых a и b . Следовательно, уравнения (3) и (3*) также однозначно разрешимы при любых f и g и эти решения даются формулами (4) и (4*) соответственно.

II. $D(\lambda) = 0$. Тогда $q < N$ и, в силу (14), однородные системы (9) и (9*) имеют ровно по $N - q$ линейно независимых решений:

$$c^{(s)} = (c_1^{(s)}, c_2^{(s)}, \dots, c_N^{(s)}), \quad d^{(s)} = (d_1^{(s)}, d_2^{(s)}, \dots, d_N^{(s)}), \\ s = 1, 2, \dots, N - q.$$

Однородные интегральные уравнения (3) и (3*) будут также иметь ровно по $N - q$ линейно независимых решений, определяемых формулами (4) и (4*) соответственно:

$$\varphi_s(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_i^{(s)} f_i(x), \quad \psi_s(x) = \lambda \sum_{i=1}^N d_i^{(s)} g_i(x), \quad (15) \\ s = 1, 2, \dots, N - q.$$

*) Используемые здесь сведения из линейной алгебры содержатся, например, в книге Д. В. Беклемишева [1], гл. V.

Докажем линейную независимость полученных систем решений $\{\varphi_s, 1 \leq s \leq N - q\}$ и $\{\psi_s, 1 \leq s \leq N - q\}$. Пусть найдутся такие числа $p_s, s = 1, 2, \dots, N - q$, что

$$\sum_{s=1}^{N-q} p_s \varphi_s(x) = 0, \quad x \in G,$$

т. е., в силу (15),

$$\sum_{i=1}^N f_i(x) \sum_{s=1}^{N-q} c_i^{(s)} p_s = 0, \quad x \in G.$$

Отсюда, в силу линейной независимости системы функций $\{f_i, 1 \leq i \leq N\}$, вытекают равенства

$$\sum_{s=1}^{N-q} c_i^{(s)} p_s = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Поскольку система векторов $\{c^{(s)}, 1 \leq s \leq N - q\}$ линейно независима в R^N , то из последних равенств вытекает $p_s = 0, s = 1, 2, \dots, N - q$, что и доказывает линейную независимость системы решений $\{\varphi_s\}$. Аналогично устанавливается линейная независимость системы решений $\{\psi_s\}$.

Далее, для разрешимости системы (9) при $D(\lambda) = 0$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий ортогональности*):

$$(a, d^{(s)}) = \sum_{i=1}^N a_i d_i^{(s)} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, N - q. \quad (16)$$

Условия (16) эквивалентны условиям

$$(f, \psi_s) = \int_G f(x) \bar{\psi}_s(x) dx = 0, \quad s = 1, 2, \dots, N - q,$$

поскольку, в силу (15) и (7),

$$\int_G f(x) \bar{\psi}_s(x) dx = \\ = \lambda \sum_{i=1}^N \int_G f(x) g_i(x) dx d_i^{(s)} = \lambda \sum_{i=1}^N a_i d_i^{(s)} = \lambda (a, d^{(s)}).$$

Итак, доказаны следующие теоремы, называемые теоремами Фредгольма.

*) Это есть геометрическая форма теоремы Криникера — Капелли.

Теорема 1. Если $D(\lambda) \neq 0$, то уравнение (3) и связанное к нему уравнение (3*) однозначно разрешимы при любых свободных членах f и g .

Теорема 2. Если $D(\lambda) = 0$, то однородные уравнения (3) и (3*) имеют одинаковое число линейно независимых решений, равное $N - q$, где q — ранг матрицы $I - \lambda A$.

Теорема 3. Если $D(\lambda) = 0$, то для разрешимости уравнения (3) необходимо и достаточно, чтобы свободный член f был ортогонален ко всем решениям φ_s , $s = 1, 2, \dots, N - q$, связанного однородного уравнения (3*).

Из теорем 1 и 2 следует, что характеристические числа вырожденного ядра совпадают с корнями полинома $D(\lambda)$ и, следовательно, — их конечное число. Далее, из формулы (13) для резольвенты вытекает, что характеристические числа вырожденного ядра совпадают с полюсами его резольвенты (см. замечание § 17.2).

Замечание. Может оказаться, что функции f_1 и g_1 в представлении (2) вырожденного ядра зависят от комплексного параметра λ , а именно: пусть $f_1(x; \lambda)$ и $g_1(x; \lambda)$ непрерывны по (x, λ) в $G \times U_\omega$ и аналитичны по λ в круге U_ω . В этом случае теорема Фредгольма 1-3 остается справедливой при условии, что $|\lambda| < \omega$.

Докажем, что определитель $D(\lambda)$ — аналитическая функция в круге $|\lambda| < \omega$. Действительно, элементы матрицы A , вычисляемые по формуле (7):

$$a_{kl}(\lambda) = \int_G g_k(x; \lambda) f_l(x; \lambda) dx$$

— аналитические функции в круге $|\lambda| < \omega$. Поэтому, в силу (10), $D(\lambda)$ — аналитическая функция в этом круге, причем $D(\lambda) \neq 0$.

3. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с непрерывным ядром. Доказанные в предыдущем пункте теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденным ядром допускают распространение на интегральные уравнения с произвольным непрерывным ядром. Идея доказательства состоит в том, что непрерывное ядро представляется в виде суммы вырожденного ядра и достаточно малого непрерывного ядра. Это дает возможность, пользуясь результатами § 17 о разрешимости интегральных уравнений с малым ядром, свести соответствующее интегральное уравнение к интегральному уравнению с вырожденным ядром, для которого теоремы Фредгольма уже установлены. Отсюда будет следовать вывод о справедливости

ности теорем Фредгольма для интегральных уравнений с непрерывным ядром в ограниченной области.

Итак, пусть ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно на $G \times G$. По теореме Вейерштрасса (см. § 1.3) его можно приблизить сколь угодно точно полиномами, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такой полином

$$\mathcal{P}(x, y) = \sum_{0 \leq \alpha + \beta \leq N} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \quad (17)$$

что

$$|\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{P}(x, y)| < \varepsilon, \quad x \in G, y \in G.$$

Таким образом, ядро $\mathcal{K}(x, y)$ представляется в виде

$$\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{P}(x, y) + \mathcal{L}(x, y), \quad (18)$$

где $\mathcal{P}(x, y)$ — вырожденное ядро (полином) и $\mathcal{L}(x, y)$ — малое непрерывное ядро, $|\mathcal{L}(x, y)| < \varepsilon$, $x \in G, y \in G$.

В силу (18) интегральное уравнение Фредгольма принимает вид

$$\varphi = \lambda P\varphi + \lambda Q\varphi + f, \quad (19)$$

где P и Q — интегральные операторы с ядрами $\mathcal{P}(x, y)$ и $\mathcal{L}(x, y)$ соответственно, причем $P + Q = K$.

Покажем, что при $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon}$ в классе $C(\bar{G})$ интегральное уравнение (19) эквивалентно интегральному уравнению с вырожденным ядром. Для этого введем новую неизвестную функцию $\Phi(x)$ по формуле

$$\Phi = \varphi - \lambda Q\varphi. \quad (20)$$

По теореме § 17.2 функция φ однозначно выражается через Φ по формуле

$$\varphi = (I - \lambda Q)^{-1} \Phi = (I + \lambda R) \Phi, \quad (21)$$

где R — интегральный оператор с ядром $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ — резольвентой ядра $\mathcal{L}(x, y)$. В силу (20) и (21) уравнение (19) принимает следующий эквивалентный вид:

$$\Phi = \lambda P(I + \lambda R) \Phi + f = \lambda T \Phi + f, \quad (22)$$

где

$$T = P + \lambda PR. \quad (23)$$

Вспомним, что резольвента $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ непрерывна по (x, y, λ) в $G \times G \times U_\omega$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon}$.

$< \frac{1}{\varepsilon V}$ (см. § 17.2). Отсюда, принимая во внимание лемму § 17.2, заключаем, что оператор T — интегральный с непрерывным ядром

$$\mathcal{T}(x, y; \lambda) = \mathcal{T}(x, y) + \lambda \int_D \mathcal{T}(x, y') \mathcal{R}(y', y; \lambda) dy'.$$

Далее, из (17) вытекает, что $\mathcal{T}(x, y; \lambda)$ — вырожденное и аналитическое по λ в круге $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon V}$.

Теперь преобразуем союзное интегральное уравнение (1*). В силу (18) $K^* = P^* + Q^*$, и поэтому уравнение (1*) принимает вид

$$(I - \bar{\lambda} Q^*) \psi = \bar{\lambda} P^* \psi + g. \quad (19^*)$$

Применяя оператор $(I - \bar{\lambda} Q^*)^{-1}$ к уравнению (19*) и пользуясь равенством (21*) § 17.2,

$$(I - \bar{\lambda} Q^*)^{-1} = I + \bar{\lambda} R^*, \quad |\lambda| < \frac{1}{\varepsilon V},$$

приведем его к эквивалентному уравнению

$$\begin{aligned} \psi &= (I - \bar{\lambda} Q^*)^{-1} (\bar{\lambda} P^* \psi + g) = (I + \bar{\lambda} R^*) (\bar{\lambda} P^* \psi + g) = \\ &= \bar{\lambda} (P^* + \bar{\lambda} R^* P^*) \psi + (I + \bar{\lambda} R^*) g. \end{aligned} \quad (24)$$

Обозначая

$$g_1 = (I + \bar{\lambda} R^*) g, \quad g = (I - \bar{\lambda} Q^*) g_1 \quad (25)$$

и учитывая, что, согласно формулам (16) § 17.2 и (23),

$$P^* + \bar{\lambda} R^* P^* = (P + \lambda P R)^* = T^*,$$

перепишем уравнение (24) в виде

$$\psi = \bar{\lambda} T^* \psi + g_1. \quad (22^*)$$

Таким образом, при $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon V}$ в классе $C(\bar{G})$ интегральное уравнение (1) эквивалентно интегральному уравнению (22) с вырожденным ядром $\mathcal{T}(x, y; \lambda)$, аналитическим в круге $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon V}$, а союзное к нему уравнение (1*) эквивалентно уравнению (22*), союзному к уравнению (22). Но для уравнений (22) и (22*) справедливы теоремы Фредгольма 1–3 и определитель $D(\lambda)$ — аналитическая функция в круге $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon V}$ (см. § 18.2, замечание). Отсюда,

пользуясь эквивалентностью этих уравнений исходным уравнениям (1) и (1*), получаем следующие теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с непрерывным ядром. Совокупность этих теорем называется *альтернативой Фредгольма*.

Альтернатива Фредгольма. Если интегральное уравнение (1) с непрерывным ядром разрешимо в $C(\bar{G})$ при любом свободном члене $f \in C(\bar{G})$, то и союзное к нему уравнение (1*) разрешимо в $C(\bar{G})$ при любом свободном члене $g \in C(\bar{G})$, причем эти решения единственны (первая теорема Фредгольма).

Если интегральное уравнение (1) разрешимо в $C(\bar{G})$ не при любом свободном члене f , то

1) однородные уравнения (1) и (1*) имеют одинаковое (конечное) число линейно независимых решений (вторая теорема Фредгольма);

2) для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы свободный член f был ортогонален ко всем решениям союзного однородного уравнения (1*) (третья теорема Фредгольма).

Доказательство. При $\lambda = 0$ альтернатива Фредгольма, очевидно, справедлива. Поэтому считаем $\lambda \neq 0$ и в предыдущих построениях выберем $\varepsilon < \frac{1}{|\lambda| V}$.

Пусть уравнение (1) разрешимо в $C(\bar{G})$ при любом $f \in C(\bar{G})$. Тогда эквивалентное ему уравнение (22) с вырожденным ядром также будет разрешимо в $C(\bar{G})$ при любом f . Отсюда, применяя теорему 3 § 18.2, заключаем, что $D(\lambda) \neq 0$. А тогда, по теореме 1 § 18.2, уравнение (22) и союзное к нему уравнение (22*) однозначно разрешимы при любых f и g_1 из $C(\bar{G})$. Но функции g_1 и g взаимно однозначно выражаются по формулам (25). Следовательно, эквивалентные уравнения (1) и (1*) однозначно разрешимы в $C(\bar{G})$ при любых f и g . Первая теорема Фредгольма доказана.

Если уравнение (1) разрешимо в $C(\bar{G})$ не при любом f , то и эквивалентное ему уравнение (22) с вырожденным ядром также разрешимо в $C(\bar{G})$ не при любом f . Отсюда, по теореме 1 § 18.2, заключаем, что $D(\lambda) = 0$. Но тогда, по теореме 2 § 18.2, однородные уравнения (22) и (22*) имеют одинаковое (конечное) число линейно независимых решений в $C(\bar{G})$. Поскольку функции Φ и ψ связаны

соотношениями (20), то и эквивалентные им однородные уравнения (1) и (1*) имеют одинаковое (конечное) число линейно независимых решений в $C(\bar{G})$ (см. § 1.11). Вторая теорема Фредгольма доказана.

Далее, по теореме 3 § 18.2, для разрешимости уравнения (22) при $D(\lambda) \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы свободный член f был ортогонален ко всем решениям сопряженного однородного уравнения (22*). Но решения ψ эквивалентных однородных уравнений (1*) и (22*), равно как и правые части f эквивалентных уравнений (1) и (22), одни и те же. Следовательно, для разрешимости уравнения (1) в рассматриваемом случае необходимо и достаточно, чтобы свободный член f был ортогонален ко всем решениям сопряженного однородного уравнения (1*). Третья теорема Фредгольма доказана.

Докажем теперь четвертую теорему Фредгольма:

В каждом круге $|\lambda| \leq R$ может находиться лишь конечное число характеристических чисел ядра $\mathcal{K}(x, y)$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon = \frac{1}{(R+1)V}$. Тогда при $|\lambda| < R+1$ будет $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon V}$. Поэтому при $|\lambda| < R+1$ однородные уравнения (1) и (22) эквивалентны. Следовательно, в круге $|\lambda| < R+1$ характеристические числа ядра $\mathcal{K}(x, y)$ совпадают с корнями уравнения $D(\lambda) = 0$ (см. § 18.2). Поскольку ядро $\mathcal{K}(x, y; \lambda)$ аналитично по λ в круге $|\lambda| < R+1$, то $D(\lambda)$ — аналитическая функция в этом круге (см. § 18.2, замечание). Отсюда по свойству единственности аналитических функций*) заключаем, что в круге $|\lambda| \leq R$ может находиться лишь конечное число корней уравнения $D(\lambda) = 0$, а значит, и ядро $\mathcal{K}(x, y)$ может иметь только конечное число характеристических чисел. Теорема доказана.

4. Следствия из теорем Фредгольма. Из четвертой теоремы Фредгольма следует, что множество характеристических чисел непрерывного ядра не имеет конечных предельных точек и, значит, не более чем счетно. (Это множество может быть и пустым, как, например, для ядра Вольтерра, см. § 17.3.)

*) См., например, Ю. В. Сидоров, М. В. Федорик и М. И. Шабунин [1], гл. II.

Далее, из второй теоремы Фредгольма вытекает, что кратность каждого характеристического числа конечна.

Следовательно, все характеристические числа ядра $\mathcal{K}(x, y)$ можно перенумеровать в порядке возрастания их модуля:

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots, \quad (26)$$

которая в этом ряде λ_k столько раз, какова его кратность. Соответствующие собственные функции обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ и каждому характеристическому числу λ_k из (26) сопоставим собственную функцию φ_k :

$$\varphi_k = \lambda_k \mathcal{K} \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots^*) \quad (27)$$

По второй теореме Фредгольма $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — все характеристические числа ядра $\mathcal{K}^*(x, y)$, причем кратности λ_k и λ_k одинаковы. Соответствующие собственные функции обозначим через ψ_k :

$$\psi_k = \lambda_k \mathcal{K}^* \psi_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (27^*)$$

Собственные функции φ_k и ψ_k непрерывны на G . Докажем, что если $\lambda_k \neq \lambda_l$, то

$$(\varphi_k, \psi_l) = 0. \quad (28)$$

Принимая во внимание равенство (14) § 17.2, из (27) и (27*) получаем

$$(\varphi_k, \psi_l) = (\varphi_k, \lambda_l \mathcal{K}^* \psi_l) = \lambda_l (\mathcal{K} \varphi_k, \psi_l) = \frac{\lambda_l}{\lambda_k} (\varphi_k, \psi_l),$$

откуда, в силу $\lambda_k \neq \lambda_l$, и следуют равенства (28).

Отметим, что λ_k^0 и $\varphi_k, k = 1, 2, \dots$, — характеристические числа и соответствующие собственные функции повторного ядра $\mathcal{K}_\mu(x, y)$.

Это утверждение вытекает из равенств (27), согласно которым

$$\varphi_k = \lambda_k^0 \mathcal{K}_\mu \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Обратно, если μ и φ — характеристическое число и соответствующая собственная функция повторного ядра $\mathcal{K}_\mu(x, y)$, то по крайней мере один из корней $\lambda_l, l = 1,$

*) Если λ_k — не простое характеристическое число, то соответствующие ему φ_k можно выбирать различными способами и поэтому соответствие (27) между λ_k и φ_k неоднозначно.

2, ..., p, уравнения $\lambda^p = \mu$ является характеристическим числом исходного ядра $\mathcal{K}(x, y)$.

Это утверждение следует из равенства

$$(\mu K^p - I)\varphi = (-1)^{p-1}(\lambda_1 K - I) \dots (\lambda_p K - I)\varphi = 0. \quad (30)$$

Действительно, если

$$\varphi = (\lambda_1 K - I) \dots (\lambda_p K - I)\varphi \neq 0, \quad (31)$$

то, в силу (30), $(\lambda_1 K - I)\varphi = 0$, и потому λ_1 — характеристическое число ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Если же $\varphi = 0$, т. е., в силу (31),

$$(\lambda_2 K - I) \dots (\lambda_p K - I)\varphi = 0,$$

то, повторяя предыдущее рассуждение, получим: либо λ_2 — характеристическое число ядра $\mathcal{K}(x, y)$, либо $(\lambda_3 K - I) \dots (\lambda_p K - I)\varphi = 0$ и т. д.

Переформулируем теперь альтернативу Фредгольма в терминах характеристических чисел и собственных функций.

Если $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$, то интегральные уравнения (1) и (1*) однозначно разрешимы при любых свободных членах.

Если $\lambda = \lambda_k$, то однородные уравнения

$$K\varphi = \lambda_k \varphi \quad \text{и} \quad K^*\varphi = \lambda_k \varphi$$

имеют одинаковое (конечное) число $r_k \geq 1$ линейно независимых решений — собственных функций $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{k+r_k-1}$ ядра $\mathcal{K}(x, y)$ и собственных функций $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{k+r_k-1}$ ядра $\mathcal{K}^*(x, y)$, соответствующих характеристическим числам λ_k и λ_k (r_k — кратность λ_k и λ_k).

Если $\lambda = \lambda_k$, то для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$(f, \varphi_{k+i}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r_k - 1. \quad (32)$$

Замечание. Изложенный процесс сведения интегрального уравнения (1) к интегральному уравнению (22) с вырожденным ядром указывает на следующий способ приближенного решения уравнения (1) при любых λ : 1) ядро $\mathcal{K}(x, y)$ приближается полиномом $\mathcal{P}(x, y)$ (или другим каким-либо вырожденным ядром), 2) для малого ядра $\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{K}(x, y) - \mathcal{P}(x, y)$ методом § 17.2 приближенно строится резольвента $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$, 3) составляется интегральное уравнение (22) с вырожденным ядром $\mathcal{P}(x, y; \lambda)$, 4) методом § 18.1 строится решение Φ уравнения (22) и, наконец, 5) по формуле (21) находится решение φ уравнения (1).

5. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с полириным ядром. Распространим теоремы Фредгольма на интегральные уравнения с полириным ядром (см. § 17.4)

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{\mathcal{K}^*(x, y)}{|x-y|^\alpha}, \quad \alpha < n,$$

где $\mathcal{K}^*(x, y)$ — непрерывное ядро на $G \times G$ и G — ограниченная область.

Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое вырожденное ядро $\mathcal{P}(x, y)$, что

$$\max_{x \in G} \int_G |\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{P}(x, y)| dy < \varepsilon, \quad (33)$$

$$\max_{x \in G} \int_G |\mathcal{K}^*(x, y) - \mathcal{P}^*(x, y)| dy < \varepsilon. \quad (33^*)$$

Действительно, ядро

$$\mathcal{L}(x, y) = \begin{cases} \mathcal{K}(x, y), & |x-y| \geq \frac{1}{N}, \\ \mathcal{K}^*(x, y) N^\alpha, & |x-y| < \frac{1}{N}, \end{cases}$$

непрерывно и при достаточно большом N

$$\begin{aligned} \int_G |\mathcal{K}(x-y) - \mathcal{L}(x-y)| dy &= \\ &= \int_{|x-y| < \frac{1}{N}} |\mathcal{K}(x, y) - \left(\frac{1}{|x-y|^\alpha} - N^\alpha \right)| dy \leq \\ &\leq \int_{|x-y| < \frac{1}{N}} \frac{|\mathcal{K}^*(x, y)|}{|x-y|^\alpha} dy \leq \max_{G \times G} |\mathcal{K}^*(x, y)| \int_{|x-y| < \frac{1}{N}} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} = \\ &= c \int_{|z| < \frac{1}{N}} \frac{d\Omega}{|z|^\alpha} = c \Omega_n \int_0^{\frac{1}{N}} \rho^{\alpha-1} d\rho = \frac{c \Omega_n}{n-\alpha} \frac{1}{N^{n-\alpha}} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in G, \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \int_G |\mathcal{K}^*(x, y) - \mathcal{L}^*(x, y)| dy &= \\ &= \int_G |\mathcal{K}(y, x) - \mathcal{L}(y, x)| dy < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in G. \end{aligned}$$

Далее, приблизим непрерывное ядро $\mathcal{L}(x, y)$ вырожденным ядром $\mathcal{F}(x, y)$ (см. § 18.3):

$$|\mathcal{L}(x, y) - \mathcal{F}(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2V}, \quad x \in G, y \in G.$$

Отсюда следует возможность аппроксимации полярного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ вырожденными ядрами в смысле (33) — (33*):

$$\begin{aligned} \max_{x \in \partial G} \int_{\partial G} |\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{F}(x, y)| dy &\leq \\ &\leq \max_{x \in \partial G} \int_{\partial G} |\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{L}(x, y)| dy + \\ &+ \max_{x \in \partial G} \int_{\partial G} |\mathcal{L}(x, y) - \mathcal{F}(x, y)| dy < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2V} \int_{\partial G} dy = \varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается и оценка (33*).

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ полярное ядро $\mathcal{K}(x, y)$ представимо в виде $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{F}(x, y) + \mathcal{G}(x, y)$, где $\mathcal{F}(x, y)$ — вырожденное ядро и $\mathcal{G}(x, y)$ — малое полярное ядро, удовлетворяющее, в силу (33) — (33*), оценкам

$$\max_{x \in \partial G} \int_{\partial G} |\mathcal{G}(x, y)| dy < \varepsilon, \quad \max_{x \in \partial G} \int_{\partial G} |\mathcal{G}^*(x, y)| dy < \varepsilon.$$

Повторяя теперь рассуждения §§ 18.3 и 18.4 и пользуясь результатами § 17.4 о разрешимости интегральных уравнений с малым полярным ядром, заключаем, что все теоремы Фредгольма и их следствия переносятся и на интегральные уравнения с полярным ядром.

Отметим, что все собственные функции полярного ядра $\mathcal{K}(x, y)$, принадлежащие $\mathcal{L}_2(G)$, принадлежат $C(G)$.

Действительно, если $\varphi_0 = \lambda_0 K \varphi_0$, $\varphi_0 \in \mathcal{L}_2(G)$, то $\varphi_0 = \lambda_0^r K^r \varphi_0$. Но при достаточно большом r ядро $\mathcal{K}_r(x, y)$ интегрального оператора K^r непрерывно (см. § 17.4). А тогда, по лемме § 17.1, $\varphi_0 = \lambda_0^r K^r \varphi_0 \in C(G)$, что и утверждалось.

Замечание. Теоремы Фредгольма остаются справедливыми и для интегральных уравнений с полярным ядром на ограниченной кусочно-гладкой поверхности S :

$$\varphi(x) = \lambda \int_S \frac{\mathcal{K}(x, y)}{|x - y|^2} \varphi(y) dS_y + f(x),$$

(см. ядро $\mathcal{K}(x, y)$ равномерно непрерывно на $S \times S$ и показатель α меньше размерности поверхности S (см. Н. Г. Петровский [2], § 8) в. Уравнения. а) Доказать, что если $\mathcal{K}(t)$ — непрерывная 2 π -периодическая функция и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}(t) e^{ikt} dt \neq 0, \quad k - \text{целое,}$$

то

$$\lambda_k = \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}(t) e^{ikt} dt} \quad \text{и} \quad \varphi_k(x) = e^{-ikx}$$

— характеристическое число и соответствующая собственная функция ядра $\mathcal{K}(x - y)$, $-\pi < x, y < \pi$.

б) Доказать, что если $\mathcal{K}(t)$ — (абсолютно) интегрируемая функция на R^1 и $F[\mathcal{K}^*](\mu) \neq 0$, то

$$\lambda = \frac{1}{F[\mathcal{K}^*](\mu)} \quad \text{и} \quad \varphi(x) = e^{-i\mu x}$$

— характеристическое число и соответствующая собственная функция ядра $\mathcal{K}(x - y)$, $-\infty < x, y < \infty$.

с) Доказать, что $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ — характеристическое число ядра $\cos(xy)$, $0 < x, y < \pi$ и ему соответствуют собственные функции

$$\varphi(x) = f(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \cos(xy) f(y) dy,$$

где $f(x)$ — любая функция из $\mathcal{L}_2(0, \pi)$.

Отметим, что для интегральных уравнений с ядрами примеров б) и с) теоремы Фредгольма несправедливы (области интегрирования в них неограничены).

§ 19. Интегральные уравнения с эрмитовым ядром

Ядро $\mathcal{K}(x, y)$ называется эрмитовым, если оно совпадает со своим эрмитово сопряженным ядром, $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y)$.

Соответствующее интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (1)$$

при вещественных λ совпадает со своим сопряженным, ибо $K^* = K$. Это уравнение удобно рассматривать в пространстве $\mathcal{L}_2(G)$.

1. Интегральные операторы с эрмитовым непрерывным ядром. Пусть K — интегральный оператор с эрмитовым непрерывным ядром $\mathcal{K}(x, y)$. Этот оператор переводит $\mathcal{L}_2(G)$ (G — ограниченная область) в $\mathcal{L}_2(G)$ (см. § 17.1) и эрмитов (см. § 17.2 и § 1.12):

$$(Kf, g) = (f, Kg), \quad f, g \in \mathcal{L}_2(G) = \mathcal{H}_K. \quad (2)$$

Обратно, если интегральный оператор K с непрерывным ядром $\mathcal{K}(x, y)$ эрмитов, то это ядро эрмитово.

Действительно, из равенства (2) следует эрмитовость ядра $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y)$ (см. § 17.1).

Из формулы (22) § 17.2 следует, что все повторные ядра $\mathcal{K}_p(x, y)$ эрмитова непрерывного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ эрмитовы:

$$\mathcal{K}_p^*(x, y) = (\mathcal{K}^*)_p(x, y) = \mathcal{K}_p(x, y).$$

Лемма. Интегральный оператор K с непрерывным ядром $\mathcal{K}(x, y)$ переводит всякое ограниченное множество из $\mathcal{L}_2(G)$ в множество, ограниченное в $C(G)$ и состоящее из равномерно-непрерывных* функций на G .

Доказательство. Пусть B — ограниченное множество из $\mathcal{L}_2(G)$: $\|f\| \leq A$, $f \in B$. По лемме § 17.1 оператор K переводит множество B в множество, ограниченное в $C(G)$: $\|Kf\|_C \leq M \sqrt{V} A$, $f \in B$. Далее, так как ядро $\mathcal{K}(x, y)$ равномерно непрерывно на $G \times G$, то для любого $\epsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что

$$|\mathcal{K}(x', y) - \mathcal{K}(x'', y)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{V} A},$$

как только $|x' - x''| < \delta$, x', x'' и $y \in G$. Отсюда, пользуясь неравенством (4) § 17.1 с заменой $\mathcal{K}(x, y)$ на $\mathcal{K}(x', y) - \mathcal{K}(x'', y)$, при всех $f \in B$ получаем

$$\begin{aligned} |(Kf)(x') - (Kf)(x'')| &= \\ &= \left| \int_G [\mathcal{K}(x', y) - \mathcal{K}(x'', y)] f(y) dy \right| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{V} A} \sqrt{V} \|f\| \leq \epsilon, \end{aligned}$$

как только $|x' - x''| < \delta$, $x', x'' \in G$. Это значит, что множество $\{(Kf)(x), f \in B\}$ состоит из равномерно-непрерывных функций на G . Лемма доказана.

* Определенное множество равномерно-непрерывных функций содержится в § 1.3.

2. Лемма Арчела — Асколи. Если бесконечное множество B ограничено в $C(K)$, где K — компакт, и состоит из равномерно-непрерывных функций на K , то из него можно выбрать сходящуюся в $C(K)$ последовательность.

Доказательство. Как известно, множество точек с рациональными координатами счетно. Поэтому все такие точки множества K можно переименовать: $x_1, x_2, \dots$. По условию множество чисел $\{f(x_i), f \in B\}$ ограничено. Могут представиться два случая.

1) Это множество бесконечно. Пользуясь теоремой Больцано — Вейерштрасса (см. § 1.1), из него выберем сходящуюся последовательность $f_k^1(x_i)$, $k=1, 2, \dots$

2) Это множество конечно. В этом случае найдется последовательность функций $f_k^1(x)$, $k=1, 2, \dots$, принимающих в точке x_1 одинаковые значения.

Далее, поскольку множество чисел $\{f_k^1(x_2), k=1, 2, \dots\}$ ограничено, то из него выберем описанным выше способом сходящуюся подпоследовательность $f_k^2(x_i)$, $k=1, 2, \dots$, и т. д.

Рассмотрим теперь диагональную последовательность $f_k(x) = f_k^k(x)$, $k=1, 2, \dots$, функций множества B . Для любой точки x_i числовая последовательность $f_k(x_i)$, $k=1, 2, \dots$, сходится, ибо по построению при $k \geq i$ эта последовательность содержится в сходящейся последовательности $f_k^i(x_i)$, $k=1, 2, \dots$

Докажем теперь, что последовательность f_k , $k=1, 2, \dots$, сходится равномерно на K . Пусть $\epsilon > 0$. Поскольку эта последовательность состоит из равномерно-непрерывных функций на K , то найдется такое число δ , что при $k=1, 2, \dots$

$$|f_k(x) - f_k(x')| < \frac{\epsilon}{3}, \quad (3)$$

коль скоро $|x - x'| < \delta$, x и $x' \in K$. Так как K — ограниченное множество, то из множества точек $x_1, x_2, \dots$ можно выбрать конечное число их: $x_1, x_2, \dots, x_l$, $l=l(\epsilon)$, так, чтобы для любой точки $x \in K$ нашлась точка x_i , $1 \leq i \leq l$, такая, что $|x - x_i| < \delta$. Вспомня, что последовательность $f_k(x)$, $k=1, 2, \dots$, сходится на точках $x_1, x_2, \dots, x_l$, заключаем, что найдется такое число $N = N(\epsilon)$, что

$$|f_k(x_i) - f_p(x_i)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad k, p \geq N, \quad i=1, 2, \dots, l. \quad (4)$$

Пусть теперь x — произвольная точка множества K . Выбирая точку x_i , $1 \leq i \leq l$, такую что $|x - x_i| < \delta$, в силу (3) и (4) получаем

$$|f_k(x) - f_p(x)| \leq |f_k(x) - f_k(x_i)| + |f_k(x_i) - f_p(x_i)| + \\ + |f_p(x_i) - f_p(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad k, p \geq N,$$

причем N не зависит от x . Это значит, что последовательность f_k , $k=1, 2, \dots$, сходится в себе в $C(K)$. По теореме Коши (см. § 1.3) эта последовательность сходится в $C(K)$ к некоторой функции из $C(K)$. Лемма доказана.

Замечание. Лемма Арцела — Асколи выражает свойство компактности любого ограниченного в $C(K)$ множества, состоящего из равномерно-непрерывных на K функций. Лемма § 19.1 утверждает, что интегральный оператор с непрерывным ядром переводит всякое ограниченное множество из $\mathcal{X}_2(G)$ в множество, компактное в $C(\bar{G})$. Всякий оператор, обладающий таким свойством, называется *полностью непрерывным* из $\mathcal{X}_2(G)$ в $C(\bar{G})$.

3. Интегральные уравнения с эрмитовым непрерывным ядром. Не всякое ядро, отличное от тождественного нуля, имеет характеристические числа; например, как было показано в § 17.3, ядра Вольтерра не имеют таковых. Тем не менее справедлива следующая

Теорема. *Всякое эрмитово непрерывное ядро $\mathcal{K}(x, y) \neq 0$ имеет по крайней мере одно характеристическое число, и наименьшее по модулю характеристическое число λ_1 удовлетворяет вариационному принципу*

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in \mathcal{X}_2(G)} \frac{|Kf|}{\|f\|}. \quad (5)$$

Доказательство. Обозначим через v точную верхнюю грань функционала $|Kf|$ на множестве функций f из $\mathcal{X}_2(G)$ с единичной нормой:

$$v = \sup_{\|f\|=1} |Kf|. \quad (6)$$

Из оценки (6) § 17.1 вытекает, что на функциях этого множества $|Kf| \leq MV$, а потому $v \leq MV$. Кроме того, очевидно, $v \geq 0$. Докажем, что $v > 0$. Действительно, если $v = 0$, то, в силу (6), мы имели бы $|Kf| = 0$, т. е. $Kf = 0$ при всех $f \in \mathcal{X}_2(G)$, и потому $\mathcal{K}(x, y) = 0$, $x \in G$, $y \in G$ (см. § 17.1), вопреки предположению.

Из определения точной верхней грани v вытекает существование последовательности f_k , $k=1, 2, \dots$, $\|f_k\| = 1$, такой, что

$$|Kf_k| \rightarrow v, \quad k \rightarrow \infty; \quad (7)$$

кроме того, справедливо неравенство

$$|K^2 f| = \left| K \left(\frac{Kf}{\|Kf\|} \right) \right| \|Kf\| \leq v \|Kf\|, \quad f \in \mathcal{X}_2(G). \quad (8)$$

Докажем теперь, что

$$K^2 f_k - v^2 f_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{X}_2(G). \quad (9)$$

Действительно, пользуясь (2), (8) и (7), получаем

$$\begin{aligned} \|K^2 f_k - v^2 f_k\|^2 &= (K^2 f_k - v^2 f_k, K^2 f_k - v^2 f_k) = \\ &= (K^2 f_k, K^2 f_k) + v^4 (f_k, f_k) - 2v^2 (f_k, K^2 f_k) = \\ &= \|K^2 f_k\|^2 + v^4 - 2v^2 (Kf_k, Kf_k) \leq \\ &\leq v^2 \|Kf_k\|^2 + v^4 - 2v^2 \|Kf_k\|^2 = v^4 - v^2 \|Kf_k\|^2 \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что и эквивалентно предельному соотношению (9).

По лемме § 19.1 последовательность функций Kf_k , $k=1, 2, \dots$, ограничена в $C(\bar{G})$ и состоит из равномерно-непрерывных функций на $\bar{G}$. А тогда, по лемме Арцела — Асколи (см. § 19.2), существует подпоследовательность $\psi = Kf_{k_i}$, $i=1, 2, \dots$, сходящаяся в $C(\bar{G})$ к функции $\psi \in C(\bar{G})$, $\|\psi - \psi_i\|_C \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Отсюда, пользуясь оценками (4) и (5) § 17.1 и соотношением (9), получаем

$$\begin{aligned} \|K^2 \psi - v^2 \psi\|_C &\leq \\ &\leq \|K^2 (\psi - \psi_i)\|_C + v^2 \|\psi - \psi_i\|_C + \|K^2 \psi_i - v^2 \psi_i\|_C \leq \\ &\leq MV \|K(\psi - \psi_i)\|_C + v^2 \|\psi - \psi_i\|_C + \|K(Kf_{k_i} - v^2 f_{k_i})\|_C \leq \\ &\leq (M^2 V^2 + v^2) \|\psi - \psi_i\|_C + M \|V\| \|K^2 f_{k_i} - v^2 f_{k_i}\| \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$K^2 \psi = v^2 \psi.$$

Докажем, что $\psi \neq 0$. Из предельного соотношения (9) следует, что

$$K\psi_i - v^2 f_{k_i} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{X}_2(G),$$

и, следовательно, $\|K\psi_i\| \rightarrow v^2$, $i \rightarrow \infty$. С другой стороны, из леммы § 17.1 вытекает, что $\|K\psi_i\| \rightarrow \|K\psi\|$, $i \rightarrow \infty$.

Таким образом, $[K\psi] = v^2 > 0$, откуда и следует, что $\psi \neq 0$.

Итак, построенная функция ψ является собственной функцией ядра $\mathcal{K}(x, y)$, соответствующей характеристическому числу $\frac{1}{v^2}$. А тогда по крайней мере одно из чисел $\pm \frac{1}{v}$ является характеристическим числом ядра $\mathcal{K}(x, y)$ (см. § 18.4). Таким образом, построенное характеристическое число λ_1 по модулю равно $\frac{1}{v}$ и, стало быть, в силу (6), удовлетворяет вариационному принципу (5).

Осталось установить, что λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое число ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Действительно, если λ_0 и φ_0 — характеристическое число и соответствующая собственная функция, $\lambda_0 K \varphi_0 = \varphi_0$, то, в силу (5),

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in \mathcal{L}_2(G)} \frac{|Kf|}{\|f\|} \geq \frac{|K\varphi_0|}{\|\varphi_0\|} = \frac{1}{|\lambda_0|},$$

и потому $|\lambda_1| \leq |\lambda_0|$. Теорема доказана.

Как было установлено в § 19.1, интегральный оператор K с эрмитовым непрерывным ядром $\mathcal{K}(x, y)$ эрмитов. По теореме § 1.12 характеристические числа ядра $\mathcal{K}(x, y)$ вещественны, а собственные функции, соответствующие различным характеристическим числам, ортогональны. Кроме того, по четвертой теореме Фредгольма множество характеристических чисел не более чем счетно, а по второй теореме Фредгольма кратность каждого характеристического числа конечна. Поэтому система собственных функций оператора K не более чем счетна и эту систему можно выбрать ортонормальной (см. § 1.12).

Принимая еще во внимание доказанную теорему и теорему Фредгольма (см. § 18.3), для интегральных уравнений с эрмитовым непрерывным ядром $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ получаем следующие утверждения:

Множество характеристических чисел $\{\lambda_k\}$ не пусто, расположено на вещественной оси, не имеет конечных предельных точек; каждое характеристическое число имеет конечную кратность; система собственных функций $\{\varphi_k\}$ может быть выбрана ортонормальной,

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl}. \quad (10)$$

Если $\lambda \neq \lambda_k$, $k=1, 2, \dots$, то уравнение (1) однозначно разрешимо при любом свободном члене $f \in C(\bar{G})$. Если $\lambda = \lambda_k$, то для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$(f, \varphi_{k,i}) = 0, \quad i=0, 1, \dots, r_k-1, \quad (11)$$

где $\varphi_k, \varphi_{k,1}, \dots, \varphi_{k,r_k-1}$ — собственные функции, соответствующие характеристическому числу λ_k , и r_k — кратность λ_k .

4. Интегральные уравнения с эрмитовым полярным ядром. Все результаты, установленные в § 19.3 для интегральных уравнений с эрмитовым непрерывным ядром, остаются справедливыми и для интегральных уравнений с эрмитовым полярным ядром.

Действительно, для таких интегральных уравнений справедливы теоремы Фредгольма и их следствия (см. § 18.5).

Далее, для эрмитова полярного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ все вторые ядра $\mathcal{K}_p(x, y)$ эрмитовы и полярные, причем при $p \geq p_0 = \left[\frac{n}{n-\alpha} \right] + 1$ эти ядра непрерывны (см. § 17.4).

Осталось распространять на эрмитовы полярные ядра $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ теорему § 19.3. Обозначим

$$v = \sup_{\|f\|=1} |Kf|. \quad (12)$$

Тогда, в силу $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ и неравенства (31) § 17.4, $0 < v \leq N = N^*$. Как и при доказательстве теоремы § 19.3, из (12) вытекает существование последовательности f_k , $k=1, 2, \dots$, $\|f_k\|=1$, такой, что

$$K^2 f_k - v^2 f_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{L}_2(G).$$

Отсюда, применяя неравенство (31) § 17.4 при $p=1, 2, \dots$ получаем

$$\begin{aligned} |K^{2p} f_k - v^{2p} f_k| &= |(K^{2p-2} + v^2 K^{2p-4} + \dots + v^{2p-2} I)(K^2 f_k - v^2 f_k)| \leq \\ &\leq (N^{2p-2} + v^2 N^{2p-4} + \dots + v^{2p-2}) |K^2 f_k - v^2 f_k| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т. е.

$$K^{2p} f_k - v^{2p} f_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{L}_2(G). \quad (13)$$

Но при $2p \geq p_0$ ядро $\mathcal{K}_{2p}(x, y)$ непрерывно. Поэтому, как и при доказательстве теоремы § 19.3, из предельного

соотношения (13) вытекает, что $\frac{1}{\lambda_k}$ — характеристическое число ядра $\mathcal{K}(x, y)$. А тогда, поскольку ядро $\mathcal{K}(x, y)$ эрмитово и, значит, все его характеристические числа вещественны, по крайней мере одно из чисел $\pm \frac{1}{\lambda_k}$ является характеристическим числом λ_1 этого ядра (см. § 18.4). Отсюда и из (12) вытекает справедливость вариационного принципа (5) для характеристического числа λ_1 . Очевидно, λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое число ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Этим завершается распространение теоремы § 19.3 на эрмитовы полярные ядра.

§ 20. Теорема Гильберта — Шмидта и ее следствия

1. Теорема Гильберта — Шмидта для эрмитова непрерывного ядра. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — характеристические числа эрмитова непрерывного ядра $\mathcal{K}(x, y) \equiv 0$, расположенные в порядке возрастания их модуля, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$, и $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — соответствующие ортонормальные собственные функции, $(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl}$.

Как мы знаем, характеристические числа λ_k вещественны, а собственные функции $\varphi_k(x)$ непрерывны на G ; при этом множество $\{\lambda_k\}$ либо конечно, либо счетно; в последнем случае $|\lambda_k| \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. Далее, в силу теоремы § 19.3 справедливо неравенство

$$|Kf| \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \|f\|, \quad f \in \mathcal{L}_2(G). \quad (1)$$

Отметим еще неравенство*)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \leq \int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy, \quad x \in G. \quad (2)$$

(Нижее, в § 20.2, будет показано, что в неравенстве (2) фактически имеет место знак равенства.)

Неравенство (2) при фиксированном $x \in G$ представляет собой неравенство Бесселя (см. § 1.8) для функции $\mathcal{K}(x, y)$, коэффициенты Фурье которой по ортонормаль-

*) Если ядро $\mathcal{K}(x, y)$ имеет конечное число характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, то будем считать $\lambda_k = \infty, k > N$.

ной системе $\{\varphi_k(y)\}$ равны

$$(\mathcal{K}, \varphi_k) = \int_G \mathcal{K}(x, y) \varphi_k(y) dy = K\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x).$$

Введем последовательность эрмитовых непрерывных ядер

$$\mathcal{K}^{(p)}(x, y) = \mathcal{K}(x, y) - \sum_{k=1}^p \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(y)}{\lambda_k}, \quad p=1, 2, \dots \quad (3)$$

Соответствующие интегральные эрмитовы операторы $K^{(p)}$ действуют по формуле

$$K^{(p)}f = Kf - \sum_{k=1}^p \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k, \quad f \in \mathcal{L}_2(G). \quad (4)$$

Докажем, что $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots$ и $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \dots$ образуют все характеристические числа и собственные функции ядра $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$.

В самом деле, в силу (4) имеем

$$K^{(p)}\varphi_k = K\varphi_k - \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_k, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i = K\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k, \quad k \geq p+1,$$

так что λ_k и $\varphi_k, k \geq p+1$, — действительно характеристические числа и собственные функции ядра $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$. Обратное, пусть λ_0 и φ_0 — характеристическое число и соответствующая собственная функция ядра $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$, т. е., в силу (4),

$$\varphi_0 = \lambda_0 K^{(p)}\varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i. \quad (5)$$

Отсюда при $k=1, 2, \dots, p$ получаем

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \varphi_k) &= \lambda_0 (K\varphi_0, \varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i) (\varphi_i, \varphi_k)}{\lambda_i} = \\ &= \lambda_0 (\varphi_0, K\varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)}{\lambda_i} \delta_{ik} = \\ &= \frac{\lambda_0}{\lambda_k} (\varphi_0, \varphi_k) - \frac{\lambda_0}{\lambda_k} (\varphi_0, \varphi_k) = 0, \end{aligned}$$

а потому, в силу (5), $\varphi_0 = \lambda_0 K \varphi_0$. Таким образом, λ_0 и φ_0 — характеристическое число и соответствующая собственная функция ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Поскольку φ_0 ортогональна ко всем собственным функциям $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, то следовательно, λ_0 совпадает с одним из характеристических чисел $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots$ и φ_0 можно считать равной φ_k при некотором $k \geq p+1$.

Таким образом, λ_{p+1} — наименьшее по модулю характеристическое число ядра $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$. Применяя неравенство (1) к этому ядру и учитывая (4), получаем неравенство

$$|K^{(p)}f| = \left| Kf - \sum_{i=1}^p \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right| \leq \frac{|f|}{|\lambda_{p+1}|}, \quad f \in \mathcal{L}_2(G), \quad (6)$$

$$p = 1, 2, \dots$$

Пусть эрмитово ядро $\mathcal{K}(x, y)$ имеет конечное число характеристических чисел: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. По доказанному эрмитово ядро $\mathcal{K}^{(N)}(x, y)$ не имеет характеристических чисел, а потому, по теореме § 19.3, $\mathcal{K}^{(N)}(x, y) = 0$, так что, в силу (3),

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i(x) \bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}, \quad (7)$$

т. е. ядро $\mathcal{K}(x, y)$ вырожденное.

Отсюда, вспоминая, что вырожденное ядро всегда имеет конечное число характеристических чисел (см. § 18.2), выводим такой результат: для того чтобы эрмитово непрерывное ядро было вырожденным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело конечное число характеристических чисел.

Будем говорить, что функция $f(x)$ истокообразно представима через ядро $\mathcal{K}(x, y)$, если существует функция $h \in \mathcal{L}_2(G)$ такая, что

$$f(x) = \int_G \mathcal{K}(x, y) h(y) dy, \quad x \in G. \quad (8)$$

Теорема Гильберта—Шмидта. Если функция $f(x)$ истокообразно представима через эрмитово непрерывное ядро $\mathcal{K}(x, y)$, $f = Kh$, то ее ряд Фурье по собственным функциям ядра $\mathcal{K}(x, y)$ сходится регулярно (и, зна-

чит, равномерно) на G к этой функции:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x). \quad (9)$$

Доказательство. Так как $f = Kh$, $h \in \mathcal{L}_2(G)$, то, по лемме § 17.1, $f \in C(G)$ и коэффициенты Фурье функций f и h по собственным функциям $\{\varphi_k\}$ ядра $\mathcal{K}(x, y)$ связаны соотношением

$$(f, \varphi_k) = (Kh, \varphi_k) = (h, K\varphi_k) = \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}. \quad (10)$$

Если ядро $\mathcal{K}(x, y)$ имеет конечное число характеристических чисел, то, в силу (7),

$$f(x) = Kh = \sum_{k=1}^N \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

и теорема Гильберта—Шмидта доказана.

Пусть теперь ядро $\mathcal{K}(x, y)$ имеет бесконечное число характеристических чисел. В этом случае $|\lambda_k| \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$. Поэтому, в силу (6) и (10), ряд (9) сходится к f в $\mathcal{L}_2(G)$:

$$\left| f - \sum_{k=1}^p (f, \varphi_k) \varphi_k \right| = \left| Kh - \sum_{k=1}^p \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k \right| \leq \frac{|h|}{|\lambda_{p+1}|} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty.$$

Осталось доказать, что ряд (9) сходится регулярно на G . Пользуясь неравенством Коши—Буняковского и неравенством (2), при всех p и q получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)| \left| \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| &\leq \left[\sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=p}^q \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left[\sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq M \sqrt{V} \left[\sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad x \in G. \quad (11) \end{aligned}$$

В силу неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^m |(h, \varphi_k)|^2 \leq |h|^2$$

правая часть неравенства (11) стремится к 0 при $p, q \rightarrow \infty$. Это и значит, что ряд (9) сходится регулярно на G . Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия из теоремы Гильберта — Шмидта.

2. Билинейное разложение повторных ядер. Докажем, что повторное ядро $\mathcal{K}_p(x, y)$ эрмитова непрерывного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ разлагается в билинейный ряд по собственным функциям этого ядра

$$\mathcal{K}_p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k^p}, \quad p=2, 3, \dots \quad (12)$$

регулярно сходящийся на $G \times G$.

В силу формулы (17) § 17.2 при каждом $y \in G$ ядро $\mathcal{K}_p(x, y)$ истокообразно представимо через ядро $\mathcal{K}(x, y')$, а потому, по теореме Гильберта — Шмидта, оно разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям этого ядра:

$$\mathcal{K}_p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{K}_p(x, y), \varphi_k) \varphi_k(x).$$

Так как ядро $\mathcal{K}_p(x, y)$ эрмитово, то

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_p(x, y), \varphi_k) &= \int_G \mathcal{K}_p(x, y) \bar{\varphi}_k(x) dx = \\ &= \int_G \mathcal{K}_p(y, x) \bar{\varphi}_k(x) dx = (\overline{\mathcal{K}^p \varphi_k})(y) = \frac{\bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k^p}, \quad p \geq 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, равенство (12) доказано и ряд в (12) сходится регулярно по $x \in G$ при каждом $y \in G$.

В частности, полагая в формуле (12) $p=2$, $x=y$ и учитывая, что, в силу (17) § 17.2,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(x, x) &= \int_G \mathcal{K}(x, y') \mathcal{K}(y', x) dy' = \\ &= \int_G \mathcal{K}(x, y') \overline{\mathcal{K}(x, y')} dy' = \int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy, \end{aligned}$$

получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} = \int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy. \quad (14)$$

Из леммы Дини (см. § 1.3) следует, что ряд (14) сходится равномерно на G . Отсюда, используя неравенство Коши — Буняковского

$$\sum_{k=1}^m \frac{|\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)|}{\lambda_k^2} \leq \frac{1}{|\lambda_1|^{p-2}} \left[\sum_{k=1}^m \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \sum_{k=1}^m \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

включаем, что ряд (12) сходится регулярно на $G \times G$.

Интегрируя равномерно сходящийся ряд (14) почленно и учитывая нормировку собственных функций, получаем формулу

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_G \int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy. \quad (15)$$

3. Билинейное разложение эрмитова непрерывного ядра. Исследуем сходимость ряда (12) при $p=1$, а именно докажем, что эрмитово непрерывное ядро $\mathcal{K}(x, y)$ разлагается в билинейный ряд по своим собственным функциям

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k}, \quad (16)$$

сходящийся в $\mathcal{L}_2(G)$ равномерно по $y \in G$, т. е.

$$\left| \mathcal{K}(x, y) - \sum_{k=1}^p \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k} \right|_{y \in G} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Равенство (13) при $p=1$ показывает, что при каждом $y \in G$ коэффициенты Фурье ядра $\mathcal{K}(x, y)$ по ортонормальной системе $\{\varphi_k(x)\}$ равны $\frac{\bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k}$. Поэтому, применяя формулу (16) § 1.8, получаем равенство

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{K}(x, y) - \sum_{k=1}^p \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k} \right|^2 &= \\ &= \int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx - \sum_{k=1}^p \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k^2}, \quad y \in G. \end{aligned}$$

откуда, в силу равномерной сходимости ряда (14), заключаем о сходимости билинейного ряда (16) к ядру $\mathcal{K}(x, y)$ в смысле (17).

Из (17) следует, в частности, что ряд (16) сходится к ядру $\mathcal{K}(x, y)$ в $\mathcal{L}_2(G \times G)$, т. е.

$$\iint_G \left| \mathcal{K}(x, y) - \sum_{k=1}^p \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k} \right|^2 dx dy \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Для билинейной формы (Kf, g) докажем формулу

$$(Kf, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k) \overline{(g, \varphi_k)}}{\lambda_k}, \quad f, g \in \mathcal{L}_2(G). \quad (19)$$

Действительно, поскольку $f \in \mathcal{L}_2(G)$, то, по теореме Гильберта — Шмидта,

$$(Kf)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

причем этот ряд сходится равномерно на G . Умножив этот ряд на функцию g из $\mathcal{L}_2(G)$ (и, следовательно, абсолютно интегрируемую на G , см. § 1.7) и почленно интегрируя его по области G , получаем формулу (19):

$$\begin{aligned} (Kf, g) &= \int_G Kf \bar{g} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \int_G \varphi_k(x) \bar{g}(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k) \overline{(g, \varphi_k)}}{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Полагая в формуле (19) $f = g$, получим представление квадратичной формы (Kf, f) в виде

$$(Kf, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_k)|^2}{\lambda_k}, \quad f \in \mathcal{L}_2(G). \quad (20)$$

Формула (20) представляет собой обобщение формулы приведения к главным осям квадратичной формы с конечным числом переменных.

4. Решение неоднородного интегрального уравнения с эрмитовым непрерывным ядром. Построим решение неоднородного интегрального уравнения

$$\varphi = \lambda K\varphi + f \quad (21)$$

с эрмитовым непрерывным ядром $\mathcal{K}(x, y)$.

Если $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$, и $f \in C(\bar{G})$, то (единственное) решение φ интегрального уравнения (21) представляется в виде равномерно сходящегося на G ряда (формулы Шмидта)

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + f(x). \quad (22)$$

Действительно, при $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$, решение интегрального уравнения (21) существует и единственно в $C(\bar{G})$ при любом свободном члене $f \in C(\bar{G})$ (см. § 18.3). По теореме Гильберта — Шмидта функция $K\varphi$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Поэтому

$$\varphi = \lambda K\varphi + f = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k + f. \quad (23)$$

Вычислим коэффициенты Фурье (φ, φ_k) . Из уравнения (21) имеем

$$\begin{aligned} (\varphi, \varphi_k) &= \lambda (K\varphi, \varphi_k) + (f, \varphi_k) = \lambda (\varphi, K\varphi_k) + (f, \varphi_k) = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda_k} (\varphi, \varphi_k) + (f, \varphi_k) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$(\varphi, \varphi_k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda} (f, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

откуда, в силу (23), вытекает формула Шмидта (22). По теореме Гильберта — Шмидта

$$(Kf)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

причем ряд сходится равномерно на G . Поэтому формула Шмидта (22) принимает вид

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x) + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \varphi_k(x) + f(x) = \\ = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y) f(y) dy + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \varphi_k(x) + f(x). \quad (24)$$

Далее, из регулярной сходимости билинейного ряда (12) при $p=2$ следует равномерная сходимость билинейного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)},$$

и его сумма есть непрерывная функция по $x \in G$, $y \in G$, $\lambda \neq \lambda_k$, $k=1, 2, \dots$, и мероморфна по λ с простыми полюсами λ_k . Следовательно, при $\lambda \neq \lambda_k$, $k=1, 2, \dots$, в формуле (24) можно поменять порядок суммирования и интегрирования, в результате чего получим

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \left[\mathcal{K}(x, y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \right] f(y) dy + f(x). \quad (25)$$

С другой стороны, по теореме § 17.2, при малых λ решение уравнения (21) выражается через резольвенту $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ ядра $\mathcal{K}(x, y)$ по формуле (20) § 17.2. Следовательно,

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \mathcal{K}(x, y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}. \quad (26)$$

Таким образом, резольвента $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ эрмитова непрерывного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ допускает мероморфное продолжение на всю плоскость комплексного переменного λ с простыми полюсами λ_k и вычетами

$$-\sum_{l=0}^{r_k-1} \varphi_{k+l}(x) \bar{\varphi}_{k+l}(y), \quad (27)$$

где $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{k+r_k-1}$ — собственные функции ядра $\mathcal{K}(x, y)$, соответствующие λ_k , и r_k — кратность λ_k (см. замечание § 17.2).

Пользуясь равенством (16), перепишем формулу (26) в виде

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k - \lambda}, \quad (28)$$

причем билинейный ряд сходится в $\mathcal{L}_2(G \times G)$ (см. § 20.3).

Замечание. Формула (22) остается справедливой и при $\lambda = \lambda_j$, если, в соответствии с третьей теоремой Фредгольма,

$$(f, \varphi_{j+i}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r_j - 1.$$

В этом случае решение уравнения (21) не единственно и его общее решение, согласно формуле (38) § 1.11, дается формулой

$$\varphi(x) = \lambda_j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda_j} \varphi_k(x) + f(x) + \sum_{i=0}^{r_j-1} c_i \varphi_{j+i}(x), \quad (29)$$

где c_i — произвольные постоянные.

5. Положительно определенные ядра. Ядро $\mathcal{K}(x, y)$ называется положительно определенным, если соответствующий оператор K положителен (см. § 1.12), т. е.

$$(Kf, f) \geq 0, \quad f \in \mathcal{L}_2(G).$$

Всякое положительно определенное ядро $\mathcal{K}(x, y)$ эрмитово.

Действительно, поскольку оператор K эрмитов (см. § 1.12), то и его ядро $\mathcal{K}(x, y)$ эрмитово (см. § 19.1).

Для того чтобы эрмитово непрерывное ядро $\mathcal{K}(x, y)$ было положительно определенным, необходимо и достаточно, чтобы все его характеристические числа λ_k были положительными.

Действительно, если $\lambda_k > 0$, то в силу (20), $(Kf, f) \geq 0$, $f \in \mathcal{L}_2(G)$, так что ядро $\mathcal{K}(x, y)$ положительно определено. Обратно, если ядро $\mathcal{K}(x, y)$ положительно определено, то

$$\frac{1}{\lambda_k} = (K\varphi_k, \varphi_k) \geq 0, \quad \text{т. е. } \lambda_k > 0.$$

Если $\mathcal{K}(x, y)$ — положительно определенное непрерывное ядро, то справедлив следующий вариационный принцип

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup_{\substack{f \in \mathcal{L}_2(G) \\ (f, \varphi_i) = 0, i=1, 2, \dots, k-1}} \frac{(Kf, f)}{\|f\|^2}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (30)$$

причем supremum в (30) достигается на любой собственной функции, соответствующей характеристическому числу λ_k .

Действительно, пользуясь формулой (20) и учитывая неравенства $\lambda_i \geq \lambda_k > 0, i \geq k$, при всех $f \in \mathcal{L}_2(G)$ таких, что $(f, \varphi_i) = 0, i=1, 2, \dots, k-1$, получаем

$$\frac{(Kf, f)}{\|f\|^2} = \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(f, \varphi_i)^2}{\lambda_i} \leq \frac{1}{\lambda_k \|f\|^2} \sum_{i=k}^{\infty} (f, \varphi_i)^2,$$

и, стало быть, в силу неравенства Бесселя справедливо неравенство

$$\frac{(Kf, f)}{\|f\|^2} \leq \frac{1}{\lambda_k}. \quad (31)$$

С другой стороны, при $f = \varphi_k$ имеем

$$\frac{(K\varphi_k, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{1}{\lambda_k}. \quad (32)$$

Неравенство (31) и равенство (32) устанавливают справедливость вариационного принципа (30).

Пологая в (30) $k=1$, получаем

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{f \in \mathcal{L}_2(G)} \frac{(Kf, f)}{\|f\|^2}. \quad (33)$$

6. Распространение теории Гильберта — Шмидта на интегральные уравнения с эрмитовым полярным ядром. Теорема Гильберта — Шмидта и следствия из нее, установленные в этом параграфе для интегральных уравнений с эрмитовым непрерывным ядром, переносятся и на интегральные уравнения с эрмитовым слабо полярным ядром (см. § 17.4)

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{\mathcal{K}(x, y)}{|x-y|^\alpha}, \quad \alpha < \frac{n}{2}, \quad \mathcal{K}^*(x, y) = \mathcal{K}(x, y).$$

Действительно, для таких ядер справедливы результаты § 19. Поэтому, как показывает анализ доказатель-

ств теоремы Гильберта — Шмидта, для распространения этой теоремы на слабо полярные ядра достаточно установить следующую лемму.

Лемма. Интегральный оператор K со слабо полярным ядром $\mathcal{K}(x, y)$ переводит $\mathcal{L}_2(G)$ в $C(G)$ и ограничен:

$$\|Kf\|_C \leq L \|f\|, \quad (34)$$

$$L^2 = \max_{x \in G} \int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{L}_2(G)$. Пользуясь неравенством Коши — Буняковского, при всех $x \in G$ имеем

$$\begin{aligned} |(Kf)(x)| &= \left| \int_G \mathcal{K}(x, y) f(y) dy \right| \leq \\ &\leq \left[\int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \right]^{1/2} \|f\| \leq L \|f\|. \end{aligned} \quad (35)$$

Далее, из результатов § 1.6 вытекает, что функции

$$(Kf)(x) = \int_G \frac{\mathcal{K}(x, y)}{|x-y|^\alpha} f(y) dy, \quad \int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy$$

непрерывны на G . Поэтому оператор K переводит $\mathcal{L}_2(G)$ в $C(G)$ и неравенство (34) следует из неравенства (35). Лемма доказана.

Пусть теперь эрмитово ядро $\mathcal{K}(x, y)$ — полярное, $\alpha < n$. Для таких ядер справедливы результаты § 19. Поэтому, как это следует из доказательства теоремы Гильберта — Шмидта, ряд (9) сходится в $\mathcal{L}_2(G)$. Учитывая теперь, что при $p \geq p_1 = \left\lfloor \frac{n}{2(n-\alpha)} \right\rfloor + 1$ повторные ядра $\mathcal{K}^p(x, y)$ эрмитовы и слабо полярные (см. §§ 17.4 и 19.4), заключаем, что билинейные ряды (12) сходятся регулярно при $p \geq 2p_1$. Далее, формулы (19) и (20), а следовательно, и все результаты § 20.5 сохраняются. Формула Шмидта (22) остается справедливой с заменой равномерной сходимости на сходимость в $\mathcal{L}_2(G)$.

Замечание. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \varphi(y) \mathcal{K}(x, y) dy + f(x), \quad (36)$$

где ядро $\mathcal{K}(x, y)$ эрмитово и вес $\rho(y)$ — положительная и непрерывная функция на G . Замена неизвестной функции $\psi = \sqrt{\rho} \varphi$ преобразует уравнение (36) к эквивалентному интегральному уравнению

$$\psi(x) = \lambda \int_G \sqrt{\rho(x)\rho(y)} \mathcal{K}(x, y) \psi(y) dy + \sqrt{\rho(x)} f(x)$$

с эрмитовым ядром $\sqrt{\rho(x)\rho(y)} \mathcal{K}(x, y)$. Переходя к исходному уравнению (36), убеждаемся, что теория Гильберта — Шмидта без изменений переносится и на интегральное уравнение (36) с эрмитовым ядром $\rho(y) \mathcal{K}(x, y)$, если его рассматривать в пространстве $\mathcal{L}_2(G; \rho)$ со скалярным произведением $(f, g)_\rho$ (см. § 1.9, замечание).

7. Теорема Ентча. Многие задачи математической физики сводятся к интегральным уравнениям с вещественным эрмитовым ядром. Такие ядра называются *симметричными*; они удовлетворяют соотношению $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(y, x)$.

Собственные функции симметричного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ можно выбрать вещественными.

Действительно, если $\varphi_0 = \varphi_1 + i\varphi_2$ — собственная функция ядра $\mathcal{K}(x, y)$, соответствующая характеристическому числу λ_0 :

$$\varphi_0 = \varphi_1 + i\varphi_2 = \lambda_0 \mathcal{K} \varphi_0 = \lambda_0 \mathcal{K} \varphi_1 + i \lambda_0 \mathcal{K} \varphi_2,$$

то, в силу вещественности $\mathcal{K}(x, y)$ и λ_0 , заключаем отсюда, что отличные от нуля вещественная и мнимая части φ_1 и φ_2 функции φ_0 также являются собственными функциями, соответствующими λ_0 :

$$\varphi_1 = \lambda_0 \mathcal{K} \varphi_1, \quad \varphi_2 = \lambda_0 \mathcal{K} \varphi_2.$$

Ядро $\mathcal{K}(x, y)$ назовем *положительным ядром*, если $\mathcal{K}(x, y) > 0$, $x \in G$, $y \in G$.

Очевидно, если ядро $\mathcal{K}(x, y)$ положительно, то и все его повторные ядра $\mathcal{K}^n(x, y)$ положительны.

Теорема Ентча. Если симметричное полярное ядро $\mathcal{K}(x, y)$ положительно, то его наименьшее по модулю характеристическое число λ_1 — положительное и простое; соответствующая собственная функция $\varphi_1(x)$ положительна в G .

Доказательство. Пусть λ_1 — наименьшее по модулю (вещественное) характеристическое число симметричного положительного полярного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ и φ_1 — произвольная вещественная собственная функция, соответствующая λ_1 , $\varphi_1 = \lambda_1 \mathcal{K} \varphi_1$. Тогда λ_1^2 — наименьшее характер-

стическое число положительно определенного полярного ядра $\mathcal{K}_2(x, y)$ и φ_1 — собственная функция, соответствующая λ_1^2 , $\varphi_1 = \lambda_1^2 \mathcal{K}_2 \varphi_1$.

Докажем, что $\varphi_1(x)$ не может менять знак в области G , т. е.

$$|\varphi_1(x) \varphi_1(y)| = \varphi_1(x) \varphi_1(y), \quad x \in G, \quad y \in G.$$

Действительно, в противном случае, в силу непрерывности функции $\varphi_1(x)$ (см. § 18.5), нашлись бы такие окрестности $U(x'; r) \subset G$ и $U(y'; r) \subset G$, что

$$|\varphi_1(x) \varphi_1(y)| > \varphi_1(x) \varphi_1(y), \quad x \in U(x'; r), \quad y \in U(y'; r),$$

и потому, в силу условия $\mathcal{K}_2(x, y) > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{(K^2 \varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)^2} &= \frac{1}{(\varphi_1, \varphi_1)^2} \iint_G \mathcal{K}_2(x, y) |\varphi_1(x) \varphi_1(y)| dx dy > \\ &> \frac{1}{(\varphi_1, \varphi_1)^2} \iint_G \mathcal{K}_2(x, y) \varphi_1(x) \varphi_1(y) dx dy = \frac{(K^2 \varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)^2} = \frac{1}{\lambda_1^2}, \end{aligned}$$

что противоречит вариационному принципу (33).

Докажем, что функция $\varphi_1(x)$ не может обращаться в нуль в области G и, стало быть, может быть выбрана положительной в G .

Действительно, в противном случае найдется точка $x' \in G$ такая, что

$$\varphi_1(x') = \lambda_1^2 \int_G \mathcal{K}_2(x', y) \varphi_1(y) dy = 0,$$

откуда, в силу условия $\mathcal{K}_2(x, y) > 0$, следует противоречие: $\varphi_1(y) \equiv 0$, $y \in G$.

Из положительности $\varphi_1(x)$ следует положительность λ_1 , ибо $\mathcal{K}(x, y) > 0$ и $\lambda_1 = \frac{K \varphi_1}{\varphi_1} > 0$.

Докажем, что λ_1 — простое характеристическое число.

Действительно, если бы существовала линейно независимая с φ_1 вещественная функция φ_2 , соответствующая λ_1 , то при всех вещественных с их линейная комбинация $\varphi_1 + c\varphi_2$ также была бы вещественной собственной функцией, соответствующей λ_1 , и, следовательно, по доказанному она не могла бы обращаться в нуль в области G , что ввиду произвольности c невозможно. Теорема доказана.

Замечание. Теорема Ентча справедлива для любого полярного положительного ядра (без предположения его симметрии). Соответствующая теорема справедлива и для матриц с положительными элементами; в этом случае она называется теоремой Перрона.

8. Метод Келлога. Для приближенного нахождения наименьшего по модулю характеристического числа λ_1 и соответствующих ему собственных функций эрмитова полярного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ применяется метод последовательных приближений Келлога. Пусть вещественная функция $\varphi^{(0)}$ из $\mathcal{L}_2(G)$ не ортогональна ко всем собственным функциям, соответствующим λ_1 . Составим последовательности

$$\varphi_{(p)}(x) = \frac{\varphi^{(p)}(x)}{|\varphi^{(p)}|}, \quad \lambda_{(p)} = \frac{|\varphi^{(p-1)}|}{|\varphi^{(p)}|}, \quad p=1, 2, \dots, \quad (37)$$

где $\varphi^{(p)} = K^p \varphi^{(0)}$ — итерации функции $\varphi^{(0)}$ (см. § 17.1). Члены $\lambda_{(p)}$ и $\varphi_{(p)}(x)$ этих последовательностей и принимаются за приближения к $|\lambda_1|$ и к соответствующей собственной функции $\varphi_1(x)$.

Дадим обоснование метода Келлога для интегральных уравнений с симметричным слабо полярным положительным ядром. По теореме Ентча для таких ядер λ_1 — положительное и простое, так что $0 < \lambda_1 < |\lambda_2| \leq \dots$; соответствующая собственная функция $\varphi_1(x)$ положительна при $x \in G$; собственные функции $\varphi_k(x)$ вещественны (см. § 20.7).

Теорема*). Пусть $\mathcal{K}(x, y)$ — симметричное слабо полярное положительное ядро. Тогда для любой функции $\varphi^{(0)}(x) \geq 0$, $|\varphi^{(0)}| = 1$, последовательность $\{\lambda_{(p)}\}$ сходится, монотонно убывая, к λ_1 и последовательность $\{\varphi_{(p)}\}$ сходится к φ_1 в $\mathcal{L}_2(G)$ и в $C(G)$, причем справедливы оценки

$$0 \leq \lambda_{(p)} - \lambda_1 \leq \frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2p-2} \frac{1-c_1^2}{c_1}, \quad p=2, 3, \dots; \quad (38)$$

$$|\varphi_{(p)} - \varphi_1| \leq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^p \frac{\sqrt{1-c_1^2}}{c_1}, \quad p=1, 2, \dots; \quad (39)$$

$$\|\varphi_{(p)} - \varphi_1\| \leq L \lambda_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^p \frac{\sqrt{1-c_1^2}}{c_1}, \quad p=2, 3, \dots, \quad (40)$$

где $c_1 = (\varphi^{(0)}, \varphi_1)$, $L^2 = \max_{x \in G} \int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy$.

* См. В. С. Владимирова [1].

Доказательство. По теореме Гильберта—Шмидта (см. §§ 20.1 и 20.6) имеем

$$\varphi^{(p)}(x) = K^p \varphi^{(0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k^p} \varphi_k(x), \quad p=1, 2, \dots, \quad (41)$$

где, в силу неравенства Бесселя,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq |\varphi^{(0)}|^2 = 1, \quad c_k = (\varphi^{(0)}, \varphi_k), \quad c_1 > 0, \quad (42)$$

и ряды (41) сходятся равномерно по $x \in G$.

Из равенств (41), в силу $(\varphi_k, \varphi_k) = \delta_{ik}$, вытекают равенства

$$|\varphi^{(p)}|^2 = (\varphi^{(p)}, \varphi^{(p)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2}{\lambda_k^{2p}}, \quad p=1, 2, \dots \quad (43)$$

Докажем, что последовательность $\lambda_{(p)}$, $p=1, 2, \dots$, монотонно убывает и $\lambda_{(p)} \geq \lambda_1$.

Действительно, пользуясь неравенством Коши—Буняковского, получаем

$$|\varphi^{(p)}|^2 = (\varphi^{(p)}, \varphi^{(p)}) = (K \varphi^{(p-1)}, \varphi^{(p)}) = (\varphi^{(p-1)}, K \varphi^{(p)}) = (\varphi^{(p-1)}, \varphi^{(p+1)}) \leq |\varphi^{(p-1)}| |\varphi^{(p+1)}|,$$

откуда и из (37) следуют неравенства

$$\lambda_{(p+1)} = \frac{|\varphi^{(p)}|}{|\varphi^{(p+1)}|} \leq \frac{|\varphi^{(p-1)}|}{|\varphi^{(p)}|} = \lambda_{(p)}, \quad p=1, 2, \dots$$

Далее, из вариационного принципа (5) § 19.3 (см. также § 19.4) выводим

$$\lambda_{(p)} = \frac{|\varphi^{(p-1)}|}{|\varphi^{(p)}|} = \frac{|\varphi^{(p-1)}|}{|K \varphi^{(p-1)}|} \geq \inf_{f \in \mathcal{L}_2(G)} \frac{|f|}{|Kf|} = \lambda_1, \quad p=1, 2, \dots,$$

что и утверждалось.

Принимая во внимание равенства (43), получаем

$$\begin{aligned} \lambda_{(p)} - \lambda_1 &= \frac{|\varphi^{(p-1)}|}{|\varphi^{(p)}|} - \lambda_1 = \\ &= \lambda_1 \left[\frac{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p-2}}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p}} \right] - \lambda_1, \quad p=2, 3, \dots \quad (44) \end{aligned}$$

Отметим неравенства, справедливые при $x \geq y \geq 0$:

$$\sqrt{\frac{1+x}{1+y}} - 1 \leq \frac{1}{2}(x-y), \quad 1 + \frac{1+x}{1+y} - \frac{2}{\sqrt{1+y}} \leq x. \quad (45)$$

Применяя первое из неравенств (45) при

$$x = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p-2} \quad \text{и} \quad y = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p}$$

к правой части равенств (44) и пользуясь (42), получим неравенства (38):

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda_{(p)} - \lambda_1 &\leq \frac{\lambda_1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p-2} \left(1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_k^2}\right) \leq \\ &\leq \frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2p-2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \leq \frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2p-2} \frac{1-c_1^2}{c_1^2}. \end{aligned}$$

Докажем оценки

$$\left| \frac{\varphi^{(p)}}{\lambda_1^p |\varphi^{(p+q)}|} - \varphi_1 \right| \leq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^p \frac{\sqrt{1-c_1^2}}{c_1}, \quad (46)$$

$p=1, 2, \dots; \quad q=0, 1, \dots$

Пользуясь формулами (41) и (43), получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi^{(p)}}{\lambda_1^p |\varphi^{(p+q)}|} - \varphi_1 \right|^2 &= \\ &= \left| \left(\frac{c_1}{\lambda_1^{p+q} |\varphi^{(p+q)}|} - 1 \right) \varphi_1 + \frac{1}{\lambda_1^q |\varphi^{(p+q)}|} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k^q} \varphi_k \right|^2 = \\ &= \left(\frac{c_1}{\lambda_1^{p+q} |\varphi^{(p+q)}|} - 1 \right)^2 + \frac{1}{\lambda_1^{2q} |\varphi^{(p+q)}|^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^2}{\lambda_k^{2q}} = \\ &= 1 + \frac{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p}}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p+2q}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p+2q}}}. \quad (47) \end{aligned}$$

Применяя второе из неравенств (45) при

$$x = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p} \quad \text{и} \quad y = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p+2q}$$

к правой части равенств (47) и учитывая (42), получаем неравенства (46):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi^{(p)}}{\lambda_1^p |\varphi^{(p+q)}|} - \varphi_1 \right|^2 &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p} \leq \\ &\leq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2p} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \leq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2p} \frac{1-c_1^2}{c_1^2}. \end{aligned}$$

Неравенства (39) вытекают из неравенств (46) при $q=0$ в силу (37). Докажем неравенства (40). Учитывая неравенство (34) § 20.6, получаем

$$\begin{aligned} |\varphi_{(p)} - \varphi_1|_C &= \left| \frac{\varphi^{(p)}}{|\varphi^{(p)}|} - \varphi_1 \right|_C = \left| K \left(\frac{\varphi^{(p-1)}}{|\varphi^{(p-1)}|} - \lambda_1 \varphi_1 \right) \right|_C \leq \\ &\leq L \lambda_1 \left| \frac{\varphi^{(p-1)}}{\lambda_1 |\varphi^{(p-1)}|} - \varphi_1 \right|. \end{aligned}$$

Применяя к правой части полученного неравенства неравенство (46) при $q=1$ с заменой p на $p-1$, получим оценки (40). Теорема доказана.

Замечание 1. Доказанная теорема о сходимости метода Келдыша справедлива и для симметричных полирных положительных ядер. При этом оценки (40) имеют место при $p \geq 2p_1$ (см. § 20.6).

Замечание 2. Аналогично доказывается, что метод последовательных приближений § 17.1 при $|\lambda| < |\lambda_1|$ сходится в $C(G)$ с погрешностью $O\left(\left|\frac{\lambda}{\lambda_1}\right|^p\right)$, если ядро $\mathcal{K}(x, y)$ эрмитово и полирное.

9. Теорема Мерсера. Если эрмитово непрерывное ядро $\mathcal{K}(x, y)$ имеет конечное число отрицательных характеристических чисел, то его билинейный ряд (16) сходится регулярно на $G \times G$.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. Если непрерывное ядро $\mathcal{K}(x, y)$ — положительно определенное, то

$$\mathcal{K}(x, x) \geq 0, \quad x \in G.$$

Доказательство. Ядро $\mathcal{K}(x, y)$ эрмитово (см. § 20.5), и тогда $\mathcal{K}(x, x) = \overline{\mathcal{K}(x, x)}$ вещественно. Если бы суще-

существовала такая точка $x_0 \in G$, что $\mathcal{K}(x_0, x_0) < 0$, то по непрерывности нашлась бы такая окрестность $U \subset G$ точки x_0 , что $\operatorname{Re} \mathcal{K}(x, y) < 0$, $x \in U$, $y \in U$. Выбрав непрерывную неотрицательную функцию $\varphi(x) \not\equiv 0$ с носителем в U , получим

$$\begin{aligned} (K\varphi, \varphi) &= \iint_G \mathcal{K}(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy = \\ &= \iint_G \operatorname{Re} \mathcal{K}(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy < 0, \end{aligned}$$

что противоречит положительной определенности ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы Мерсера. Эту теорему достаточно доказать для положительно определенных ядер $\mathcal{K}(x, y)$ в силу результатов § 20.1. А тогда и все ядра $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$, определяемые формулой (3), будут непрерывными положительно определенными (см. § 20.5). По лемме $\mathcal{K}^{(p)}(x, x) \geq 0$, $x \in G$, так что

$$\sum_{k=1}^p \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \leq \mathcal{K}(x, x) \leq M, \quad x \in G, \quad p=1, 2, \dots$$

Отсюда, используя неравенство Коши — Буняковского,

$$\sum_{k=p}^q \frac{|\varphi_k(x) \varphi_k(y)|}{\lambda_k} \leq \left[\sum_{k=p}^q \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \sum_{k=p}^q \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k} \right]^{1/2}. \quad (48)$$

заключаем о равномерной сходимости по x на G ряда (16) при каждом $y \in G$. (Напомним, что этот ряд сходится к ядру $\mathcal{K}(x, y)$ в $\mathcal{L}_2(G)$ равномерно по $y \in G$, см. § 20.3). Следовательно, в равенстве (16) можно положить $x=y$, и мы получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} = \mathcal{K}(x, x). \quad (49)$$

По лемме Дини (см. § 1.3) ряд (49) сходится равномерно на G , а тогда из неравенства (48) следует регулярная сходимость билинейного ряда (16). Теорема доказана.

Следствие. В условиях теоремы Мерсера

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \int_G \mathcal{K}(x, x) dx. \quad (50)$$

ГЛАВА V

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В этой главе изучаются краевые задачи для уравнений эллиптического типа, в частности, теория потенциала для уравнений Лапласа и Пуассона в пространстве и на плоскости и для уравнения Гельмгольца в пространстве. Кратко излагается также теория функций Бесселя и сферических функций.

Если не оговорено особо, то область G предполагается ограниченной, а ее граница S — кусочно-гладкой поверхностью. Обозначим через G_1 внешность G , $G_1 = R^n \setminus G$, $G \cup S \cup G_1 = R^n$.

§ 21. Задача на собственные значения

1. Постановка задачи на собственные значения. Рассмотрим следующую линейную однородную краевую задачу для уравнения эллиптического типа (см. § 4.4):

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u, \quad x \in G, \quad (1)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0. \quad (2)$$

Предполагаем (см. § 4.1 и § 4.4), что

$$\left. \begin{aligned} p \in C^1(\bar{G}), \quad q \in C(\bar{G}), \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad x \in G, \\ \alpha \in C(S), \quad \beta \in C(S), \quad \alpha(x) \geq 0, \quad \beta(x) \geq 0, \\ \alpha(x) + \beta(x) > 0, \quad x \in S. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Пусть S_0 — та часть S , где $\alpha(x) > 0$ и $\beta(x) > 0$ одновременно.

Задача (1) — (2) состоит в нахождении функции $u(x)$ класса $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, удовлетворяющей уравнению (1) в области G и граничным условиям (2) на границе S . Очевидно, задача (1) — (2) всегда имеет нулевое решение. Это решение не представляет интереса. Поэтому задачу

(1) — (2) необходимо рассматривать как задачу на собственные значения (см. § 1.11) для оператора

$$L = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad}) + q.$$

К области определения $\mathcal{H}_L$ оператора L (см. § 1.10) отнесем все функции $f(x)$ класса $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, удовлетворяющие граничному условию (2) и условию $Lf \in \mathcal{L}_2(G)$. По лемме 2 § 5.2 $\mathcal{D}(G)$ плотно в $\mathcal{L}_2(G)$, а $\mathcal{D}(G)$, очевидно, содержится в $\mathcal{H}_L$. Поэтому $\mathcal{H}_L$ плотно в $\mathcal{L}_2(G)$.

Итак, задача (1) — (2) состоит в нахождении тех значений λ (собственных значений оператора L), при которых уравнение

$$Lu = \lambda u \quad (4)$$

имеет ненулевые решения $u(x)$ из области определения $\mathcal{H}_L$ (собственные функции, соответствующие этому собственному значению).

Замечание. Собственные функции гладкости $C^2(\bar{G})$ существуют не всегда. Поэтому в некоторых задачах требование гладкости ослабляется. Это естественно для краевых задач I рода (не содержащих $\frac{\partial u}{\partial n}$, см. § 4.4). Для остальных краевых задач под $\frac{\partial u}{\partial n}$ на S понимают так называемую правильную нормальную производную (см. § 4.5, замечание; § 24.2).

2. Формулы Грина. Если $u \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ и $v \in C^1(\bar{G})$, то справедлива первая формула Грина:

$$\int_G v Lu dx = \int_G p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_S p v \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_G q uv dx. \quad (5)$$

Для доказательства формулы (5) возьмем произвольную область G' с кусочно-гладкой границей S' , строго лежащую в области G (рис. 70). Так как $u \in C^2(G)$, то $u \in C^2(\bar{G}')$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{G'} v Lu dx &= \int_{G'} v [-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu] dx = \\ &= - \int_{G'} \operatorname{div}(pv \operatorname{grad} u) dx + \int_{G'} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{G'} q uv dx, \end{aligned}$$

Пользуясь теперь формулой Гаусса — Остроградского (см. § 2.2), получаем

$$\int_{G'} v Lu dx = \int_{G'} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_{S'} p v \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{G'} q uv dx.$$

Устремляя в полученном равенстве G' к G и пользуясь тем, что u и $v \in C^1(\bar{G})$, заключаем, что предел правой части существует и, следовательно, существует предел левой части и справедливо равенство (5). При этом интеграл слева в (5) необходимо понимать как несобственный.

Если u и $v \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, то справедлива вторая формула Грина:

$$\begin{aligned} \int_G (v Lu - u Lv) dx &= \\ &= \int_S p \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (6) \end{aligned}$$

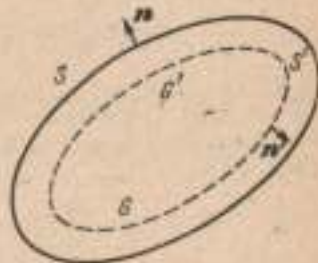


Рис. 70.

Для доказательства формулы (6) в первой формуле Грина (5) поменяем местами u и v :

$$\int_G u Lv dx = \int_G p \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_S p u \frac{\partial v}{\partial n} dS + \int_G q uv dx,$$

и вычтем полученное равенство из равенства (5). В результате получим вторую формулу Грина (6).

В частности, при $p=1$, $q=0$ формулы Грина (5) и (6) превращаются в следующие (ср. с формулой (29) § 6.5):

$$\int_G v \Delta u dx = - \int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad (7)$$

$$\int_G (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \quad (8)$$

3. Свойства оператора L . Оператор L эрмитов:

$$(Lf, g) = (f, Lg), \quad f, g \in \mathcal{H}_L. \quad (9)$$

Действительно, так как функции f и $\bar{g}$ принадлежат области $\mathcal{M}_L$, то $Lf \in \mathcal{L}_2(G)$ и $L\bar{g} = \overline{Lg} \in \mathcal{L}_2(G)$ и вторая формула Грина (6) при $u=f$ и $v=\bar{g}$ принимает вид

$$\int_G (\bar{g}Lf - fL\bar{g}) dx = (Lf, g) - (f, Lg) = \\ = \int_S p \left(f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS. \quad (10)$$

Далее, функции f и $\bar{g}$ удовлетворяют граничному условию (2):

$$\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad \alpha \bar{g} + \beta \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} \Big|_S = 0. \quad (11)$$

По предположению (3) $\alpha + \beta > 0$ на S . Поэтому однородная система линейных алгебраических уравнений (11) имеет ненулевое решение (α, β) , и, значит, ее определитель равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \bar{g} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} \end{vmatrix} \Big|_S = f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_S = 0.$$

Учитывая полученное равенство, из формулы (10) получаем равенство (9), которое и означает, что оператор L эрмитов (см. § 1.12).

Пусть $f \in \mathcal{M}_L$. Полагая в первой формуле Грина (5) $u=f$ и $v=f$ и учитывая, что $Lf \in \mathcal{L}_2(G)$, получаем

$$(Lf, f) = \int_G p |\text{grad } f|^2 dx - \int_S p f \frac{\partial f}{\partial n} dS + \int_G q |f|^2 dx. \quad (12)$$

Из граничного условия (2) следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta} f, \quad \text{если } \beta(x) > 0, \quad x \in S; \\ f = 0, \quad \text{если } \beta(x) = 0, \quad x \in S.$$

Подставляя эти соотношения в равенство (12), получаем выражение для квадратичной формы:

$$(Lf, f) = \int_G (p |\text{grad } f|^2 + q |f|^2) dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} |f|^2 dS, \quad f \in \mathcal{M}_L, \quad (13)$$

где S_0 — та часть S , где $\alpha(x) > 0$ и $\beta(x) > 0$.

Квадратичная форма (Lf, f) , $f \in \mathcal{M}_L$, называется *интегралом энергии*.

В силу предположений (3) в правой части (13) все три слагаемых неотрицательны. Поэтому, отбрасывая второе и третье слагаемые и оценивая снизу первое слагаемое, получаем неравенство

$$(Lf, f) \geq \int_G p |\text{grad } f|^2 dx \geq \min_{x \in \bar{G}} p(x) \int_G |\text{grad } f|^2 dx,$$

т. е.

$$(Lf, f) \geq p_0 \|\text{grad } f\|^2, \quad f \in \mathcal{M}_L, \quad (14)$$

где $p_0 = \min p(x)$; в силу непрерывности и положительности функции p на $\bar{G}$, $p_0 > 0$.

Из неравенства (14) вытекает, что оператор L — *положительный* (см. § 1.12), т. е.

$$(Lf, f) \geq 0, \quad f \in \mathcal{M}_L. \quad (15)$$

Отсюда, в частности, опять следует эрмитовость оператора L (см. § 1.12).

4. Свойства собственных значений и собственных функций оператора L .

Все собственные значения оператора L неотрицательны.

Это утверждение вытекает из положительности оператора (см. § 1.12).

Собственные функции оператора L , соответствующие различным и собственным значениям, ортогональны.

Это утверждение вытекает из эрмитовости оператора (см. § 1.12).

Собственные функции оператора L можно выбрать вещественными.

Это утверждение вытекает из вещественности оператора L (ср. § 20.7). Действительно, пусть λ_0 — (вещественное) собственное значение и u_0 — соответствующая собственная функция оператора L ,

$$Lu_0 = \lambda_0 u_0, \quad u_0 \in \mathcal{M}_L. \quad (16)$$

Тогда, отделяя в равенстве (16) вещественную и мнимую части, получаем, что отличные от нуля вещественная и мнимая части собственной функции $u_0 = u_1 + iu_2$ также являются собственными функциями, соответствующими собственному значению λ_0 , $Lu_j = \lambda_0 u_j$, $j = 1, 2$.

Лемма. Для того чтобы $\lambda=0$ было собственным значением оператора L , необходимо и достаточно, чтобы $q=0$ и $\alpha=0$. При этом $\lambda=0$ — простое собственное значение и $u_0 = \text{const}$ — соответствующая собственная функция.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lambda=0$ — собственное значение оператора L и u_0 — соответствующая собственная функция, так что $Lu_0=0$, $u_0 \in \mathcal{M}_1$. Применяя к функции u_0 формулу (13), получаем

$$0 = (Lu_0, u_0) = \int_G (p |\text{grad } u_0|^2 + q |u_0|^2) dx + \int_S p \frac{\partial u_0}{\partial n} |u_0|^2 dS,$$

откуда, учитывая предположения (3), выводим

$$p \text{ grad } u_0 = 0, \quad qu_0 = 0, \quad x \in G,$$

т. е. $u_0 = \text{const} \neq 0$ и $q=0$. Из граничного условия (2) для собственной функции $u_0 = \text{const}$ следует, что $\alpha=0$. Необходимость условий доказана. При этом установлено, что $u_0 = \text{const}$ — единственная собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda=0$, т. е. это собственное значение — простое.

Достаточность. Если $q=0$ и $\alpha=0$, то, в силу (3), $\beta > 0$ и задача (1) — (2) превращается в следующую:

$$-\text{div}(p \text{ grad } u) = \lambda u, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0,$$

для которой $u_0 = \text{const}$ есть собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda=0$. Лемма доказана.

При $n \geq 2$ будем считать, что в граничном условии (2) либо $\beta=0$, либо $\beta=1$, т. е. это условие имеет вид

$$\text{либо } u \Big|_S = 0, \quad \text{либо } \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \Big|_S = 0, \quad \alpha \geq 0. \quad (17)$$

Тогда, если граница S области G — достаточно гладкая поверхность и коэффициенты $p > 0$, $q \geq 0$ и $\alpha \geq 0$ — достаточно гладкие функции, справедлива следующая

Теорема 1. Множество собственных значений оператора L не имеет конечных предельных точек; каждое собственное значение имеет конечную кратность. Всякая функция из $\mathcal{M}_1$ разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям оператора L .

Эта теорема будет доказана для двух частных случаев: 1) для задачи Штурма — Лиувилля (см. § 22) и 2) для

задачи Дирихле (см. § 28). Доказательство этой теоремы содержится в книгах В. П. Михайлова [1], гл. IV и О. А. Ладыженской [1], гл. II.

На основании приведенной теоремы и предыдущих утверждений все собственные значения оператора L можно переупорядочить в порядке возрастания их величины:

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lambda_k \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty, \quad (18)$$

повторяя в этом ряд λ_k столько раз, какова его кратность. Соответствующие собственные функции обозначим через $X_1, X_2, \dots$, так что в ряде (18) каждому собственному значению λ_k соответствует собственная функция X_k .

$$LX_k = \lambda_k X_k, \quad k=1, 2, \dots, \quad X_k \in \mathcal{M}_1.$$

При этом собственные функции $\{X_k\}$ можно выбрать вещественными и ортонормальными (см. § 1.12), так что

$$(LX_k, X_l) = \lambda_k (X_k, X_l) = \lambda_k \delta_{kl}. \quad (19)$$

Далее, всякая функция f из $\mathcal{M}_1$ разлагается в ряд Фурье по ортонормальной системе $\{X_k\}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, X_k) X_k(x), \quad (20)$$

и этот ряд сходится регулярно на $\bar{G}$. Но $\mathcal{M}_1$ плотно в $\mathcal{L}_2(G)$ (см. § 21.1). Отсюда и из теоремы § 1.9 вытекает следующая

Теорема 2. Система собственных функций оператора L полна в $\mathcal{L}_2(G)$.

Пусть $f \in \mathcal{M}_1$. Умножая ряд (20) скалярно слева на Lf и учитывая, что $Lf \in \mathcal{L}_2(G)$, получаем формулу для интеграла энергии

$$\begin{aligned} (Lf, f) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{Lf}, X_k) (Lf, X_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, LX_k) (\overline{f}, X_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (f, \lambda_k X_k) (\overline{f}, X_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |f, X_k|^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь установим следующий вариационный принцип (ср. § 20.5):

$$\lambda_k = \inf_{\substack{f \in \mathcal{M}_1 \\ (f, X_i) = 0, \quad i=1, 2, \dots, k-1}} \frac{(Lf, f)}{(f, f)}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (22)$$

причем infimum в (22) достигается на любой собственной функции, соответствующей собственному значению λ_k .

Действительно, пользуясь формулой (21) для квадратичной формы (Lf, f) и учитывая неравенства (18): $\lambda_i \geq \lambda_k \geq 0$, $i \geq k$, при всех $f \in \mathcal{H}_1$ таких, что $(f, X_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, получаем

$$(Lf, f) = \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i |(f, X_i)|^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^{\infty} |(f, X_i)|^2.$$

Но, в силу теоремы 2, справедливо равенство Парсеваля (см. § 1.8)

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(f, X_i)|^2 = \sum_{i=k}^{\infty} |(f, X_i)|^2 = \|f\|^2,$$

и потому

$$\lambda_k \leq \frac{(Lf, f)}{\|f\|^2}.$$

С другой стороны, при $f = X_k$, в силу (19), имеем

$$\frac{(LX_k, X_k)}{\|X_k\|^2} = \lambda_k, \quad (X_k, X_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Этим установлена справедливость вариационного принципа (22).

Полагая в (22) $k=1$, получаем, в частности,

$$\lambda_1 = \inf_{f \in \mathcal{H}_1} \frac{(Lf, f)}{\|f\|^2}.$$

Применяя формулу (21) к функциям

$$\eta_p = f - \sum_{i=1}^p (f, X_i) X_i, \quad p = 1, 2, \dots,$$

из $\mathcal{H}_1$ и учитывая, что

$$(\eta_p, X_k) = \left(f - \sum_{i=1}^p (f, X_i) X_i, X_k \right) = \begin{cases} 0, & k = 1, 2, \dots, p, \\ (f, X_k), & k = p+1, \dots, \end{cases}$$

получаем

$$(L\eta_p, \eta_p) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda_k |(f, X_k)|^2.$$

Отсюда и из сходимости ряда (21) следует, что

$$(L\eta_p, \eta_p) \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Применяя неравенство (14) к функциям η_p и учитывая (23), получаем при $p \rightarrow \infty$

$$\| \text{grad } \eta_p \|^2 = \left\| \text{grad } f - \sum_{i=1}^p (f, X_i) \text{grad } X_i \right\|^2 \leq \frac{1}{p_k} (L\eta_p, \eta_p) \rightarrow 0.$$

Полученное соотношение означает, что

$$\text{grad } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, X_k) \text{grad } X_k(x), \quad (24)$$

причем ряд (24) сходится к $\text{grad } f$ в $\mathcal{L}_2(G)$.

Итак, получена следующая

Теорема 3. Если $f \in \mathcal{H}_1$, то ряд (20) можно дифференцировать почленно по x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, один раз и полученные ряды (24) будут сходиться к $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в $\mathcal{L}_2(G)$.

Замечание. Полученные результаты соответственно распространяются и на краевую задачу на собственные значения для уравнения $Lu = \lambda u$, где вес $\rho(x) > 0$ — непрерывная функция на G , если эту задачу рассматривать в пространстве $\mathcal{L}_2(G; \rho)$ (ср. § 1.9, замечание).

5. Физический смысл собственных значений и собственных функций. При $p=1$ и $\beta=0$ задача на собственные значения (1) — (2) принимает вид

$$-\Delta u + q(x)u = \lambda u, \quad u|_S = 0. \quad (25)$$

Как известно*), собственные значения задачи (25) определяют уровни энергии квантовой частицы, движущейся во внешнем силовом поле с потенциалом

$$V(x) = \begin{cases} q(x), & x \in G, \\ +\infty, & x \in \bar{G}. \end{cases}$$

Соответствующие собственные функции являются волновыми функциями стационарного оператора Шредингера

*) См., например, Д. И. Блохинцев [1], гл. VIII и Мессия [1].

(см. § 2.7),

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda u. \quad (26)$$

Как будет показано в § 32, собственные значения оператора L определяют собственные частоты колебаний ограниченных областей (объемов, мембран, струн, стержней и т. д.), а соответствующие собственные функции — амплитуды гармонических колебаний.

Наименьшее собственное значение стационарного оператора переноса (см. § 2.4) определяет также критичность ядерного реактора, а соответствующая собственная функция — плотность нейтронов в реакторе в критическом состоянии.

§ 22. Задача Штурма — Лиувилля

При $n=1$ задача на собственные значения (1) — (2) § 21.1 называется задачей Штурма — Лиувилля,

$$Lu = -(pu')' + qu = \lambda u, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(l) + H_2 u'(l) = 0. \quad (2)$$

В соответствии с условиями (3) § 21.1 считаем

$$p \in C^1([0, l]), \quad q \in C([0, l]), \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0, \\ h_1 \geq 0, \quad h_2 \geq 0, \quad H_1 \geq 0, \quad H_2 \geq 0, \quad h_1 + h_2 > 0, \quad H_1 + H_2 > 0.$$

Напомним, что область определения $\mathcal{M}_L$ оператора L состоит из функций $u(x)$ класса $C^2(0, l) \cap C^1([0, l])$, $u' \in \mathcal{X}_2(0, l)$, удовлетворяющих граничным условиям (2).

Выражение (13) § 21.3 для квадратичной формы (Lf, f) , $f \in \mathcal{M}_L$, принимает следующий вид:

$$(Lf, f) = \int_0^l (p|f'|^2 + q|f|^2) dx + \frac{h_1}{h_2} p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2} p(l)|f(l)|^2$$

(последние слагаемые выпадают при $h_2=0$ или $H_2=0$ соответственно).

1. **Функция Грина.** Предположим, что $\lambda=0$ не есть собственное значение оператора L ; это значит, в силу леммы § 21.4, что либо $q \not\equiv 0$, либо $h_1 \neq 0$, либо $H_1 \neq 0$.

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = -(pu')' + qu = f(x), \quad u \in \mathcal{M}_L, \quad (3)$$

где $f \in C(0, l) \cap \mathcal{X}_2(0, l)$. Так как $\lambda=0$ не есть собственное значение оператора L , то решение краевой задачи (3) в классе $\mathcal{M}_L$ единственно (см. § 1.11). Построим решение этой задачи.

Пусть v_1 и v_2 — ненулевые (вещественные) решения однородного уравнения $Lv=0$, удовлетворяющие условиям

$$h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0) = 0, \quad H_1 v_2(l) + H_2 v_2'(l) = 0. \quad (4)$$

Из теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений следует, что такие решения всегда существуют и принадлежат классу $C^2([0, l])$. Решения v_1 и v_2 линейно независимы. Действительно, в противном случае $v_1(x) = cv_2(x)$ и, следовательно, в силу (4) решение v_1 удовлетворяет и второму граничному условию (2). Это значит, что v_1 является собственной функцией оператора L , соответствующей собственному значению $\lambda=0$, вопреки предположению. Поэтому определитель Вронского

$$w(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad x \in [0, l].$$

Кроме того, имеет место тождество Остроградского — Лиувилля *)

$$p(x)w(x) = p(0)w(0), \quad x \in [0, l]. \quad (5)$$

Будем искать решение задачи (3) методом вариации произвольных постоянных,

$$u(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x). \quad (6)$$

В соответствии с этим методом функции C_1 и C_2 должны удовлетворять системе линейных дифференциальных уравнений

$$C_1'v_1 + C_2'v_2 = 0, \quad C_1'v_1' + C_2'v_2' = -\frac{f}{p} \quad (7)$$

с определителем $w(x) \neq 0$. Решая эту систему и пользуясь тождеством (5), получим

$$C_1' = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ -\frac{f}{p} & v_2' \end{vmatrix} = \frac{f(x)v_2(x)}{p(0)w(0)}, \\ C_2' = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v_1' & -\frac{f}{p} \end{vmatrix} = -\frac{f(x)v_1(x)}{p(0)w(0)}. \quad (8)$$

*) См., например, Л. С. Понтрягин [1], гл. 3.

Чтобы удовлетворить граничным условиям (2), положим $C_2(0) = 0$, $C_1(l) = 0$, поскольку, в силу (4) и (7),

$$\begin{aligned} h_1 u(0) - h_2 u'(0) &= h_1 [C_1(0) v_1(0) + C_2(0) v_2(0)] - \\ &- h_2 [C_1(0) v_1'(0) + C_2'(0) v_1(0) + C_2(0) v_1'(0) + C_2'(0) v_2(0)] = \\ &= C_1(0) [h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0)] + C_2(0) [h_1 v_2(0) - h_2 v_2'(0)] = 0, \end{aligned}$$

и аналогично для конца $x=l$. Интегрируя (8) при условиях $C_1(l) = 0$, $C_2(0) = 0$, имеем

$$C_1(x) = -\frac{1}{p(0)w(0)} \int_x^l f(y) v_2(y) dy,$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{p(0)w(0)} \int_0^x f(y) v_1(y) dy.$$

Подставляя полученные выражения в (6), находим искомое решение задачи (3) в виде

$u(x) =$

$$= -\frac{1}{p(0)w(0)} \left[v_2(x) \int_0^x f(y) v_1(y) dy + v_1(x) \int_x^l f(y) v_2(y) dy \right],$$

или

$$u(x) = \int_0^l \mathfrak{Z}(x, y) f(y) dy, \quad (9)$$

где

$$\mathfrak{Z}(x, y) = -\frac{1}{p(0)w(0)} \begin{cases} v_1(x) v_2(y), & 0 \leq x \leq y, \\ v_2(x) v_1(y), & y \leq x \leq l. \end{cases} \quad (10)$$

Функция $\mathfrak{Z}(x, y)$ называется функцией Грина краевой задачи (3) или оператора L .

Итак, доказан следующий результат:

Лемма. Если $\lambda=0$ не есть собственное значение оператора L , то решение краевой задачи (3) существует, единственно и выражается формулой (9).

Перечислим свойства функции Грина $\mathfrak{Z}(x, y)$, вытекающие непосредственно из формулы (10).

1) Вещественна и непрерывна в замкнутом квадрате $\bar{\Pi} = [0, l] \times [0, l]$ и принадлежит классу C^2 в замкнутых

треугольниках

$$[0 \leq x \leq y \leq l] \text{ и } [0 \leq y \leq x \leq l]$$

(рис. 71).

2) Симметрична:

$$\mathfrak{Z}(x, y) = \mathfrak{Z}(y, x), \quad (x, y) \in \bar{\Pi}.$$

3) На диагонали $x=y$ скачок производной $\mathfrak{Z}$, равен $-\frac{1}{p(y)}$, т. е.

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}(y+0, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{Z}(y-0, y)}{\partial x} = -\frac{1}{p(y)}, \quad y \in (0, l).$$

4) Вне диагонали $x=y$ удовлетворяет однородному уравнению

$$L_x \mathfrak{Z}(x, y) = 0, \quad x \neq y, \quad (x, y) \in \bar{\Pi}.$$

5) На боковых сторонах квадрата Π удовлетворяет граничным условиям (2):

$$h_1 \mathfrak{Z}(0, y) - h_2 \frac{\partial \mathfrak{Z}(0, y)}{\partial x} = h_1 \mathfrak{Z}(l, y) + h_2 \frac{\partial \mathfrak{Z}(l, y)}{\partial x} = 0, \quad y \in [0, l].$$

Пример. Функция Грина краевой задачи

$$-u'' = f(x), \quad u(0) = u(l) = 0$$

имеет вид

$$\mathfrak{Z}(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & 0 \leq x \leq y, \\ (1-x)y, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Физический смысл функции Грина. Из свойств 1), 3) и 4) вытекает, что при каждом $y \in (0, l)$ функция Грина $\mathfrak{Z}(x, y)$ удовлетворяет в обобщенном смысле (см. § 11.1) уравнению

$$L_x \mathfrak{Z}(x, y) = \delta(x-y), \quad x \in (0, l).$$

Поэтому $\mathfrak{Z}(x, y)$ есть возмущение, порожаемое точечным источником интенсивности 1, находящимся в точ-

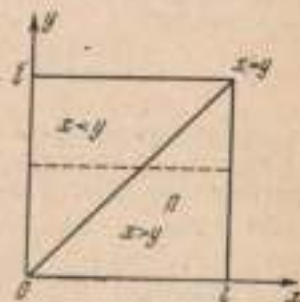


Рис. 71

ке y . Таким образом, функция Грина $\mathfrak{S}(x, y)$ является естественным обобщением фундаментального решения (см. § 11.2) на уравнения с переменными коэффициентами при наличии граничных условий (описывающие процессы в неоднородных ограниченных средах).

2. Сведение задачи Штурма—Лиувилля к интегральному уравнению. Покажем, что задача Штурма—Лиувилля сводится к интегральному уравнению Фредгольма с вещественным, симметричным и непрерывным ядром $\mathfrak{S}(x, y)$.

Теорема. Краевая задача

$$Lu = \lambda u + f, \quad u \in \mathcal{M}_L, \quad f \in C(0, l) \cap \mathcal{Z}_2(0, l) \quad (11)$$

при условии, что $\lambda = 0$ не есть собственное значение оператора L , эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int_0^l \mathfrak{S}(x, y) u(y) dy + \int_0^l \mathfrak{S}(x, y) f(y) dy, \quad (12)$$

$$u \in C([0, l]),$$

где $\mathfrak{S}(x, y)$ — функция Грина оператора L .

Доказательство. Если $u(x)$ — решение краевой задачи (11), то, применяя лемму § 22.1 с заменой f на $\lambda u + f$, получим

$$u(x) = \int_0^l \mathfrak{S}(x, y) [\lambda u(y) + f(y)] dy,$$

т. е. $u(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (12).

Обратно, пусть функция $u_0 \in C([0, l])$ удовлетворяет интегральному уравнению (12). Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = \lambda u_0 + f, \quad u \in \mathcal{M}_L.$$

По лемме § 22.1 единственное решение этой задачи дается формулой

$$u(x) = \int_0^l \mathfrak{S}(x, y) [\lambda u_0(y) + f(y)] dy = u_0(x),$$

откуда следует, что $u_0 \in \mathcal{M}_L$ и удовлетворяет уравнению

$$Lu_0 = \lambda u_0 + f,$$

т. е. u_0 есть решение краевой задачи (11). Теорема доказана.

При $f=0$ краевая задача (11) превращается в задачу Штурма—Лиувилля и, следовательно, задача Штурма—Лиувилля (1)–(2) эквивалентна задаче на собственные значения для однородного интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_0^l \mathfrak{S}(x, y) u(y) dy \quad (13)$$

при условии, что $\lambda=0$ не есть собственное значение оператора L .

Теперь освободимся от предположения, что $\lambda=0$ не есть собственное значение оператора L . Для этого заметим, что, в силу леммы § 21.4, $\mu=0$ не есть собственное значение задачи Штурма—Лиувилля

$$L_1 u = -(pu')' + (q+1)u = \mu u, \quad (14)$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = H_1 u(l) + H_2 u'(l) = 0. \quad (15)$$

Но $\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_{L_1}$, и поэтому задача (14)–(15) эквивалентна задаче (1)–(2) при $\mu = \lambda + 1$.

Следовательно, задача Штурма—Лиувилля (1)–(2) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = (\lambda + 1) \int_0^l \mathfrak{S}_1(x, y) u(y) dy, \quad (16)$$

где $\mathfrak{S}_1(x, y)$ — функция Грина оператора L_1 .

3. Свойства собственных значений и собственных функций. Таким образом, установлена эквивалентность задачи Штурма—Лиувилля (1)–(2) задаче на собственные значения для однородного интегрального уравнения (16) с симметричным (и, стало быть, эрмитовым) непрерывным ядром $\mathfrak{S}_1(x, y)$. При этом собственные значения λ задачи (1)–(2) связаны с характеристическими числами μ ядра $\mathfrak{S}_1(x, y)$ соотношением $\mu = \lambda + 1$, а соответствующие им собственные функции совпадают. Поэтому для задачи Штурма—Лиувилля справедливы все положения теории интегральных уравнений с симметричным непрерывным ядром, развитые в §§ 19 и 20. В частности, множество собственных значений $\{\lambda_n\}$ этой задачи не пусто и не имеет конечных предельных точек; собственные значения вещественны и конечной кратности;

собственные функции $\{X_k\}$ можно выбрать вещественными и ортонормальными; $X_k \in C^2([0, l])$.

Но задача Штурма — Лиувилля имеет ряд специфических свойств. Отметим некоторые из них.

Собственные значения неотрицательны.

Это утверждение доказано в § 21.4.

Множество собственных значений счетно.

Действительно, если бы это множество было конечным $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$, то ядро $\mathfrak{D}_1(x, y)$ имело бы представление (см. § 20.1)

$$\mathfrak{D}_1(x, y) = \sum_{k=1}^N \frac{X_k(x) X_k(y)}{\lambda_k + 1}. \quad (17)$$

Но $X_k \in C^2([0, l])$, и поэтому представление (17) противоречит свойству 3) функции Грина $\mathfrak{D}_1(x, y)$. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Каждое собственное значение — простое.

В самом деле, пусть X_1 и X_2 — собственные функции, соответствующие собственному значению λ_0 . Это значит, что эти функции удовлетворяют уравнению (1) при $\lambda = \lambda_0$ и граничным условиям (2). Из первого граничного условия (2)

$$h_1 X_1(0) - h_2 X_1'(0) = 0, \quad h_1 X_2(0) - h_2 X_2'(0) = 0$$

вытекает в силу предположения $h_1 + h_2 > 0$, что

$$\begin{vmatrix} X_1(0) & -X_1'(0) \\ X_2(0) & -X_2'(0) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X_1(0) & X_1(0) \\ X_2'(0) & X_2'(0) \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. определитель Вронского для решений $X_1(x)$ и $X_2(x)$ уравнения (1) при $\lambda = \lambda_0$ в точке $x=0$ обращается в нуль. Поэтому эти решения линейно зависимы. Это и значит, что λ_0 — простое собственное значение задачи Штурма — Лиувилля (1) — (2).

Теорема (В. А. Стеклов). Всякая функция f из $\mathcal{M}_L$ разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям $\{X_k\}$ задачи Штурма — Лиувилля,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, X_k) X_k(x). \quad (18)$$

Доказательство. Так как $f \in \mathcal{M}_L$, то

$$L_1 f = Lf + f = h \in C(0, l) \cap \mathcal{L}_2(0, l).$$

Но $\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_L$, и потому $f \in \mathcal{M}_L$. Таким образом, функция f является решением краевой задачи

$$L_1 f = h, \quad f \in \mathcal{M}_L,$$

причем, по построению (см. § 22.2), $\lambda=0$ не есть собственное значение оператора L_1 . Обозначим через $\mathfrak{D}_1(x, y)$ функцию Грина оператора L_1 . По лемме § 22.1 функция f выражается интегралом

$$f(x) = \int_0^l \mathfrak{D}_1(x, y) h(y) dy,$$

т. е. истокобразно представляется через эрмитово непрерывное ядро $\mathfrak{D}_1(x, y)$. По теореме Гильберта — Шмидта (см. § 20.1) функция f разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям ядра $\mathfrak{D}_1(x, y)$. Но собственные функции ядра $\mathfrak{D}_1(x, y)$ совпадают с собственными функциями оператора L_1 , которые в свою очередь совпадают с собственными функциями $\{X_k\}$ оператора L . Теорема доказана.

Таким образом, для задачи Штурма — Лиувилля верна теорема 1 § 21.4 и следствия из нее. В частности, система собственных функций задачи Штурма — Лиувилля полна в $\mathcal{L}_2(0, l)$.

Замечание. Другими методами В. А. Стеклов доказал более сильное утверждение: всякая функция $f \in C^2([0, l])$, удовлетворяющая условиям $f(0) = f(l) = 0$, разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля (1) — (2) (см. В. А. Стеклов [1], ч. I, гл. V).

4. Нахождение собственных значений и собственных функций. Изложим процесс вычисления собственных значений и собственных функций задачи Штурма — Лиувилля (1) — (2). Пусть $u_1(x; \lambda)$ и $u_2(x; \lambda)$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям:

$$u_1(0; \lambda) = 1, \quad u_1'(0; \lambda) = 0; \quad u_2(0; \lambda) = 0, \quad u_2'(0; \lambda) = 1.$$

Тогда функция

$$u(x; \lambda) = h_1 u_1(x; \lambda) + h_2 u_2(x; \lambda) \quad (19)$$

удовлетворяет уравнению (1) и первому из граничных условий (2). Чтобы удовлетворить второму из граничных

условий (2), необходимо положить

$$H_1 h_2 u_1(l; \lambda) + H_1 h_3 u_2(l; \lambda) + H_2 h_3 u_1'(l; \lambda) + H_2 h_1 u_2'(l; \lambda) = 0.$$

Корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ полученного трансцендентного уравнения и дадут все собственные значения задачи Штурма — Лиувилля.



Рис. 72.

вила (1) — (2). Соответствующие собственные функции X_k определяются по формуле (19) при $\lambda = \lambda_k$.

$$X_k(x) = u(x; \lambda_k) = h_2 u_1(x; \lambda_k) + h_1 u_2(x; \lambda_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Пример. Вычислим собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля при $p=1, q=0, h_2=H_2=0$:

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(l) = 0. \quad (20)$$

Для этого выпишем общее решение дифференциального уравнения (20)

$$u(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x$$

и подберем произвольные постоянные C_1 и C_2 и параметр λ так, чтобы удовлетворить граничным условиям (20) и условию нормировки $|u|=1$. Условие $u(0)=0$ дает $C_2=0$, а условие $u(l)=0$ дает $\sqrt{\lambda} l = k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \dots$, так что

$$\lambda = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}, \quad u(x) = C_1 \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Из условия нормировки

$$1 = |u|^2 = C_1^2 \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} C_1^2$$

внесем $C_1 = \sqrt{\frac{2}{l}}$, и, следовательно,

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Из построения следует, что других собственных функций задача (20) не имеет. Система собственных функций (21) полна в $\mathcal{L}_2(0, l)$ (см. § 22.3).

Графики собственных функций $X_k(x)$, $k=1, 2, 3$, изображены на рис. 72.

§ 23. Функции Бесселя

Рассмотрим уравнение

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - \nu^2) u = 0, \quad (1)$$

называемое *уравнением Бесселя*. Всякое решение этого уравнения, не равное тождественно нулю, называется *цилиндрической функцией*. Отметим, что коэффициенты уравнения (1) не удовлетворяют условиям § 22.

1. Определение и простейшие свойства функций Бесселя. Рассмотрим при $-\infty < \nu < \infty$ функцию

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1) \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \quad (2)$$

Эта функция представима в виде

$$J_\nu(x) = x^\nu I_\nu(x^2), \quad (3)$$

где $I_\nu(\zeta)$ — целая функция,

$$I_\nu(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta^k}{2^{2k+\nu} \Gamma(k+\nu+1) \Gamma(k+1)}. \quad (4)$$

Действительно, в силу признака Даламбера ряд (4) сходится равномерно на всяком компакте плоскости комплексного переменного ζ и поэтому определяет целую функцию $I_\nu(\zeta)$.

Таким образом, при $\nu=0, \pm 1, \dots$ $J_\nu(x)$ — однозначная аналитическая функция, а при $\nu \neq 0, \pm 1, \dots$ $J_\nu(x)$ —

многозначная аналитическая функция; выделим ту ветвь ее, где $x^v > 0$ при $x > 0$.

Проверим, что функция $J_v(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Пользуясь соотношением $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, получим

$$\begin{aligned} x^2 J_v''(x) + x J_v'(x) - v^2 J_v(x) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+v)(2k+v-1) + 2k+v-v^2}{\Gamma(k+v+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k+v)}{\Gamma(k+v+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v} = \\ &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+v)\Gamma(k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v} = \\ &= -x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+v+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v} = -x^2 J_v(x), \end{aligned}$$

что и утверждалось.

Цилиндрическая функция $J_v(x)$ называется функцией Бесселя порядка v .

В частности,

$$\left. \begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \\ J_{-1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если $v > 0$, $v \neq$ целому числу, то функции $J_v(x)$ и $Y_v(x) = J_{-v}(x)$ линейно независимы. Это следует из (2) в силу

$$J_v(x) = \frac{x^v}{2^v \Gamma(v+1)} [1 + O(x^2)], \quad x \rightarrow 0, \quad v \neq -1, -2, \dots \quad (6)$$

Если же $v = n$ — целому числу, то

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad (7)$$

так что функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ линейно зависимы.

Докажем равенство (7). Учитывая, что $\Gamma(-k) = \infty$, $k = 0, 1, \dots$, из (2) имеем

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s}}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

Отметим, что при $v = n$ — целому неотрицательному числу — второе линейно независимое решение $Y_n(x)$ уравнения Бесселя (1) обладает свойством

$$Y_n(x) = \begin{cases} c_n x^{-n} [1 + o(1)], & n \geq 1, \\ c_n \ln x [1 + o(1)], & n = 0, \end{cases} \quad x \rightarrow +0. \quad (8)$$

Это утверждение вытекает из формулы Остроградского — Лиувилля (см. (5) § 22.1) при $p(x) = x$.

$$Y_n'(x) J_n(x) - Y_n(x) J_n'(x) = \frac{a_n}{x}, \quad a_n \neq 0,$$

откуда

$$\left(\frac{Y_n}{J_n}\right)' = \frac{a_n}{x J_n^2(x)},$$

так что

$$Y_n(x) = J_n(x) \left[b_n - a_n \int_x^\infty \frac{dt}{t J_n^2(t)} \right]. \quad (9)$$

Выбирая в (9) x_n достаточно малым и пользуясь асимптотикой (6), из (9) получаем (8).

2. Свойство ортогональности. Если μ_1 и μ_2 — вещественные корни уравнения

$$\alpha J_v(\mu) + \beta \mu J_v'(\mu) = 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0, \quad (10)$$

то при $v > -1$

$$\int_0^1 x J_v(\mu_1 x) J_v(\mu_2 x) dx = 0, \quad \mu_1^2 \neq \mu_2^2, \quad (11)$$

$$\int_0^1 x J_v^2(\mu_1 x) dx \leq \frac{1}{2} [J_v'(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{\mu_1^2}\right) J_v^2(\mu_1). \quad (12)$$

Доказательство. Пусть μ_1 и μ_2 — любые вещественные числа. Функции $J_\nu(\mu_1 x)$ и $J_\nu(\mu_2 x)$ удовлетворяют, в силу (1), уравнениям

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} \right] + \left(\mu_1^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\mu_1 x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx} \right] + \left(\mu_2^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\mu_2 x) = 0.$$

Первое из этих уравнений умножим на $J_\nu(\mu_2 x)$, а второе — на $J_\nu(\mu_1 x)$, затем вычтем почленно одно из другого и проинтегрируем по интервалу $(0, 1)$. В результате получим

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} \left\{ x \left[J_\nu(\mu_1 x) \frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx} - J_\nu(\mu_2 x) \frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} \right] \right\} dx =$$

$$= (\mu_1^2 - \mu_2^2) \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx,$$

или

$$x \left[\mu_1 J_\nu(\mu_2 x) J'_\nu(\mu_1 x) - \mu_2 J_\nu(\mu_1 x) J'_\nu(\mu_2 x) \right] \Big|_0^1 =$$

$$= (\mu_1^2 - \mu_2^2) \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx. \quad (13)$$

Но из (2) при $x \rightarrow +0$ имеем (ср. (6))

$$J_\nu(\mu x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\mu x}{2} \right)^\nu + O(x^{\nu+2}),$$

$$\mu x J'_\nu(\mu x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\mu x}{2} \right)^\nu + O(x^{\nu+2}),$$

и поэтому

$$\mu_1 x J_\nu(\mu_2 x) J'_\nu(\mu_1 x) - \mu_2 x J_\nu(\mu_1 x) J'_\nu(\mu_2 x) = O(x^{\nu+2}), \quad x \rightarrow +0.$$

Таким образом, в силу условия $\nu > -1$ левая часть равенства (13) обращается в нуль при $x=0$ и мы получаем

$$\int_0^1 x J'_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx =$$

$$= \frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} [\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)]. \quad (14)$$

Если теперь μ_1 и μ_2 — корни уравнения (10):

$$\alpha J_\nu(\mu_1) + \beta \mu_1 J'_\nu(\mu_1) = 0, \quad \alpha J_\nu(\mu_2) + \beta \mu_2 J'_\nu(\mu_2) = 0, \quad (15)$$

и числа α и β не равны нулю одновременно, то определитель линейной системы (15) равен 0,

$$\begin{vmatrix} J_\nu(\mu_1) & \mu_1 J'_\nu(\mu_1) \\ J_\nu(\mu_2) & \mu_2 J'_\nu(\mu_2) \end{vmatrix} = \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2) - \mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) = 0.$$

Отсюда и из (14) следует свойство ортогональности (11).

Пусть μ_1 — корень уравнения (10). Переходя в равенстве (14) к пределу при $\mu_2 \rightarrow \mu_1$ и пользуясь правилом Лопиталя и уравнением (1), получим формулу (12):

$$\int_0^1 x J'_\nu(\mu_1 x) dx =$$

$$= \lim_{\mu_2 \rightarrow \mu_1} \frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} [\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)] =$$

$$= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 - \frac{1}{2\mu_1} J_\nu(\mu_1) [J'_\nu(\mu_1) + \mu_1 J''_\nu(\mu_1)] =$$

$$= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} J_\nu^2(\mu_1) \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2} \right).$$

3. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя. Справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x), \quad (16)$$

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \quad (16')$$

Действительно, формула (16) следует из (2):

$$J'_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k (2k+\nu)}{2\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu-1} \right] =$$

$$= -\frac{\nu}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu} = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x).$$

Аналогично устанавливается и формула (16').

Формулы (16) и (16') можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad (17)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}. \quad (17')$$

Отсюда получаем при $m=0, 1, \dots$

$$\left(\frac{d}{x dx}\right)^m [x^v J_v(x)] = x^{v-m} J_{v-m}(x), \quad (18)$$

$$\left(\frac{d}{x dx}\right)^m \left[\frac{J_v(x)}{x^v}\right] = (-1)^m \frac{J_{v+m}(x)}{x^{v+m}}. \quad (18')$$

В частности, из формул (5), (18') и (18) при $m=0, 1, \dots$ имеем

$$J_{m+1/2}(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+1/2} \left(\frac{d}{x dx}\right)^m \frac{\sin x}{x}, \quad (19)$$

$$J_{-m-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+1/2} \left(\frac{d}{x dx}\right)^m \frac{\cos x}{x}. \quad (19')$$

Наконец, вычитая формулы (16) и (16'), получаем еще одно рекуррентное соотношение:

$$J_{v+1}(x) - \frac{2v}{x} J_v(x) + J_{v-1}(x) = 0. \quad (20)$$

4. Корни функций Бесселя. Докажем следующие свойства корней уравнения (10) при $v > -1$. (При $\beta=0$ это уравнение определяет корни функций Бесселя.)

Теорема. *Корни уравнения (10) при $v > -1$ — вещественные, простые, кроме, возможно, 0; они симметрично расположены относительно точки 0 и не имеют конечных предельных точек.*

Доказательство. Вещественность корней. Из формулы (2), в силу вещественности α, β и $\Gamma(\xi)$ при вещественных ξ , получаем $J_v(x) = \overline{J_v(x)}$,

$$\alpha J_v(\mu) + \beta \mu J'_v(\mu) = \overline{\alpha J_v(\mu) + \beta \mu J'_v(\mu)}.$$

Поэтому, если μ — корень уравнения (10), то $\bar{\mu}$ — также его корень. Если $\mu^2 \neq \bar{\mu}^2$, то, применяя формулу (11) при $\mu_1 = \mu, \mu_2 = \bar{\mu}$, получим противоречие:

$$0 = \int_0^1 x J_v(\mu x) J_v(\bar{\mu} x) dx = \int_0^1 x |J_v(\mu x)|^2 dx.$$

Поэтому $\mu^2 = \bar{\mu}^2$, т. е. либо μ — вещественное, либо μ — мнимое число: $\mu = ia, a \neq 0$ вещественно. Но последний

случай не имеет места, поскольку, в силу (2) и $\Gamma(\xi) > 0, \xi > 0$,

$$\alpha J_v(ia) + \beta ia J'_v(ia) = \left(\frac{ia}{2}\right)^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha + \beta(2k+v)}{\Gamma(k+v+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \neq 0.$$

Симметрия корней и отсутствие конечных предельных точек следуют из представления (см. (3))

$$\alpha J_v(\mu) + \beta \mu J'_v(\mu) = \mu^v [(\alpha + \beta v) I_v(\mu^2) + \beta \mu^2 I'_v(\mu^2)]$$

и из того факта, что нули целой функции не могут иметь конечных предельных точек.

Докажем простоту корней. Пусть $\mu_0 > 0$ — корень уравнения (10) кратности ≥ 2 , так что

$$\alpha J_v(\mu_0) + \beta \mu_0 J'_v(\mu_0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \alpha J'_v(\mu_0) + \beta J''_v(\mu_0) + \beta \mu_0 J''_v(\mu_0) = \\ = -\beta \left(\mu_0 - \frac{v^2}{\mu_0}\right) J_v(\mu_0) + \alpha J'_v(\mu_0) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

в силу уравнения (1). Из равенств (21) заключаем: а) либо $J_v(\mu_0) = J'_v(\mu_0) = 0$, б) либо $\alpha^2 + \beta^2(\mu_0^2 - v^2) = 0$. Случай а) невозможен в силу теоремы единственности решения уравнения (1), поскольку точка $\mu_0 > 0$ не особая для него. Докажем, что случай б) также невозможен. Для реализации б) необходимо $\beta > 0$ и

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{v^2 - \mu_0^2}, \quad 0 < \mu_0 \leq |v|.$$

Подставляя это выражение в первое из равенств (21) и возводя в квадрат, получим

$$[J'_v(\mu_0)]^2 = \left(\frac{v^2}{\mu_0^2} - 1\right) J_v^2(\mu_0),$$

что, в силу (12), приводит к противоречивому равенству

$$\int_0^1 x J_v^2(\mu_0 x) dx = 0.$$

Теорема доказана.

На основании установленной теоремы положительные корни уравнения (10) можно переименовать,

располагая их в порядке возрастания величины

$$\mu_1^{(v)} < \mu_2^{(v)} < \dots \quad (22)$$

Выпишем для примера первые три корня $J_0(x)$:

$$\mu_1^{(0)} = 2,4048, \quad \mu_2^{(0)} = 5,5201, \quad \mu_3^{(0)} = 8,6537.$$

Примерные графики функций $J_0(x)$ и $J_1(x) = -J_0'(x)$ приведены на рис. 73.

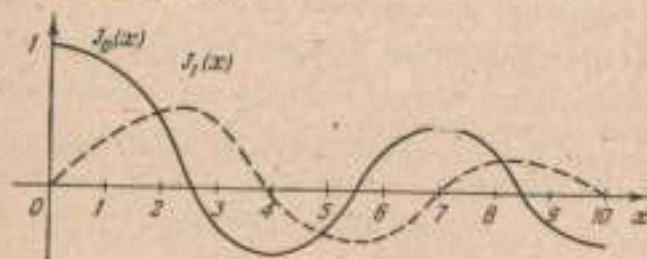


Рис. 73.

Выпишем без доказательства асимптотическое выражение для функции $J_v(x)$:

$$J_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (23)$$

Отсюда вытекает приближенная формула для корней $J_v(x)$:

$$\mu_k^{(v)} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}v + k\pi.$$

5. Краевая задача на собственные значения для уравнения Бесселя. Пусть $v \geq 0$. Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$L_v u = -(xu')' + \frac{v^2}{x}u = \lambda xu, \quad 0 < x < 1, \quad (24)$$

$$u(x) = O(x^\gamma), \quad x \rightarrow 0, \quad \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0, \quad (25)$$

где $\gamma = \min(v, 1)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$. К области определения $\mathcal{M}_{L_v}$ оператора L_v отнесем функции $u(x)$ класса $C^2((0, 1])$, удовлетворяющие граничным условиям (25) и условию $x^{-1/2}L_v u \in \mathcal{L}_2(0, 1)$; $\mathcal{M}_{L_v}$ плотно в $\mathcal{L}_2(0, 1)$.

Из определения $\mathcal{M}_{L_v}$ непосредственно вытекает: если $u \in \mathcal{M}_{L_v}$, то

$$L_v u \in \mathcal{L}_2(0, 1) \quad \text{и} \quad xu'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0. \quad (26)$$

Оператор L_v — положительный (и, стало быть, эрмитов, см. § 1.12), причем

$$(L_v u, u) = \int_0^1 x |u'|^2 dx + v^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx + \frac{\alpha}{\beta} |u(1)|^2 \geq 0, \quad (27)$$

$$u \in \mathcal{M}_{L_v}$$

(при $\beta = 0$ последнее слагаемое в (27) выпадает).

Действительно, (27) следует из (25) и (26):

$$\begin{aligned} (L_v u, u) &= \int_0^1 L_v u u dx = - \int_0^1 (xu')' u dx + v^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx = \\ &= - \int_0^1 x |u'|^2 dx - xu'u \Big|_0^1 + v^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx = \\ &= \int_0^1 x |u'|^2 dx + v^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx + \frac{\alpha}{\beta} |u(1)|^2. \end{aligned}$$

Каждое собственное значение λ оператора L_v неотрицательное и простое. Для того чтобы $\lambda = 0$ было собственным значением оператора L_v , необходимо и достаточно, чтобы $v = 0$ и $\alpha = 0$; ему соответствует (единственная) собственная функция $u(x) = \text{const}$.

Действительно, из неотрицательности квадратичной формы $(L_v u, u)$ следует неотрицательность собственных значений λ ; при этом, как и в § 21.4, устанавливаем, что $\lambda = 0$ тогда и только тогда, когда $v = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u = \text{const}$. Простота λ доказывается так же, как и в § 22.3.

Пусть $\mu_0 > 0$ — корень уравнения (10). Тогда из уравнения Бесселя (1) и из (6) следует, что $\lambda_0 = \mu_0^2$ — собственное значение и $J_v(\mu_0 x)$ — соответствующая собственная функция оператора L_v . Обратно, пусть λ_0 — (положительное) собственное значение и $u_v(x)$ — соответствующая

собственная функция оператора L_v . Тогда (см. § 23.1).

$$u_v(x) = C_1 J_v(\sqrt{\lambda_0} x) + C_2 Y_v(\sqrt{\lambda_0} x).$$

Но из первого граничного условия (25) и из (6) и (8) следует, что $C_2 = 0$. А тогда $u_v(x) = C_1 J_v(\sqrt{\lambda_0} x)$ и из второго граничного условия (25) следует, что $\mu_0 = \sqrt{\lambda_0}$ есть корень уравнения (10).

Таким образом,

$$\lambda_k^{(v)} = [\mu_k^{(v)}]^2 \text{ и } J_v(\mu_k^{(v)} x), \quad k=1, 2, \dots, \quad (28)$$

— все собственные значения и соответствующие собственные функции оператора L_v .

6. Неоднородная краевая задача для уравнения Бесселя. Пусть $\lambda=0$ не есть собственное значение оператора L_v , т. е. либо $v>0$, либо при $v=0$ $\alpha>0$. Пользуясь методом § 22.1, построим функцию Грина $\mathfrak{D}_v(x, y)$ оператора L_v .

Пусть $v>0$. Функции x^v и x^{-v} — линейно независимые решения уравнения $L_v u = 0$. Поэтому функция $v_1(x) = x^v$ удовлетворяет первому граничному условию (25) и функция

$$v_2(x) = ax^v + x^{-v}, \quad a = \frac{\beta v - \alpha}{\beta v + \alpha},$$

удовлетворяет второму граничному условию (25). Поэтому, в соответствии с формулой (10) § 22.1, функция $\mathfrak{D}_v(x, y)$ при некотором $c_v \neq 0$ имеет вид

$$\mathfrak{D}_v(x, y) = \begin{cases} c_v x^v (ay^v + y^{-v}), & 0 \leq x \leq y, \\ c_v y^v (ax^v + x^{-v}), & y \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (29)$$

Пусть $v=0$ и $\alpha>0$. Функции 1 и $\ln x$ — линейно независимые решения уравнения $L_0 u = 0$. Поэтому $v_1(x) = 1$, $v_2(x) = -\frac{\beta}{\alpha} + \ln x$ и

$$\mathfrak{D}_0(x, y) = \begin{cases} c_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \ln y \right), & 0 \leq x \leq y, \\ c_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \ln x \right), & y \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (30)$$

Решение краевой задачи

$$L_v u = f(x), \quad u \in \mathcal{H}_{L_v}, \quad f \in C([0, 1]), \quad x^{-1/2} f \in \mathcal{X}_2(0, 1) \quad (31)$$

единственно и выражается формулой

$$u(x) = \int_0^1 \mathfrak{D}_v(x, y) f(y) dy. \quad (32)$$

Это утверждение устанавливается так же, как и в § 22.2. Единственное различие связано с первым граничным условием (25). Проверим его выполнение. Пусть $v>0$. Тогда, пользуясь (29) и неравенством Коши — Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| c_v (ax^v + x^{-v}) \int_0^x y^v f(y) dy + c_v x^v \int_x^1 (ay^v + y^{-v}) f(y) dy \right| \leq \\ &\leq O(x^v) + |c_v| x^{-v} \sqrt{\int_0^x y^{2v+1} dy} \sqrt{\int_0^x |f(y)|^2 \frac{dy}{y}} + \\ &+ |c_v| x^v \sqrt{\int_x^1 y^{-2v+1} dy} \sqrt{\int_x^1 |f(y)|^2 \frac{dy}{y}} = \\ &= O(x^v) + O(x) = O(xy), \end{aligned}$$

$x \rightarrow 0$, что и требовалось. Аналогично, проще, рассматривается и случай $v=0$.

7. Полнота функций Бесселя. Введем пространство $\mathcal{X}_2([0, 1]; x)$ — функций со скалярным произведением и нормой (см. § 1.9, замечание):

$$(f, g)_x = \int_0^1 x f(x) \bar{g}(x) dx, \quad \|f\|_x = \sqrt{(f, f)_x}.$$

В силу результатов предыдущего пункта, как и в § 22.2, заключаем, что если $\lambda=0$ не есть собственное значение оператора L_v , то задача на собственные значения (24) — (25) эквивалентна задаче на собственные значения для однородного интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_0^1 \mathfrak{D}_v(x, y) u(y) dy, \quad u \in C([0, 1]). \quad (33)$$

Переходя к новой неизвестной функции $v(x) = \sqrt{x} u(x)$, приведем интегральное уравнение (33) к эквивалентному

виду (ср. § 20.6), замечание):

$$v(x) = \lambda \int_0^1 \sqrt{xy} \mathfrak{D}_v(x, y) v(y) dy, \quad v \in C([0, 1]). \quad (34)$$

В силу (29) и (30) ядро $\sqrt{xy} \mathfrak{D}_v(x, y) \neq 0$, вещественно, непрерывно и симметрично. Поэтому к интегральному уравнению (34) применима теория Гильберта — Шмидта (см. §§ 19 и 20). В частности, существуют собственные значения $\lambda_k^{(v)}$, $k=1, 2, \dots$, и $\sqrt{x} J_v(\sqrt{\lambda_k^{(v)}} x)$, $k=1, 2, \dots$, — соответствующие собственные функции (см. § 23.5), ортогональные в $\mathcal{L}_2(0, 1)$.

Таким образом, мы доказали, что краевая задача (24) — (25) имеет собственные значения $\lambda_k^{(v)} < \lambda_{k+1}^{(v)} < \dots$, являющиеся квадратами положительных корней $\mu_k^{(v)}$ уравнения (10); соответствующие собственные функции $J_v(\mu_k^{(v)} x)$, $k=1, 2, \dots$, образуют ортогональную систему в $\mathcal{L}_2[(0, 1); x]$, причем в силу (12)

$$\|J_v(\mu_k^{(v)} x)\|_2^2 = \frac{1}{2} [J_v'(\mu_k^{(v)})]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{\lambda_k^{(v)}}\right) J_v^2(\mu_k^{(v)}). \quad (35)$$

Справедлива следующая

Теорема. Если $u \in \mathcal{H}_{L_v}$, то функция $\sqrt{x} u(x)$ разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по системе функций $\sqrt{x} J_v(\mu_k^{(v)} x)$, $k=1, 2, \dots$.

$$\sqrt{x} u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(v)} \sqrt{x} J_v(\mu_k^{(v)} x), \quad a_k^{(v)} = \frac{(u, J(\mu_k^{(v)} x))_2}{\|J_v(\mu_k^{(v)} x)\|_2^2}. \quad (36)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы В. А. Стеклова (см. § 22.3). Если $u \in \mathcal{H}_{L_v}$, то $L_v u = f(x)$, где $f \in C([0, 1])$, $x^{-1/2} f \in \mathcal{L}_2(0, 1)$ (см. § 23.5). По доказанному (см. § 23.6) функция $u(x)$ выражается через ядро $\mathfrak{D}_v(x, y)$ по формуле (32), т. е.

$$\sqrt{x} u(x) = \int_0^1 \sqrt{xy} \mathfrak{D}_v(x, y) \frac{f(y)}{V_y} dy.$$

Таким образом, функция $\sqrt{x} u(x)$ истокообразно представляется через вещественное непрерывное симметричное ядро $\sqrt{xy} \mathfrak{D}_v(x, y)$. По теореме Гильберта — Шмидта (см. § 20.1)

эта функция разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям $\sqrt{x} J_v(\mu_k^{(v)} x)$ этого ядра.

Если же $\lambda=0$ есть собственное значение оператора L_v (т. е. при $v=\alpha=0$, см. § 23.5), то, как и в § 22, достаточно рассмотреть задачу

$$-(xu')' + xu = (\lambda+1)xu, \quad u(x) = O(1), \quad x \rightarrow 0, \quad u'(1) = 0.$$

Теорема доказана.

Множество функций $\{\sqrt{x} u(x), u \in \mathcal{H}_{L_v}\}$ плотно в $\mathcal{L}_2(0, 1)$. По теореме каждую функцию вида $\sqrt{x} u(x)$, $u \in \mathcal{H}_{L_v}$, можно сколь угодно точно приблизить в $\mathcal{L}_2(0, 1)$ линейными комбинациями ортогональной системы функций $\sqrt{x} J_v(\mu_k^{(v)} x)$, $k=1, 2, \dots$. Отсюда по теореме § 1.9 следует, что эта система полна в $\mathcal{L}_2(0, 1)$.

Итак, доказано: система собственных функций $J_v(\mu_k^{(v)} x)$, $k=1, 2, \dots$, полна в $\mathcal{L}_2[(0, 1); x]$.

8. Другие цилиндрические функции. Наряду с функциями Бесселя $J_v(x)$, большое значение для приложений имеют другие типы цилиндрических функций*). К их числу относятся:

функции Ханкеля первого рода

$$H_v^{(1)}(x) = \frac{1}{\sin \pi v} [J_v(x) e^{-i\pi v} - J_{-v}(x)], \quad v \neq n,$$

$$H_v^{(1)}(x) = J_v(x) + \frac{i}{\pi} \left[\frac{\partial J_v(x)}{\partial v} - (-1)^n \frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v} \right]_{v=n};$$

функции Ханкеля второго рода

$$H_v^{(2)}(x) = \frac{1}{i \sin \pi v} [J_v(x) e^{i\pi v} - J_{-v}(x)], \quad v \neq n,$$

$$H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - \frac{i}{\pi} \left[\frac{\partial J_v(x)}{\partial v} - (-1)^n \frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v} \right]_{v=n};$$

функции Неймана

$$N_v(x) = \frac{1}{\sin \pi v} [J_v(x) \cos \pi v - J_{-v}(x)], \quad v \neq n,$$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_v(x)}{\partial v} - (-1)^n \frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v} \right]_{v=n};$$

*) Более подробное изложение можно найти в книгах В. И. Смирнова [3], гл. VI, А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [1], дополнение II и В. Я. Арсина [1], гл. XI, А. Ф. Никифорова и В. Б. Уварова [1], гл. III.

функции мнимого аргумента

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{\pi}{2}\nu} J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi}{2}\nu} H_\nu^{(2)}(ix).$$

Таким образом,

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \\ H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \end{cases} \quad (37)$$

Пользуясь асимптотическим выражением (23) для $J_\nu(x)$, получим при $x \rightarrow +\infty$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{4}\nu - \frac{\pi}{4})} + O(x^{-3/2}), \quad (38_1)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{4}\nu - \frac{\pi}{4})} + O(x^{-3/2}), \quad (38_2)$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad (39)$$

$$I_\nu(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}} [1 + O(x^{-1})], \quad (40)$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} [1 + O(x^{-1})]. \quad (41)$$

Аналогично, пользуясь (6), получим при $x \rightarrow +0$

$$H_0^{(1)}(x) = -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \dots, \quad H_0^{(2)}(x) = \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \dots,$$

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \dots, \quad K_0(x) = \ln \frac{1}{x} + \dots$$

9. Указания. а) Пользуясь формулами (16) и (17), доказать, что при $\nu > -1$ положительные корни функций $J_\nu(x)$ и $J_{\nu+1}(x)$ разделяют друг друга, т. е.

$$0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_1^{(\nu+1)} < \mu_2^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu+1)} < \dots$$

б) Доказать равенство

$$e^{\frac{x}{2}} \left(i - \frac{1}{i} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) i^n.$$

в) Пользуясь б), доказать

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\theta - x \sin \theta)} d\theta, \quad n=0, 1, \dots$$

б) Доказать равенство

$$J_\nu(e^{i\pi m}) = e^{i\pi m \nu} J_\nu(x), \quad m=0, \pm 1, \dots$$

в) Доказать формулу при $\nu > -\frac{1}{2}$

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{ixt} dt = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) J_\nu(x).$$

г) Пусть функция $f(|x|)$ абсолютно интегрируема на R^n , и для нее справедлива формула обращения преобразования Фурье. Доказать, что ее преобразование Фурье равно

$$(2\pi)^{n/2} |\xi|^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty J_{\frac{n-2}{2}}(|\xi| r) r^{n/2} f(r) dr = f_1(|\xi|), \quad (42)$$

и справедлива формула обращения

$$f(r) = (2\pi)^{-n/2} r^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty J_{\frac{n-2}{2}}(r\rho) \rho^{n/2} f_1(\rho) d\rho. \quad (43)$$

Формулы (42) и (43) называются прямым и обратным преобразованиями Ханкеля порядка $\frac{n-2}{2}$ соответственно.

§ 24. Гармонические функции

В этом параграфе изучаются основные свойства гармонических функций.

Вещественнозначная функция $u(x)$ класса $C^2(G)$ называется гармонической в области G , если она удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в этой области.

При $n=1$ гармонические функции сводятся к линейным функциям и потому их теория интереса не представляет. Поэтому в дальнейшем будем считать $n \geq 2$.

Нетривиальным примером гармонической функции при $x \neq 0$ является фундаментальное решение оператора

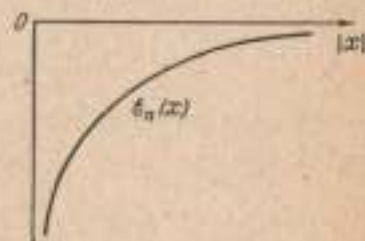


Рис. 74.

Лапласа (см. § 11.8)

$$\mathcal{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln|x|, \quad n=2;$$

$$\mathcal{E}_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} |x|^{-n+2}, \quad n \geq 3.$$

График функции $\mathcal{E}_n(x)$ изображен на рис. 74.

1. **Формула Грина.** Если $u \in C^2(\bar{G})$ и $u(x)=0$, $x \in \bar{G}$, то при $x \in S$ справедлива следующая формула Грина:

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_G \frac{\Delta u(y)}{|x-y|^{n-2}} dy + \\ &+ \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_S \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right] dS_y, \\ u(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_G \Delta u(y) \ln|x-y| dy + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\ln \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} \right] dS_y. \end{aligned} \quad (1)$$

Другими словами, функция u представляется в виде суммы трех ньютоновых (логарифмических) потенциалов:

$$u(x) = V_n(x) + V_n''(x) + V_n'(x), \quad (2)$$

где (считаем для определенности $n \geq 3$)

$$V_n(x) = \mathcal{E}_n * \{\Delta u\} = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_G \frac{\Delta u(y)}{|x-y|^{n-2}} dy$$

— объемный потенциал с плотностью $-\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \{\Delta u\}$;

$$V_n''(x) = -\mathcal{E}_n * \left(\frac{\partial u}{\partial n} \delta_S \right) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_S \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial n} dS_y$$

— потенциал простого слоя на S с поверхностной плотностью $\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \frac{\partial u}{\partial n}$;

$$V_n'(x) = -\mathcal{E}_n * \frac{\partial}{\partial n} (u \delta_S) = \frac{-1}{(n-2)\sigma_n} \int_S u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dS_y$$

— потенциал двойного слоя на S с поверхностной плотностью $-\frac{1}{(n-2)\sigma_n} u$.

Докажем формулу Грина (1) при $n \geq 3$. Применяя формулу (27) § 6.5, с) к функции u и учитывая, что $[u] = -u|_S$, $\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_S = -\frac{\partial u}{\partial n}|_S$, получим

$$\Delta u = \{\Delta u\} - \frac{\partial u}{\partial n} \delta_S - \frac{\partial}{\partial n} (u \delta_S). \quad (3)$$

Так как функция u финитна, то ее свертка с фундаментальным решением $\mathcal{E}_n$ оператора Лапласа существует (см. § 7.6). Поэтому, применяя формулу (13) § 11.3 и пользуясь равенством (3), для функции u получаем представление

$$\begin{aligned} u &= \mathcal{E}_n * \Delta u = \mathcal{E}_n * \{\Delta u\} - \mathcal{E}_n * \left(\frac{\partial u}{\partial n} \delta_S \right) - \mathcal{E}_n * \frac{\partial}{\partial n} (u \delta_S) = \\ &= \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \left[-\frac{1}{|x|^{n-2}} * \{\Delta u\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|x|^{n-2}} * \left(\frac{\partial u}{\partial n} \delta_S \right) + \frac{1}{|x|^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial n} (u \delta_S) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда, пользуясь определением ньютоновых потенциалов и формулами (37), (40) и (41) § 7.10, получаем формулу Грина (1) при $n \geq 3$. Случай $n=2$ рассматривается аналогично.

Формула Грина (1) справедлива и для функций u класса $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, если в ней интеграл по области G понимать как несобственный (ср. § 21.2). (Этот интеграл может сходиться не абсолютно.)

Для доказательства применим формулу Грина (1) ко всякой подобласти $G' \subset G$ с кусочно-гладкой границей и перейдем к пределу при $G' \rightarrow G$. Пользуясь предположенной гладкостью функции u , убедимся в справедливости формулы Грина (1) и в этом случае.

Для гармонической в области G функции u класса $C^2(\bar{G})$ формула Грина (1) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_S \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial n} - \right. \\ &\quad \left. - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right] dS_y, \quad n \geq 3; \\ u(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\ln \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial n} - \right. \\ &\quad \left. - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} \right] dS_y, \quad n=2. \end{aligned} \quad (2)$$

Поверхностные потенциалы $V_a^{\pm}(x)$ и $V_a^{\pm}(x)$ можно непрерывно дифференцировать вне S под знаком интеграла бесконечное число раз, и эти потенциалы — гармонические функции вне S . Отсюда и из формулы (5) вытекает, что всякая гармоническая функция бесконечно дифференцируема*).

Замечание. Формула Грина (5) выражает значения гармонической функции в области через ее значения и значения ее нормальной производной на границе этой области. Эта формула аналогична формуле Коши для аналитических функций. Легко заметить также аналогию между формулой Грина и формулой (2) и сходной формулой (17) § 13.3 для волнового уравнения.

2. Распространение формул Грина. Пусть граница S области G — поверхность класса C^1 (см. § 1.1) и функция $u \in C^1(G)$. Будем говорить, что функция u имеет правильную нормальную производную** на S , если равномерно по всем $x \in S$ существует предел нормальной производной $\frac{\partial u(x')}{\partial n_{x'}}$ при $x' \rightarrow x$, $x' \in -n_x$, и этот предел обозначаем $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u(x)}{\partial n_x}$, так что

$$\frac{\partial u(x')}{\partial n_{x'}} \xrightarrow{x' \in S} \frac{\partial u(x)}{\partial n_x}, \quad x' \rightarrow x, \quad x' \in -n_x.$$

Из этого определения следует, что если правильная нормальная производная существует, то она непрерывна на S и является обычной нормальной производной. Далее, равномерно по всем $x \in S$ существует предел $u(x')$ при $x' \rightarrow x$, $x' \in -n_x$. Этот предел обозначим через $u(x)$, так что $u \in C(S)$ и

$$u(x') \xrightarrow{x' \in S} u(x), \quad x' \rightarrow x, \quad x' \in -n_x. \quad (6)$$

Доопределенная таким путем функция $u(x)$ будет непрерывной на G , т. е. $u \in C(G)$.

Действительно, пусть $x'_k \rightarrow x \in S$, $x'_k \in G$. Точка x'_k лежит на нормали $-n_{x_k}$ к некоторой точке $x_k \in S$, т. е. $x'_k = x_k + \delta_k n_{x_k}$ (рис. 75) и $\delta_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Пользуясь не-

* И даже аналитическая (см. § 4.7).

** Этот термин введен А. М. Ляпуновым [1].

прерывностью функции u на S и равномерной ограниченностью $\left| \frac{\partial u(x')}{\partial n_{x'}} \right| < C$, $x' \in G$, $k \rightarrow \infty$, имеем

$$|u(x) - u(x'_k)| \leq |u(x) - u(x_k)| + |u(x_k) - u(x'_k)| \leq \leq |u(x) - u(x_k)| + C\delta_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Очевидно, для функций класса $C^1(\bar{G})$ правильная нормальная производная всегда существует.

Пусть S — поверхность класса C^1 . В каждой точке $x \in S$ отложим по внутренней нормали $-n_x$ отрезок постоянной длины δ . Множество концов x' этих отрезков описывается уравнением

$$x' = x - \delta n_x. \quad (6)$$

В силу леммы Гейне—Бореля (см. § 1.1) при достаточно малом δ это множество образует некоторую замкнутую поверхность класса C^1 , которую обозначим через S_δ и назовем параллельной поверхностью S (рис. 75).

Нормаль $n_{x'}$ в точке $x' = x - \delta n_x \in S_\delta$ направлена вдоль нормали n_x , $x \in S$, если $S \in C^2$.

Действительно, пусть x — произвольная точка на S и $x = x(t)$, $t \geq 0$ — произвольная кривая класса C^1 на S , проходящая через x , $x = x(0)$. Тогда $x'(t) = \dot{x}(t) - \delta n_{x(t)}$, $t \geq 0$ — кривая класса C^1 на S_δ , проходящая через точку $x' = x - \delta n_x$. Дифференцируя по t очевидное тождество $|x(t) - x'(t)|^2 = \delta^2$ (см. рис. 75), получим

$$(x - x', \frac{dx}{dt}) = (x - x', \frac{dx'}{dt}), \quad (7)$$

откуда, полагая $t = 0$ и учитывая, что касательная к кривой в точке x ортогональна к нормали n_x , выводим

$$\delta(n_x, \frac{dx'(0)}{dt}) = \delta(n_x, \frac{dx(0)}{dt}) = 0. \quad (8)$$

Это означает, ввиду произвольности выбранной кривой, что нормаль n_x ортогональна к касательной плоскости поверхности S_δ в точке x' , т. е. $n_x = n_{x'}$, что и утверждалось.

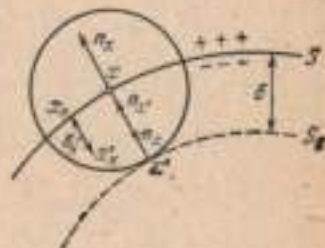


Рис. 75.

Лемма. Пусть граница S области G — поверхность класса C^2 и функция u из $C^1(G)$ имеет правильную нормальную производную $\frac{\partial u}{\partial n}$ на S . Тогда для любой $f \in C(G)$ справедливо равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta} f(x') \frac{\partial u(x')}{\partial n_{x'}} dS_{x'} = \int_S f(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} dS_x, \quad (9)$$

где S_δ — поверхность, параллельная S .

Доказательство. Так как нормали n_x и $n_{x'}$ в точках $x \in S$ и $x' = x - \delta n_x \in S_\delta$ направлены одинаково, то

$$f(x') \frac{\partial u(x')}{\partial n_{x'}} = f(x') \frac{\partial u(x')}{\partial n_x} \xrightarrow{x \in S} f(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n_x}, \quad (10)$$

$$x' \rightarrow x, \quad x' \in -n_x,$$

в силу определения правильной нормальной производной и непрерывности функции f на G . Из предельного соотношения (10) и вытекает равенство (9). Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает, что следующие формулы Грина остаются справедливыми для поверхностей S класса C^2 и для функций, имеющих правильную нормальную производную на S : формула (5) § 21.6, если $u \in C^2(G)$,

$Lu \in L^2(G)$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ существует и $v \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$; фор-

мула (6) § 21.6, если $u, v \in C^2(G)$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ и $\frac{\partial v}{\partial n}$ существуют;

формула (1) § 24.1, если $u \in C^2(G)$ и $\frac{\partial u}{\partial n}$ существует.

Действительно, применим перечисленные формулы Грина к любой подобласти, ограниченной поверхностью S_δ , параллельной S . Переходя в этих формулах к пределу при $\delta \rightarrow 0$ и, пользуясь предельным соотношением (9), убедимся в справедливости формул Грина при сформулированных предположениях.

3. Теорема о среднем арифметическом. Предварительно докажем следующее утверждение: если гармоническая в области G функция $u \in C^1(\bar{G})$ (или если $\frac{\partial u}{\partial n}$ существует на S и $S \in C^2$), то

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0. \quad (11)$$

Равенство (11) вытекает из первой формулы Грина (7) § 21.2 при $v=1$.

Теорема о среднем арифметическом. Если функция $u(x)$ — гармоническая в шаре U_R и непрерывная на $\bar{U}_R$, то ее значение в центре этого шара равно среднему значению по сфере S_R ,

$$u(0) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{S_R} u(x) dS = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_1} u(Rs) ds. \quad (12)$$

Доказательство. Применяя формулу Грина (5) для точки $x=0$ к любому шару $|x| < \rho$, $\rho < R$, и пользуясь формулой (11), при $n \geq 3$ получим равенство (12):

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \left[\frac{1}{\rho^{n-2}} \int_{S_\rho} \frac{\partial u(y)}{\partial n} dS - \int_{S_\rho} u(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|y|^{n-2}} dS \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma_n \rho^{n-1}} \int_{S_\rho} u(y) dS. \end{aligned}$$

Так как функция $u(x)$ непрерывна на замкнутом шаре $\bar{U}_R$, то равенство (12) сохраняется и при $\rho \rightarrow R$. Случай $n=2$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

4. Принцип максимума. Пользуясь теоремой о среднем арифметическом, установим следующий принцип максимума для гармонических функций.

Теорема. Если функция $u(x) \not\equiv \text{const}$ — гармоническая в ограниченной области G и непрерывна на $\bar{G}$, то она не может принимать свои минимальное и максимальное значения в области G , т. е.

$$\min_{x \in \bar{G}} u(x) < u(x) < \max_{x \in \bar{G}} u(x), \quad x \in G. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть, напротив, функция $u(x)$ принимает свое максимальное значение M в некоторой

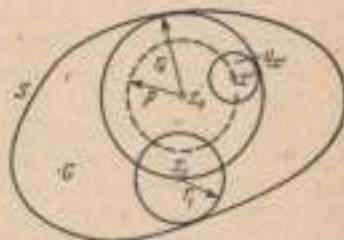


Рис. 76.

точке $x_0 \in G$,

$$M = u(x_0) = \max_{x \in \bar{G}} u(x). \quad (14)$$

Так как x_0 — внутренняя точка области G , то существует шар $U(x_0; r_0)$ наибольшего радиуса r_0 , содержащийся в G (рис. 76).

Докажем, что

$$u(x) \equiv M, \quad x \in U(x_0; r_0). \quad (15)$$

Из (14) следует

$$u(x) \leq M = u(x_0), \quad x \in U(x_0; r_0). \quad (16)$$

Если бы в некоторой точке $x' \in U(x_0; r_0)$ было $u(x') < M$, то, по непрерывности, неравенство $u(x) < M$ имело бы место и в некоторой окрестности $u_{x'}$ точки x' . Но тогда, применяя к сфере $S(x_0; \rho)$, где $\rho = |x' - x_0|$, формулу среднего арифметического (12) и пользуясь неравенством (16) и неравенством $u(x) < M$, $x \in u_{x'}$, получаем

$$u(x_0) = \frac{1}{\sigma_n \rho^{n-1}} \int_{S(x_0; \rho)} u(x) dS < \frac{M}{\sigma_n \rho^{n-1}} \int_{S(x_0; \rho)} dS = M,$$

что противоречит (14). Итак, тождество (15) установлено.

Возьмем теперь произвольную точку $x_1 \in G$, лежащую на границе шара $U(x_0, r_0)$ (рис. 76). По доказанному $u(x_1) = M$. Применяя предыдущие рассуждения к точке x_1 , заключаем, что $u(x) \equiv M$ в наибольшем шаре $U(x_1; r_1) \subset G$, и т. д. В силу леммы Гейне — Бореля за не более чем счетное число шагов таким путем исчерпывается вся область G , и, значит, $u(x) \equiv M$, $x \in G$, вопреки предположению.

Полученное противоречие показывает, что первоначальное предположение неверно; поэтому функция $u(x)$ не может принимать свое максимальное значение в области G . Отсюда, заменяя u на $-u$, заключаем, что функция $u(x)$ не может принимать свое минимальное значение в области G . Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, что гармоническая функция не может иметь внутри области ни локальных максимумов, ни локальных минимумов.

5. Следствия из принципа максимума.

а) Если функция $u \in C(\bar{G})$ — гармоническая в G , то

$$|u(x)| \leq \max_{x \in S} |u(x)|, \quad x \in \bar{G}. \quad (17)$$

В частности, если $u|_S = 0$, то $u(x) \equiv 0$, $x \in \bar{G}$.

Это утверждение следует из неравенства (13),

$$\pm u(x) \leq \max_{x \in S} \pm u(x) \leq \max_{x \in S} |u(x)|, \quad x \in \bar{G}.$$

Будем говорить, что (обобщенная) функция $u(x)$ непрерывна на бесконечности и принимает там значение a , $u(\infty) = a$, если она непрерывна вне некоторого шара и $u(x) \rightarrow a$ при $|x| \rightarrow \infty$.

б) Если функция $u \in C(\bar{G}_1)$ — гармоническая в области $G_1 = R^n \setminus \bar{G}$ и $u(\infty) = 0$, то

$$|u(x)| \leq \max_{x \in S} |u(x)|, \quad x \in \bar{G}_1. \quad (18)$$

В частности, если $u|_S = 0$ и $u(\infty) = 0$, то $u(x) \equiv 0$, $x \in \bar{G}_1$.

Действительно, пусть шар U_R содержит $\bar{G}$. Тогда $S \cup S_R$ есть граница области $Q_R = G_1 \cap U_R$ (рис. 77). Применяя к этой области неравенство (17), получаем

$$|u(x)| \leq \max_{x \in S \cup S_R} |u(x)| \leq \max_{x \in S} |u(x)| + \max_{x \in S_R} |u(x)|, \quad x \in Q_R.$$

Так как $u(\infty) = 0$, то

$$\max_{x \in S_R} |u(x)| \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Поэтому, переходя в полученном неравенстве к пределу при $R \rightarrow \infty$, получим неравенство (18).

с) Если последовательность функций $u_1, u_2, \dots$, гармонических в области G и непрерывных на $\bar{G}$, равномерно сходится на границе S , то она равномерно сходится и на $\bar{G}$.

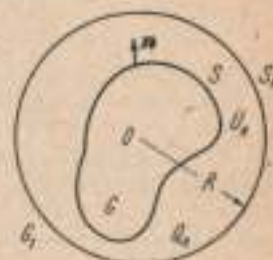


Рис. 77.

Это утверждение вытекает из неравенства (17):

$$|u_p(x) - u_q(x)| \leq \max_{x \in \bar{G}} |u_p(x) - u_q(x)| \rightarrow 0, \\ p, q \rightarrow \infty, \quad x \in \bar{G}. \quad (19)$$

Аналогичное утверждение справедливо и для области $G_1 = R^n \setminus \bar{G}$ при условии, что $u_+(\infty) = 0$.

6. Стирание особенностей гармонической функции. Для гармонических функций справедлива следующая теорема о стирании особенностей, аналогичная соответствующей теореме для аналитических функций.

Теорема. Если функция $u(x)$ — гармоническая в области $G \setminus \{0\}$ и удовлетворяет условию

$$u(x) = o(|\mathcal{E}_n(x)|), \quad x \rightarrow 0, \quad (20)$$

где $\mathcal{E}_n$ — фундаментальное решение оператора Лапласа, то она гармонически продолжается в точку $\{0\}$.

Доказательство. Пусть $U_R \subset G$. Введем функцию $\tilde{u}(x)$, равную $u(x)$ в U_R и 0 вне U_R . Эта функция локально интегрируема, и, в силу (3) § 24.1, функционал

$$\Delta \tilde{u} + \frac{\partial u}{\partial n} \delta_{S_R} + \frac{\partial}{\partial n} (u \delta_{S_R}) \quad (21)$$

обращается в нуль на всех основных функциях, равных нулю в окрестности точки $\{0\}$. Это значит, что обобщенная функция (21) либо равна 0, либо ее носитель есть точка $\{0\}$. Тогда, по теореме § 8.4, эта обобщенная функция представляется в виде конечной комбинации производных от $\delta(x)$, т. е.

$$\Delta \tilde{u} = -\frac{\partial u}{\partial n} \delta_{S_R} - \frac{\partial}{\partial n} (u \delta_{S_R}) + \sum_{|\alpha|=0}^m c_\alpha D^\alpha \delta. \quad (22)$$

Так как функция $\tilde{u}$ финитна, то ее свертка с фундаментальным решением $\mathcal{E}_n$ существует (см. § 7.6). Поэтому, применяя формулу (13) § 11.3, из (22) получаем представление

$$\tilde{u} = \mathcal{E}_n * \Delta \tilde{u} = -\mathcal{E}_n * \left(\frac{\partial u}{\partial n} \delta_{S_R} \right) - \mathcal{E}_n * \frac{\partial}{\partial n} (u \delta_{S_R}) + \\ + \sum_{|\alpha|=0}^m c_\alpha (\mathcal{E}_n * D^\alpha \delta) = V_n^{(m)}(x) + V_n^{(m)}(x) + \sum_{|\alpha|=0}^m c_\alpha D^\alpha \mathcal{E}_n(x). \quad (23)$$

Так как поверхностные потенциалы $V_n^{(m)}$ и $V_n^{(m)}$ — гармонические функции в шаре U_R (см. § 24.1), то из (23) и из условия (20) вытекает, что все $c_\alpha = 0$, так что функция

$$u(x) = V_n^{(m)}(x) + V_n^{(m)}(x)$$

— гармоническая в шаре U_R . Теорема доказана.

7. Обобщенно-гармонические функции. Вещественнозначная непрерывная функция $u(x)$ называется обобщенно-гармонической в области G , если она удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа, т. е.

$$(\Delta u, \varphi) = \int u(x) \Delta \varphi(x) dx = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G). \quad (24)$$

7. Очевидно, всякая гармоническая функция является обобщенно-гармонической. Справедлива и обратная.

Теорема. Всякая обобщенно-гармоническая функция $u(x)$ в области G бесконечно дифференцируема и, следовательно, гармонична в этой области.

Доказательство. Ввиду локального характера теоремы можно считать, что $u \in C(\bar{G})$. Продолжим функцию u нулем вне G , и пусть $\tilde{u}$ — продолженная функция. Применяя формулу (13) § 11.3, получим представление

$$\tilde{u} = \Delta \tilde{u} * \mathcal{E}_n, \quad (25)$$

где $\mathcal{E}_n$ — фундаментальное решение оператора Лапласа. Так как $\Delta \tilde{u} = \Delta u = 0$, $x \in G$ и $\Delta \tilde{u} = \Delta 0 = 0$, $x \in G_1$, то $\text{supp } \Delta \tilde{u} \subset S$. Поэтому, по теореме § 7.6, для свертки $\Delta \tilde{u} * \mathcal{E}_n$ имеет место представление

$$(\Delta \tilde{u} * \mathcal{E}_n, \varphi) = (\Delta \tilde{u}(y) \cdot \mathcal{E}_n(\xi), \eta(y) \varphi(y + \xi)) = \\ = (\Delta \tilde{u}(y), \eta(y) \int \mathcal{E}_n(\xi) \varphi(y + \xi) d\xi) = \\ = (\Delta \tilde{u}(y), \eta(y) \int \mathcal{E}_n(x - y) \varphi(x) dx), \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad (26)$$

где η — произвольная функция из $\mathcal{D}$, равная 1 в окрестности S .

Пусть $G' \subset G$. Выберем в (26) вспомогательную функцию η такую, что $\text{supp } \eta \cap G' = \emptyset$ (рис. 78). Поскольку фундаментальное решение $\mathcal{E}_n(x - y)$ — бесконечно дифференцируемая функция при $x \neq y$, то при выбранной η и всех $\varphi \in \mathcal{D}(G')$

$$\eta(y) \mathcal{E}_n(x - y) \varphi(x) \in \mathcal{D}(R^{2n}).$$

Применяя теперь к правой части равенств (26) формулу (14) § 7.3, f), получаем

$$(\Delta \tilde{u} * \tilde{\varepsilon}_n, \varphi) = \int \varphi(x) (\Delta \tilde{u}(y), \eta(y) \tilde{\varepsilon}_n(x-y)) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}'(G'),$$

откуда, в силу (25), следует равенство (ср. (34), § 7.10)

$$u(x) = (\Delta \tilde{u}(y), \eta(y) \tilde{\varepsilon}_n(x-y)), \quad x \in G'.$$

Из этого представления, как и при доказательстве леммы § 7.1, выводим, что $u \in C^\infty(G')$. Отсюда ввиду произвольности области $G' \subseteq G$ вытекает, что $u \in C^\infty(G)$. Поэтому



Рис. 78.

функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области G в классическом смысле (см. § 1.11), т. е. является гармонической в G . Теорема доказана.

8. Дальнейшие свойства гармонических функций. Отметим два следствия, вытекающих

из установленной в 24.7 эквивалентности понятий обобщенной гармоничности и гармоничности.

а) Если последовательность $u_1, u_2, \dots$ гармонических в области G функций слабо (в частности, равномерно на каждом компакте $K \subset G$ или монотонно) сходится к функции $u \in C(G)$, т. е.

$$\int u_k(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int u(x) \varphi(x) dx, \quad k \rightarrow \infty, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G), \quad (27)$$

то u — гармоническая функция в G .

Действительно, каждая функция последовательности $\{u_k\}$ удовлетворяет интегральному соотношению (24). Но тогда, в силу (27), и предельная функция $u(x)$ из $C(G)$ также будет удовлетворять равенству (24), т. е. является обобщенно-гармонической и, следовательно, гармонической функцией в области G .

б) Если функция $u \in C(G)$ такова, что для каждой точки $x \in G$ существует такое число $r_x = r_0(x) > 0$, что

при всех $r < r_0$ выполнено условие среднего арифметического

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S_r} u(x-y) dS_y, \quad (28)$$

то $u(x)$ — гармоническая функция в области G .

При доказательстве можно считать, что $u \in C(\bar{G})$; пусть $\tilde{u}$ — продолженная нулем вне G функция u . Возьмем $G' \subseteq G$. По лемме Гейне — Бореля (см. § 1.1) найдется такое число $r_0 = r_0(G') > 0$, что при всех $x \in G'$ и $r < r_0$ для функции $u(x)$ будет выполнено равенство (28). Составим свертку

$$f_r(x) = \left(\frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \delta_{S_r} - \frac{1}{r^2} \delta \right) * \tilde{u}, \quad (29)$$

где δ_{S_r} — простой слой на сфере S_r (см. § 5.7). Используя формулу (34) § 7.10, а), перепишем свертку (29) в виде

$$f_r(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S_r} \tilde{u}(x-y) dS_y - \frac{\tilde{u}(x)}{r^2}.$$

Отсюда, в силу (28), следует, что при всех $r < r_0$ $f_r(x) = 0$, $x \in G'$. С другой стороны, пользуясь предельным соотношением (41) § 6.5, б) и непрерывностью свертки (см. § 7.6), из (29) получаем

$$f_r \rightarrow \frac{1}{2n} \Delta \delta * \tilde{u} = \frac{1}{2n} \Delta \tilde{u}, \quad r \rightarrow 0 \text{ в } \mathcal{D}'$$

следовательно, $\Delta \tilde{u} = \Delta u = 0$, $x \in G'$. Отсюда ввиду произвольности $G' \subseteq G$ заключаем, что функция $u(x)$ — обобщенно-гармоническая и, значит, гармоническая в области G .

9. Аналог теоремы Лиувилля. Для гармонических функций во всем пространстве R^n справедлива следующая теорема, аналогичная теореме Лиувилля для аналитических функций.

Теорема. Если $u \in \mathcal{D}'$ удовлетворяет уравнению Лапласа во всем пространстве R^n , то u — полином.

Доказательство. Применяя к равенству $\Delta u = 0$ преобразование Фурье, получим (см. § 9.3, б)) $-\xi^2 F[u](\xi) = 0$, откуда вытекает, что $F[u] = 0$, $\xi \neq 0$, т. е. либо $F[u] = 0$, либо носитель $F[u]$ есть точка $\{0\}$.

По теореме § 8.4 $F[u]$ представляется в виде

$$F[u](\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^m c_\alpha D^\alpha \delta(\xi),$$

откуда следует, что u — полином. Теорема доказана.

Следствие. Если функция u — гармоническая в R^n и удовлетворяет неравенству

$$|u(x)| \leq C(1+|x|)^m, \quad x \in R^n, \quad m \geq 0,$$

то u — (гармонический) полином степени $\leq m$.

10. Поведение гармонической функции на бесконечности. Пусть точка x лежит вне шара U_R . Совершим преобразование инверсии

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2} x, \quad x = \frac{R^2}{|x^*|^2} x^*. \quad (30)$$

Точки x и x^* называются симметричными относительно сферы S_R . Симметричные точки удовлетворяют соотношению

$$|x||x^*| = R^2, \quad (31)$$

и поэтому преобразование инверсии взаимно однозначно преобразует внешность шара U_R на $U_R \setminus \{0\}$ (рис. 79).

Пусть функция $u(x)$ — гармоническая вне шара U_R .
Функция

$$u^*(x^*) = \left(\frac{R}{|x^*|}\right)^{n-2} u\left(\frac{R^2}{|x^*|^2} x^*\right) \quad (32)$$

называется преобразованием Кельвина функции $u(x)$.

Докажем, что при преобразовании Кельвина гармоничность сохраняется, т. е. функция $u^*(x^*)$ гармонична в $U_R \setminus \{0\}$.

Докажем это для $n=3$ (для $n \neq 3$ доказательство аналогично). Для этого перейдем к сферическим координатам (см. § 3.2). Пусть $x = (r, \vartheta, \varphi)$ и $u(x) = \hat{u}(r, \vartheta, \varphi)$. Тогда, в силу (30) и (31), $x^* = (\rho, \vartheta, \varphi)$, $\rho = \frac{R^2}{r}$ и, в

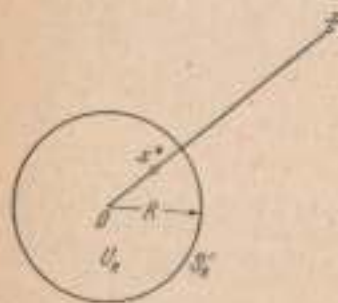


Рис. 79.

силу (32),

$$u^*(x^*) = \hat{u}^*(\rho, \vartheta, \varphi) = \frac{R}{\rho} \hat{u}\left(\frac{R^2}{\rho}, \vartheta, \varphi\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta u^*(x^*) &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial \hat{u}^*}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \hat{u}^*}{\partial \vartheta} \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \hat{u}^*}{\partial \varphi^2} = \frac{R^2}{\rho^2} \left[\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \hat{u}}{\partial \vartheta} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \varphi^2} \right] = \frac{R^2}{\rho^2} \Delta u(x), \end{aligned}$$

откуда и следует требуемое утверждение.

Теорема. Пусть функция $u(x)$ — гармоническая вне шара U_R и при $|x| \rightarrow \infty$ $u(x) = o(1)$ ($n \geq 3$), $u(x) = O(1)$ ($n=2$). Тогда

$$D^2 u(x) = O(1/|x|^{n-2+\alpha}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (33)$$

если $n \geq 3$. Если же $n=2$, то

$$\lim u(x) = a, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (34)$$

$$D^2 u(x) = O(1/|x|^{1+\alpha}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (|\alpha| \geq 1). \quad (35)$$

Доказательство. Совершая преобразование Кельвина (32), получим функцию $u^*(x^*)$, гармоническую в $U_R \setminus \{0\}$ и удовлетворяющую при $|x^*| \rightarrow 0$ условию

$$u^*(x^*) = \begin{cases} o(1), & \text{если } n \geq 3, \\ O(1), & \text{если } n=2, \end{cases}$$

т. е. в обоих случаях

$$u^*(x^*) = o(|\delta_n(x^*)|), \quad |x^*| \rightarrow 0.$$

По теореме о стирании особенностей гармонической функции (см. § 24.6) заключаем, что функция $u^*(x^*)$ гармоническая в шаре U_R . Совершая обратное преобразование Кельвина, для функции $u(x)$ получим представление

$$u(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} u^*\left(\frac{R^2}{|x|^2} x\right),$$

из которого и вытекают результаты (33) — (35). Теорема доказана.

Аналогично для $n=2$ доказывается (ср. § 24.5); если $u(x)$ — гармоническая в области O_1 , непрерывна на $\bar{O}_1$,

и $u(x) = O(1)$, $|x| \rightarrow \infty$, то

$$|u(x)| \leq \max_{x \in S} |u(x)|, \quad x \in G_1. \quad (36)$$

11. Упражнения. а) Пользуясь теоремой о среднем арифметическом (см. § 24.3), доказать следующую модификацию этой теоремы: если функция $u(x)$ — гармоническая в шаре U_R и непрерывная на $\bar{U}_R$, то

$$u(0) = \frac{1}{\sigma_n R^n} \int_{U_R} u(x) dx.$$

б) Пользуясь а), доказать теорему Лиувилля: если функция $u(x)$ — гармоническая в R^n и ограничена сверху (или снизу), то $u(x) = \text{const}$.

в) Пользуясь утверждением б) § 24.8, доказать следующий аналог принципа симметрии Римана — Шварца: пусть граница области G содержит открытое множество Σ , лежащее в плоскости $x_n = 0$, функция $u(x)$ гармоническая в G и обращается в нуль на Σ , тогда нечетное продолжение функции $u(x)$ в область $\bar{G}$, симметричную к G относительно плоскости $x_n = 0$, есть гармоническая функция в области $G \cup \Sigma \cup \bar{G}$ (рис. 80).



Рис. 80.

д) Доказать теорему: если u — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{D}(G)$ (см. § 5.5, замечание) и удовлетворяет уравнению Лапласа в области G , то u — гармоническая функция в G .

е) Пользуясь д), доказать: если обобщенная функция u удовлетворяет условию Коши — Римана $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$ в области $G \subset R^2$, то она аналитична в G .

ф) Пользуясь методом § 24.9, доказать теорему Лиувилля для аналитических функций.

г) Доказать формулу Грина (5) для функций, гармонических в $G_1 = R^n \setminus G$, имеющих правильную нормальную производную на $S \in C^2$ и $u(\infty) = 0$.

§ 25. Сферические функции

Рассмотрим еще один класс специальных функций, важный для математической физики.

1. Определение сферических функций. Сферической функцией (сферической гармоникой) порядка $l = 0, 1, \dots$ называется всякий однородный гармонический полином степени l , рассматриваемый на единичной сфере $S_1 \subset R^n$.

Таким образом, между сферическими функциями $Y_l(s)$, $s \in S_1$, порядка l и однородными гармоническими полиномами $u_l(x)$, $x \in R^n$, равенство

$$Y_l(s) = u_l\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{u_l(x)}{|x|^l}, \quad s = \frac{x}{|x|}, \quad (1)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие.

Сферические функции Y_l и $Y_{l'}$ различных порядков ортогональны в $\mathcal{L}_2(S_1)$.

$$(Y_l, Y_{l'}) = \int_{S_1} Y_l(s) Y_{l'}(s) ds = 0, \quad l \neq l'. \quad (2)$$

Действительно, применяя формулу Грина (8) § 21.2 для шара U_1 к гармоническим полиномам

$$u_l(x) = |x|^l Y_l\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad u_{l'}(x) = |x|^{l'} Y_{l'}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S_1} \left[|x|^{l'} Y_{l'} \frac{\partial (|x|^l Y_l)}{\partial n} - |x|^l Y_l \frac{\partial (|x|^{l'} Y_{l'})}{\partial n} \right] ds = \\ &= \int_{S_1} \left[Y_{l'} \frac{\partial (r^l Y_l)}{\partial r} - Y_l \frac{\partial (r^{l'} Y_{l'})}{\partial r} \right] ds = (l - l') \int_{S_1} Y_l(s) Y_{l'}(s) ds, \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

Для примера вычислим все сферические функции Y_l , $l = 0, 1, \dots$, на окружности S_1 ($n = 2$). Это удобно делать в полярных координатах (r, φ) , $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Применяя к гармоническому полиному

$$u_l(x) = r^l Y_l(\varphi) \quad (3)$$

оператор Лапласа (см. (15) § 3.2), для сферической функции Y_l получаем дифференциальное уравнение

$$Y_l'' + l^2 Y_l = 0,$$

откуда

$$Y_l(\varphi) = a_l \cos l\varphi + b_l \sin l\varphi, \quad l = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Итак, сферические функции на окружности — это тригонометрические функции. При этом, в силу (3) и (4),

$$\begin{aligned} u_l(x) &= r^l (a_l \cos l\varphi + b_l \sin l\varphi) = a_l \operatorname{Re} z^l + b_l \operatorname{Im} z^l, \\ z &= x_1 + ix_2, \end{aligned}$$

дает общий вид однородного гармонического полинома степени l в R^3 .

Наша задача — вычислить все сферические функции Y_l , $l=0, 1, \dots$, на сфере S_1 при $n=3$.

2. Дифференциальное уравнение для сферических функций. Найдем дифференциальное уравнение для сферических функций на сфере S_1 при $n=3$. Это удобно делать в сферических координатах (r, θ, φ) , $0 < r < \infty$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$. Применяя к гармоническому полиному

$$u_l(x) = r^l Y_l(\theta, \varphi) \quad (5)$$

оператор Лапласа (см. (14) § 3.2), для сферической функции Y_l получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_l}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_l}{\partial \varphi^2} + l(l+1) Y_l = 0. \quad (6)$$

Решения уравнения (6) будем искать в классе функций $C^\infty(S_1)$.

Для того чтобы функция Y_l была сферической функцией порядка l , необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала классу $C^\infty(S_1)$ и удовлетворяла уравнению (6).

Необходимость условий уже доказана. Докажем их достаточность. Пусть функция $Y_l \in C^\infty(S_1)$ есть решение уравнения (6). Тогда функция u_l , построенная по формуле (5), удовлетворяет уравнению Лапласа в сферических координатах и, значит, гармонична в $R^3 \setminus \{0\}$. Кроме того, эта функция ограничена в окрестности точки $x=0$. По теореме о стирании особенностей гармонической функции (см. § 24.6) функция u_l — гармоническая в R^3 . Далее, эта функция — однородная степени l . Отсюда, используя аналог теоремы Лиувилля (см. § 24.9), заключаем, что $u_l(x)$ — однородный гармонический полином степени l . Это и значит, что функция Y_l есть сферическая функция порядка l .

Для нахождения решений уравнения (6) применим метод Фурье. В соответствии с общей схемой этого метода *) ищем решение Y_l уравнения (6) в виде произведения

$$Y_l(\theta, \varphi) = \mathcal{P}(\cos \theta) \Phi(\varphi). \quad (7)$$

*) Более подробно этот метод изложен в §§ 26 и 32.

Подставляя выражение (7) в уравнение (6) и деля его на $\frac{\mathcal{P}\Phi}{\sin^2 \theta}$, получим

$$-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\mathcal{P}(\cos \theta)}{d\theta} \right] + l(l+1) \sin^2 \theta \mathcal{P}(\cos \theta)}{\mathcal{P}^2(\cos \theta)}. \quad (8)$$

Левая часть равенства (8) не зависит от θ , а правая — от φ . Следовательно, каждая из этих величин не зависит ни от θ , ни от φ , т. е. является постоянной величиной. Обозначая эту постоянную через ν , из равенства (8) для неизвестных функций Φ и $\mathcal{P}$ и параметра ν получаем уравнения

$$\Phi'' + \nu \Phi = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\mathcal{P}(\cos \theta)}{d\theta} \right] + \left[l(l+1) - \frac{\nu}{\sin^2 \theta} \right] \mathcal{P}(\cos \theta) = 0. \quad (10)$$

Чтобы функция (7) была однозначно определена на сфере S_1 , необходимо, чтобы Φ была 2π -периодической функцией. Но такие решения уравнения (9) имеет лишь при $\nu = m^2$, $m=0, 1, \dots$, причем

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}. \quad (11)$$

Таким образом, задача нахождения сферических функций свелась к уравнению (10) при $\nu = m^2$, $m=0, 1, \dots$. Совершая в этом уравнении замену переменной $\mu = \cos \theta$, для функции $\mathcal{P}(\mu)$ получаем уравнение

$$-[(1-\mu^2)\mathcal{P}']' + \frac{m^2}{1-\mu^2} \mathcal{P} = l(l+1)\mathcal{P}. \quad (12)$$

Решения уравнения (12) в точках ± 1 должны принимать конечные значения $|\mathcal{P}(\pm 1)| < \infty$.

3. Полиномы Лежандра. При $m=0$ уравнение (12) принимает вид

$$[(1-\mu^2)\mathcal{P}']' + l(l+1)\mathcal{P} = 0. \quad (13)$$

Проверим, что полиномы

$$\mathcal{P}_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\mu^l} (\mu^2 - 1)^l, \quad l=0, 1, \dots, \quad (14)$$

называемые полиномами Лежандра, удовлетворяют уравнению (13). Равенство (14) называется формулой Родрига.

Действительно, полагая $W_l = (\mu^2 - 1)^l$ и дифференцируя тождество

$$(\mu^2 - 1) W_l' - 2l\mu W_l = 0$$

$l+1$ раз, получаем

$$(\mu^2 - 1) W_l^{(l+2)} + 2\mu W_l^{(l+1)} - l(l+1) W_l^{(l)} = 0.$$

Таким образом, функция $W_l^{(l)}$ и, следовательно, полином $\mathcal{P}_l$ удовлетворяют уравнению (13).

Выпишем первые четыре полинома Лежандра:

$$\mathcal{P}_0(\mu) = 1, \quad \mathcal{P}_1(\mu) = \mu,$$

$$\mathcal{P}_2(\mu) = \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}, \quad \mathcal{P}_3(\mu) = \frac{5}{2}\mu^3 - \frac{3}{2}\mu.$$

Графики этих функций изображены на рис. 81.

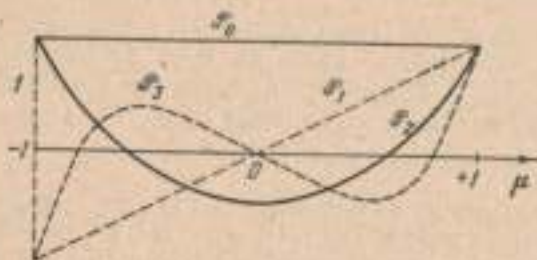


Рис. 81.

Из формулы (14) непосредственно следует, что

$$\mathcal{P}_l(1) = 1. \quad (15)$$

Полином Лежандра $\mathcal{P}_l$ — единственное линейно независимое решение уравнения (13) в классе $C^2([-1, 1])$.

Действительно, для всякого решения $\mathcal{P} \in C^2([-1, 1])$ уравнения (13) в силу формулы Остроградского — Лиувилля (см. (5) § 22.1) при $\rho(\mu) = 1 - \mu^2$ справедливо соотношение

$$\mathcal{P}_l'(\mu) \mathcal{P}(\mu) - \mathcal{P}_l(\mu) \mathcal{P}'(\mu) = \frac{a}{1 - \mu^2}, \quad |\mu| < 1,$$

откуда следует, что $a = 0$. Поэтому определитель Вронского для решений $\mathcal{P}_l$ и $\mathcal{P}$ обращается в нуль тожде-

ственно, и, следовательно, решения $\mathcal{P}_l$ и $\mathcal{P}$ линейно зависимы.

Полиномы Лежандра образуют ортогональную систему в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$.

В самом деле, так как полином Лежандра $\mathcal{P}_l(\mu)$ удовлетворяет уравнению (12) при $m=0$, то, в силу (11) и (7), $\mathcal{P}_l(\cos \theta) \in C^\infty(S_1)$ и удовлетворяет уравнению (6). Следовательно, $\mathcal{P}_l(\cos \theta)$ — сферическая функция порядка l (см. § 25.2). Но сферические функции различных порядков ортогональны в $\mathcal{L}_2(S_1)$ (см. § 25.1). Поэтому

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-1}^1 \mathcal{P}_l(\mu) \mathcal{P}_{l'}(\mu) d\mu &= \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \theta) \mathcal{P}_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi = 0, \quad l \neq l'. \end{aligned}$$

Замечание. Полином Лежандра $\mathcal{P}_l$ является собственной функцией оператора $-[(1-\mu^2)\mathcal{P}']'$, соответствующей простому собственному значению $\lambda = l(l+1)$. Роль граничных условий здесь играют условия конечности решения $\mathcal{P}(\mu)$ в точках ± 1 . Отметим, что функция $1-\mu^2$ обращается в нуль на концах основного интервала $(-1, 1)$ и потому не удовлетворяет условиям § 22.

4. Производящая функция. Пусть $x = (r, \theta, \varphi)$ и $y = (0, 0, 1)$. Разложим функцию

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r\cos\theta)(1-r\cos\theta)}} \quad (16)$$

в ряд по степеням r ,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(\cos\theta) r^l. \quad (17)$$

Ряд (17) сходится при $|r| < 1$ и $\theta \in [0, \pi]$, и его можно почленно дифференцировать по r и θ бесконечное число раз, причем полученные ряды будут сходиться равномерно по (r, θ) на $[-r_0, r_0] \times [0, \pi]$ при любом $r_0 < 1$. Применяя к равенству (17) почленно оператор Лапласа и учитывая, что функция (16) гармонична в шаре $|x| < 1$, при всех $r \in (0, 1)$ получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=0}^{\infty} \Delta[a_l(\cos\theta) r^l] = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} r^{l-2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{da_l}{d\theta} \right) + l(l+1) a_l \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что каждое слагаемое в последней сумме обращается в нуль, и, следовательно, функции $a_l(\mu)$ удовлетворяют уравнению (13). Поэтому $a_l(\mu) = C_l \mathcal{P}_l(\mu)$ (см. § 25.3) и разложение (17) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r \cos \theta + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \mathcal{P}_l(\cos \theta) r^l. \quad (18)$$

Для определения постоянных C_l положим в (18) $\theta = 0$ и воспользуемся равенством $\mathcal{P}_l(1) = 1$. В результате получим

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l,$$

откуда следует, что $C_l = 1$.

Итак, справедливо разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}_l(\mu) r^l, \quad |r| < 1. \quad (19)$$

Функция $(1-2r\mu+r^2)^{-\frac{1}{2}}$ называется *производящей функцией для полиномов Лежандра*.

Из формулы (19) легко получить рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра:

$$(l+1) \mathcal{P}_{l+1}(\mu) - (2l+1) \mu \mathcal{P}_l(\mu) + l \mathcal{P}_{l-1}(\mu) = 0, \quad (20)$$

$$(2l+1) \mathcal{P}_l(\mu) = \mathcal{P}'_{l+1}(\mu) - \mathcal{P}'_{l-1}(\mu). \quad (21)$$

Для этого, дифференцируя тождество (19) по r и μ и умножая затем на $1-2r\mu+r^2$, получим тождества

$$(\mu-r) \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}_l(\mu) r^l = (1-2r\mu+r^2) \sum_{l=0}^{\infty} l \mathcal{P}_l(\mu) r^{l-1},$$

$$r \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}_l(\mu) r^l = (1-2r\mu+r^2) \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}'_l(\mu) r^l.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r , получаем соотношения (20) и

$$\mathcal{P}_l(\mu) = \mathcal{P}'_{l-1}(\mu) - 2\mu \mathcal{P}'_l(\mu) + \mathcal{P}'_{l+1}(\mu). \quad (22)$$

Дифференцируя равенства (20), имеем

$$(l+1) \mathcal{P}'_{l+1}(\mu) - (2l+1) \mathcal{P}'_l(\mu) - (2l+1) \mu \mathcal{P}'_l(\mu) + l \mathcal{P}'_{l-1}(\mu) = 0.$$

Исключая из этого соотношения и соотношения (22) произведение $\mu \mathcal{P}'_l(\mu)$, получим равенства (21).

Докажем формулу

$$|\mathcal{P}_l|^2 = \int_{-1}^1 \mathcal{P}_l^2(\mu) d\mu = \frac{2}{2l+1}. \quad (23)$$

Для этого один из множителей $\mathcal{P}_l$ подынтегральной функции выразим через $\mathcal{P}_{l-1}$ и $\mathcal{P}_{l-2}$ по формуле (20). Пользуясь ортогональностью полиномов $\mathcal{P}_l$ и $\mathcal{P}_{l-2}$, получим

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_l|^2 &= \int_{-1}^1 \mathcal{P}_l \mathcal{P}_l d\mu = \int_{-1}^1 \mathcal{P}_l \left(\frac{2l-1}{l} \mu \mathcal{P}_{l-1} - \frac{l-1}{l} \mathcal{P}_{l-2} \right) d\mu = \\ &= \frac{2l-1}{l} \int_{-1}^1 \mu \mathcal{P}_l \mathcal{P}_{l-1} d\mu. \end{aligned}$$

Выражая произведение $\mu \mathcal{P}_l$ по формуле (20) и пользуясь ортогональностью полиномов $\mathcal{P}_{l-1}$ и $\mathcal{P}_{l-1}$, получим

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_l|^2 &= \frac{2l-1}{l} \int_{-1}^1 \mathcal{P}_{l-1} \left(\frac{l+1}{2l+1} \mathcal{P}_{l+1} + \frac{l}{2l+1} \mathcal{P}_{l-1} \right) d\mu = \\ &= \frac{2l-1}{2l+1} |\mathcal{P}_{l-1}|^2, \end{aligned}$$

откуда и вытекает формула (23):

$$|\mathcal{P}_l|^2 = \frac{2l-1}{2l+1} \frac{2l-3}{2l-1} \dots \frac{1}{3} |\mathcal{P}_1|^2 = \frac{2}{2l+1}.$$

Система полиномов Лежандра $\mathcal{P}_l$, $l=0, 1, \dots$, полная в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$.

Это утверждение вытекает из теоремы § 1.9 и из теоремы Вейерштрасса (см. § 1.3), согласно которой множество полиномов, а следовательно, и множество линейных комбинаций полиномов Лежандра плотно в $C([-1, 1])$ и, значит, в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$.

Таким образом, всякая функция $f \in \mathcal{L}_2(-1, 1)$ разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра

$$f(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} (f, \mathcal{P}_l) \mathcal{P}_l(\mu),$$

сходящийся в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ (см. § 1.9).

5. Присоединенные функции Лежандра. Проверим, что функции

$$\mathcal{P}_l^m(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \mathcal{P}_l^{(m)}(\mu), \quad l=0, 1, \dots; \quad m=0, 1, \dots, l, \quad (24)$$

называемые *присоединенными функциями Лежандра*, удовлетворяют уравнению (12).

Действительно, производя в уравнении (12) замену

$$\mathcal{P}(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} z(\mu),$$

для функции z получим уравнение

$$(1-\mu^2)z'' - 2\mu(m+1)z' + (l^2 + l - m^2 - m)z = 0. \quad (25)$$

С другой стороны, дифференцируя уравнение (13) m раз, убедимся, что производная $\mathcal{P}_l^{(m)}$ удовлетворяет уравнению (25). Следовательно, присоединенные функции Лежандра $\mathcal{P}_l^m$ удовлетворяют уравнению (12).

Умножая уравнение (25) на $(1-\mu^2)^m$, перепишем его для $z = \mathcal{P}_l^{(m)}$ в виде

$$[(1-\mu^2)^{m+1} \mathcal{P}_l^{(m+1)}]' = -(l-m)(l+m+1)(1-\mu^2)^m \mathcal{P}_l^{(m)}. \quad (26)$$

При каждом $m \geq 0$ система присоединенных функций Лежандра $\mathcal{P}_l^m$, $l=m, m+1, \dots$, ортогональна в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$, причем

$$(\mathcal{P}_l^m)^2 = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}. \quad (27)$$

Это утверждение верно при $m=0$ для полиномов Лежандра $\mathcal{P}_l = \mathcal{P}_l^0$ (см. §§ 25.3 и 25.4). Отсюда, пользуясь определением функций $\mathcal{P}_l^m$ и формулой (26) с заменой m

на $m-1$, получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_l^m, \mathcal{P}_l^m) &= \int_{-1}^1 \mathcal{P}_l^m \mathcal{P}_l^m d\mu = \int_{-1}^1 (1-\mu^2)^m \mathcal{P}_l^{(m)} \mathcal{P}_l^{(m)} d\mu = \\ &= (1-\mu^2)^m \mathcal{P}_l^{(m)} \mathcal{P}_l^{(m-1)} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \mathcal{P}_l^{(m-1)} [(1-\mu^2)^m \mathcal{P}_l^{(m)}]' d\mu = \\ &= (l-m-1)(l+m) \int_{-1}^1 (1-\mu^2)^{m-1} \mathcal{P}_l^{(m-1)} \mathcal{P}_l^{(m-1)} d\mu = \\ &= (l+m)(l-m+1)(\mathcal{P}_l^{m-1}, \mathcal{P}_l^{m-1}) = \\ &= (l+m)(l+m-1)(l-m+1)(l-m+2) \times \\ &\times (\mathcal{P}_l^{m-2}, \mathcal{P}_l^{m-2}) = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} (\mathcal{P}_l^0, \mathcal{P}_l^0) = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll}, \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

При каждом $m \geq 0$ система присоединенных функций Лежандра $\mathcal{P}_l^m$, $l=m, m+1, \dots$, полна в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$.

Действительно, возьмем произвольную функцию f из класса $\mathcal{F}(-1, 1)$, плотного в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ (см. § 1.7). Тогда

$$\psi(\mu) = f(\mu) (1-\mu^2)^{-\frac{m}{2}} \in \mathcal{F}(-1, 1).$$

По теореме Вейерштрасса (см. § 1.3) функцию ψ можно сколь угодно точно приблизить в $C([-1, 1])$ полиномами и, следовательно, линейными комбинациями производных $\mathcal{P}_l^{(m)}$, $l=m, m+1, \dots$. Отсюда следует, что функцию f можно сколь угодно точно приблизить в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ линейными комбинациями функций системы $\mathcal{P}_l^m$, $l=m, m+1, \dots$, что, в силу теоремы § 1.9, и доказывает полноту этой системы.

6. Сферические функции. В силу (7), (11) и (24) получена следующая совокупность решений уравнения (6):

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \begin{cases} \mathcal{P}_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi, & m=0, 1, \dots, l; \\ \mathcal{P}_l^{|m|}(\cos \theta) \sin |m|\varphi, & m=-1, -2, \dots, -l, \end{cases} \quad (28)$$

или в комплексной форме:

$$\hat{Y}_l^m(\theta, \varphi) = \mathcal{P}_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (28)$$

Эти функции, очевидно, принадлежат классу $C^\infty(S_1)$. Поэтому $Y_l^m(\theta, \varphi)$ — сферические функции (см. § 25.2).

Распределение знаков сферической функции $Y_1^0(\theta, \varphi) = 15 \sin^2 \theta \cos \theta \cos 2\varphi$ на единичной сфере изображено на рис. 82.

Сферические функции Y_l^m , $m=0, \pm 1, \dots, \pm l$, порядка l линейно независимы, и их линейные комбинации

$$Y_l(s) = \sum_{m=-l}^l a_l^{(m)} Y_l^m(s) \quad (29)$$

с произвольными коэффициентами $a_l^{(m)}$ также являются сферическими функциями порядка l .

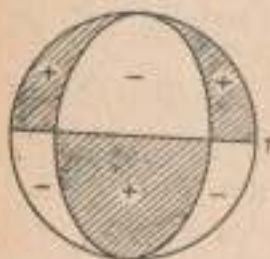


Рис. 82.

Сферические функции $\{Y_l^m\}$ образуют ортогональную и полную систему в $\mathcal{L}_2(S_1)$, причем

$$\|Y_l^m\|^2 = 2\pi \frac{1 + \delta_{m0}}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \quad (30)$$

Действительно, тригонометрическая система $\{e^{im\varphi}, m=0, 1, \dots\}$ ортогональна и полна в $\mathcal{L}_2(0, 2\pi)$ и при каждом

$m=0, 1, \dots$ система присоединенных функций Лежандра $\{P_l^m(\mu), l=m, m+1, \dots\}$ ортогональна и полна в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ (см. § 25.5). Поэтому, по лемме § 1.9, система функций $\{P_l^m(\mu) e^{im\varphi}, l=0, 1, \dots, m=0, 1, \dots, l\}$

ортогональна и полна в $\mathcal{L}_2[(-1, 1) \times (0, 2\pi)]$, и, следовательно, система сферических функций $\{Y_l^m(\theta, \varphi)\}$ ортогональна и полна в $\mathcal{L}_2(S_1)$. Формула (30) вытекает из (27):

$$\begin{aligned} \|Y_l^m\|^2 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [Y_l^m(\theta, \varphi)]^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \\ &= \int_{-1}^1 [P_l^{|m|}(\mu)]^2 d\mu \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 m\varphi}{\sin^2 m\varphi} d\varphi = 2\pi \frac{1 + \delta_{m0}}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}. \end{aligned}$$

Полнота ортогональной системы сферических функций $\{Y_l^m\}$ означает, что всякая функция f из $\mathcal{L}_2(S_1)$ раз-

лагается в ряд Фурье по этим функциям:

$$f(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_l^{(m)} Y_l^m(s) = \sum_{l=0}^{\infty} Y_l(s), \quad (31)$$

сходящийся в $\mathcal{L}_2(S_1)$. В соответствии с (30) коэффициенты $a_l^{(m)}$ ряда (31) вычисляются по формуле

$$a_l^{(m)} = \frac{2l+1}{2\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (32)$$

Пусть $Q_l(s)$ — произвольная сферическая функция порядка l . Тогда $(Q_l, Y_{l'}) = 0$, $l \neq l'$ (см. § 25.1), и в разложении (31) для функции Q_l остается только одно слагаемое Y_l , так что $Q_l = Y_l$. Итак, доказано:

Сферические функции $\{Y_l^m\}$ исчерпывают все линейно независимые сферические функции: формула (29) дает общее выражение для сферической функции порядка l .

Замечание. Сферические функции Y_l^m , $m=0, \pm 1, \dots, \pm l$, являются собственными функциями оператора Бельтрами

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}, \quad Y \in C^\infty(S_1),$$

соответствующими собственному значению $\lambda = l(l+1)$ кратности $2l+1$.

7. Формула Лапласа. Пусть $Y_l(s)$ — сферическая функция порядка l . Применяя формулу Грина (5) § 24.1 для шара U_1 к гармоническому полиному $r^l Y_l(s)$, получим при $r < 1$

$$\begin{aligned} r^l Y_l(s) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left\{ \frac{\partial [r^l Y_l(s')]}{\partial n_{s'}} \frac{1}{|x-s'|} - \right. \\ &\quad \left. - |s'|^l Y_l(s') \frac{\partial}{\partial n_{s'}} \frac{1}{|x-s'|} \right\} ds'. \quad (33) \end{aligned}$$

- с) Пользуясь рекуррентными соотношениями (20) и (21), доказать, что корни $\mathcal{P}_l(\mu)$, $l \geq 1$, вещественные, простые, лежат в $(-1, 1)$ и что
- д) корни полиномов $\mathcal{P}_l(\mu)$ и $\mathcal{P}_{l+1}(\mu)$ перемежаются.
- е) Доказать тождество

$$\mathcal{P}_l(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\mu + i\sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi)^l d\varphi.$$

- ф) Пользуясь формулой (36), доказать следующую теорему Функа-Хекке. Если $\mathcal{K}(\mu) \in \mathcal{L}_2(-1, 1)$ и $\int_{-1}^1 \mathcal{K}(\mu) \mathcal{P}_k(\mu) d\mu \neq 0$, то $\lambda_k = \frac{1}{2\pi \int_{-1}^1 \mathcal{K}(\mu) \mathcal{P}_k(\mu) d\mu}$ и $Y_k^\pi(x)$, $\pi = 0, \pm 1, \dots, \pm k$ — характеристическое число и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{S_1} \mathcal{K}[(x, s')] \varphi(s) ds'.$$

- г) Пользуясь е), а также формулой с) § 23.9) доказать, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{P}_l\left(\cos \frac{x}{l}\right) = J_0(x).$$

§ 26. Метод Фурье для задачи на собственные значения

Для определения собственных значений и собственных функций многомерных эллиптических операторов, допускающих разделение переменных, применяется метод Фурье.

1. Общая схема метода Фурье. Разобьем независимые переменные на две группы: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, и пусть $G \subset R^n$ — область изменения x и $D \subset R^m$ — область изменения y . Обозначим через S и Γ границы областей G и D соответственно. Тогда $(S \times D) \cup (G \times \Gamma)$ есть граница области $G \times D \subset R^{n+m}$. В области $G \times D$ рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения для уравнения эллиптического типа:

$$Lu + Mu = \lambda u, \quad (1)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S \times D} = 0, \quad \gamma u + \delta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{G \times \Gamma} = 0, \quad (2)$$

где L и M — эллиптические операторы, не зависящие от y и x соответственно; функции α, β не зависят от y и функции γ, δ не зависят от x .

Будем искать собственные функции задачи (1) — (2) в виде произведения $X(x)Y(y)$,

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (3)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), получаем

$$Y(y)LX(x) + X(x)MY(y) = \lambda X(x)Y(y),$$

откуда

$$\frac{LX(x)}{X(x)} = \lambda - \frac{MY(y)}{Y(y)}. \quad (4)$$

Левая часть равенства (4) не зависит от y , а правая — от x . Следовательно, эти выражения не зависят ни от x , ни от y , т. е. равны постоянной. Обозначая эту постоянную через μ и полагая $\nu = \lambda - \mu$, из (4) получаем два уравнения:

$$LX = \mu X, \quad (5)$$

$$MY = \nu Y. \quad (6)$$

Таким образом, уравнение (1) распалось на два уравнения (5) и (6), или, как говорят, *переменные разделились*; при этом дополнительно появился неизвестный параметр μ .

Для вывода граничных условий для функций $X(x)$ и $Y(y)$ подставим произведение $X(x)Y(y)$ в граничные условия (2). В результате, после сокращений, получим

$$\alpha X + \beta \frac{\partial X}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad (7)$$

$$\gamma Y + \delta \frac{\partial Y}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0. \quad (8)$$

Итак, краевая задача на собственные значения (1) — (2) распалась на две крайние задачи на собственные значения (5) — (7) и (6) — (8) с меньшим числом независимых переменных. Обозначим через $\mu_k, X_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, и $\nu_j, Y_j(y)$, $j = 1, 2, \dots$, все собственные значения и собственные функции операторов L и M соответственно. В силу (3)

$$\lambda_{kj} = \mu_k + \nu_j, \quad u_{kj}(x, y) = X_k(x)Y_j(y), \quad k, j = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

суть собственные значения и собственные функции исходной краевой задачи (1) — (2).

Замечание. Пусть ортонормальные системы собственных функций $\{X_k\}$ и $\{Y_j\}$ полны в $\mathcal{L}_2(G)$ и $\mathcal{L}_2(D)$ соответственно (см. § 21.4). Тогда по лемме § 1.9 система собственных функций $\{X_k Y_j\}$ ортонормальна и полна в $\mathcal{L}_2(G \times D)$. В этом случае формулы (9) дают все собственные значения и собственные функции краевой задачи (1) — (2).

2. Примеры.

а) Рассмотрим краевую задачу на собственные значения для прямоугольника $\Pi = (0, l) \times (0, m)$ с границей L (рис. 83):

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u, \quad u|_L = 0. \quad (10)$$

В соответствии с общей схемой метода Фурье эта задача распадается на две одномерные краевые задачи:

$$-X'' = \mu X, \quad X(0) = X(l) = 0; \quad (11)$$

$$-Y'' = \nu Y, \quad Y(0) = Y(m) = 0. \quad (12)$$

Собственные значения и собственные функции этих краевых задач вычислены в § 22.4:

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k=1, 2, \dots; \quad (13)$$

$$\nu_j = \left(\frac{j\pi}{m}\right)^2, \quad Y_j(y) = \sqrt{\frac{2}{m}} \sin \frac{j\pi y}{m}, \quad j=1, 2, \dots \quad (14)$$

Из (13) и (14) в соответствии с формулами (9) получаем следующие собственные значения и собственные функции краевой задачи (10):

$$\lambda_{kj} = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2} \right), \quad X_{kj}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{lm}} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m}, \quad (15)$$

$$k, j=1, 2, \dots$$

Так как построенные ортонормальные системы собственных функций $\{X_k\}$ и $\{Y_j\}$ полны (см. § 22.3), то в силу замечания § 26.1, других собственных значений и собственных функций задача (10) не имеет. Отметим, что собственные значения λ_{kj} могут повторяться, т. е. $\lambda_{kj} = \lambda_{k'j'}$ при некотором наборе номеров (k, j) . Количество таких повторений, равное числу решений в целых

числах уравнения

$$\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2} = \frac{k_1^2}{l^2} + \frac{j_1^2}{m^2},$$

дает кратность собственного значения λ_{kj} . Например, при $l=m=1$ кратность $\lambda_{47} = \lambda_{74} = \lambda_{13} = \lambda_{31}$ равна 4 ($4^2 + 7^2 = 7^2 + 4^2 = 1^2 + 8^2 = 8^2 + 1^2$).



Рис. 83.

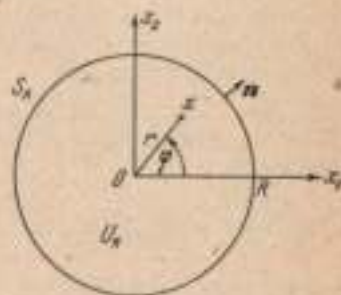


Рис. 84.

б) Рассмотрим краевую задачу на собственные значения для круга U_R (рис. 84):

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{S_R} = 0. \quad (16)$$

Эту задачу удобно решать в полярных координатах $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $0 \leq r < R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. В этих координатах задача (16) для функции $\bar{u}(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ принимает вид (см. § 3.2)

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} = \lambda \bar{u}, \quad \bar{u}(R, \varphi) = 0. \quad (17)$$

К граничному условию при $r=R$ необходимо еще добавить граничное условие при $r=0$. Это условие состоит в том, что функция $\bar{u}$ должна быть ограниченной в окрестности точки $r=0$. Далее, функция $\bar{u}$, очевидно, должна быть 2π -периодической относительно φ .

Применяя к задаче (17) метод Фурье, для функции $\bar{u}(r, \varphi) = \mathcal{R}(r) \Phi(\varphi)$ получаем две одномерные краевые задачи:

$$-\Phi'' = \mu \Phi, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi); \quad (18)$$

$$r(r\mathcal{R}')' + (\lambda r^2 - \mu)\mathcal{R} = 0, \quad |\mathcal{R}(0)| < \infty, \quad \mathcal{R}(R) = 0. \quad (19)$$

Собственные значения и собственные функции задачи (18) легко вычисляются (тригонометрические функции):

$$\mu_k = k^2, \quad \Phi_k(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\varphi}, \quad k=0, 1, \dots \quad (20)$$

Далее, уравнение (19) есть уравнение Бесселя (см. § 23). Ограниченное в нуле решение $\mathcal{R}(r)$ этого уравнения при $\mu = k^2$ выражается функцией Бесселя $J_k(\sqrt{\lambda}r)$. Чтобы получить собственные значения λ , нужно воспользоваться вторым граничным условием (19), $J_k(\sqrt{\lambda}R) = 0$, т. е. $\sqrt{\lambda}R = \mu_i^{(k)}$, где $\mu_i^{(k)}$, $i=1, 2, \dots$, — положительные корни функции Бесселя $J_k(\mu)$. Отсюда следует, что

$$\lambda_{ki} = \frac{[\mu_i^{(k)}]^2}{R^2}, \quad \mathcal{R}_{ki}(r) = c_{ki} J_k\left(\mu_i^{(k)} \frac{r}{R}\right), \quad i=1, 2, \dots, \quad (21)$$

— собственные значения и собственные функции краевой задачи (19) при $\mu = k^2$. Выбирая нормирующие множители c_{ki} такими, что

$$\frac{1}{c_{ki}} = \sqrt{\int_0^R J_k^2\left(\mu_i^{(k)} \frac{r}{R}\right) r dr} = \frac{R}{\sqrt{2}} |J'_k(\mu_i^{(k)})|, \quad (22)$$

получим ортонормальную и полную систему $\{\mathcal{R}_{ki}\}$ в $\mathcal{X}_2[(0, R); r]$ (см. § 23.7).

Из (20), (21) и (22) получаем, что

$$\lambda_{ki} = \frac{[\mu_i^{(k)}]^2}{R^2}, \quad X_{ki}(x) = \frac{J_k\left(\mu_i^{(k)} \frac{r}{R}\right) e^{ik\varphi}}{\sqrt{2\pi R} |J'_k(\mu_i^{(k)})|}, \quad i=1, 2, \dots, \quad (23)$$

суть собственные значения и собственные функции краевой задачи (17), а значит, и задачи (16)*.

* Строго говоря, пока установлено лишь, что функции X_{ki} удовлетворяют уравнению (16) при $\lambda = \lambda_{ki}$ в $U_R \setminus \{0\}$. Но из равенства

$$J_k(r) e^{ik\varphi} = \left(\frac{x_1 + ix_2}{2}\right)^k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (x_1^2 + x_2^2)^p}{4^p \Gamma(p+k+1) \Gamma(p+1)}$$

(см. § 23.1) следует, что $X_{ki} \in C^\infty(U_R)$ (ср. § 30.2). Поэтому уравнение (16) будет удовлетворено и в точке $x=0$.

Нули собственной функции $\text{Im } X_{3i}(x) = c_{3i} J_3\left(\mu_i^{(3)} \frac{r}{R}\right) \sin 3\varphi$ изображены на рис. 85.

По лемме § 1.9 система собственных функций $\{X_{ki}\}$ ортонормальна и полна в $\mathcal{X}_2(U_R)$, и поэтому других собственных значений и собственных функций задачи (16) не имеет.

с) Рассмотрим краевую задачу на собственные значения для трехмерного шара U_R :

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{\partial U_R} = 0. \quad (24)$$

Эту задачу удобно решать в сферических координатах (r, θ, φ) , $0 \leq r < R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. В этих координатах задача (24) для функции $\hat{u}(r, \theta, \varphi) = u(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ принимает вид (см. § 3.2)

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \varphi^2} = \lambda \hat{u}, \quad (25)$$

$$|\hat{u}(0, \theta, \varphi)| < \infty, \quad \hat{u}(R, \theta, \varphi) = 0,$$

$$\hat{u}(r, \theta, \varphi) = \hat{u}(r, \theta, \varphi + 2\pi). \quad (26)$$

В соответствии с общей схемой метода Фурье собственные функции задачи (25)–(26) ищем в виде произведения $\mathcal{R}(r) Y(\theta, \varphi)$. Разделяя переменные, для функций Y и $\mathcal{R}$ получим краевые задачи:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \mu Y = 0, \quad Y \in C^\infty(S_1); \quad (27)$$

$$(r^2 \mathcal{R}')' + (\lambda r^2 - \mu) \mathcal{R} = 0, \quad |\mathcal{R}(0)| < \infty, \quad \mathcal{R}(R) = 0. \quad (28)$$

При $\mu = l(l+1)$, $l=0, 1, \dots$ задача (27) имеет решения и этими решениями являются сферические функции Y_l^m , $m=0, \pm 1, \dots, \pm l$ (см. § 25.6). При $\mu = l(l+1)$ уравнение (28) для функции $\mathcal{R}_1 = \sqrt{r} \mathcal{R}$ превращается в уравнение Бесселя (см. § 23)

$$r^2 \mathcal{R}_1'' + r \mathcal{R}_1' + \left[\lambda r^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \mathcal{R}_1 = 0.$$



Рис. 85.

Поэтому ограниченным в нуле решением уравнения (28) является функция

$$\mathcal{R}(r) = \frac{1}{Vr} J_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r). \quad (29)$$

Чтобы удовлетворить граничному условию $\mathcal{R}(R) = 0$, необходимо положить в (29) $V\sqrt{\lambda}R = \mu_l^{(l+\frac{1}{2})}$, где $\mu_l^{(l+\frac{1}{2})}$ — положительные корни функции Бесселя $J_{l+\frac{1}{2}}(\mu)$. Итак,

$$\lambda_{lm} = \left[\frac{\mu_l^{(l+\frac{1}{2})}}{R} \right]^2, \quad X_{lm}(x) = \frac{c_{lm}}{Vr} J_{l+\frac{1}{2}}\left(\mu_l^{(l+\frac{1}{2})} \frac{r}{R}\right) Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (30)$$

$$l = 0, 1, \dots, j = 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \dots, \pm l,$$

— собственные значения и собственные функции краевой задачи (24). Выбирая нормирующие множители c_{lm} такими, что (см. формулы (35) § 23.7 и (30) § 25.6)

$$\frac{1}{c_{lm}} = \sqrt{\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} J_{l+\frac{1}{2}}^2\left(\mu_l^{(l+\frac{1}{2})} \frac{r}{R}\right) \left| Y_l^m(\theta, \varphi) \right|^2 r dr d\theta d\varphi} = R \left| J_{l+\frac{1}{2}}'\left(\mu_l^{(l+\frac{1}{2})}\right) \right| \sqrt{\pi \frac{1+\delta_{lm}}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}}, \quad (31)$$

и учитывая ортогональность и полноту функций Бесселя в $\mathcal{L}_2\{(0, R); r\}$ (см. § 23.7) и сферических функций в $\mathcal{L}_2(S_1)$ (см. § 25.6), в силу леммы § 1.9 заключаем, что система собственных функций (30) ортонормальна и полна в $\mathcal{L}_2(U_R)$, поэтому других собственных значений и собственных функций задача (24) не имеет.

Аналогичным образом рассматривается и краевая задача

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u|_{S_R} = 0, \quad \alpha \geq 0.$$

§ 27. Ньютонов потенциал

Этот параграф посвящен более детальному изучению свойств ньютонова потенциала в трехмерном пространстве (см. § 7.10). Этот потенциал определяется как свертка

обобщенной функции ρ (плотности) с функцией $|x|^{-1}$:

$$V = \frac{1}{|x|} * \rho = -4\pi \mathcal{E}_3 * \rho. \quad (1)$$

Потенциал V удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V = -4\pi \rho. \quad (2)$$

Основы классической теории потенциала заложены А. М. Ляпуновым [1] в конце прошлого века.

1. Объемный потенциал. Если $\rho \in C^0$ (абсолютно) интегрируемая функция на G и $\rho(x) = 0$, $x \in G_1 = R^3 \setminus G$, то ньютонов потенциал V , называемый **объемным потенциалом**, выражается интегралом

$$V(x) = \int_G \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy \quad (3)$$

и представляет собой локально интегрируемую функцию в R^3 (см. § 7.10, с).

Если $\rho \in C(G)$ и G — ограниченная область, то **объемный потенциал V принадлежит классу $C^1(R^3)$, гармоничен в G_1 и**

$$V(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Действительно, так как G — ограниченная область и $\rho \in C(G)$, то по теореме § 1.6 интеграл (3) принадлежит $C^1(R^3)$, и по формуле (7) § 1.6

$$V(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

При $x \in G$ потенциал $V(x)$ допускает непрерывное дифференцирование под знаком интеграла в (3) бесконечное число раз, так что $V \in C^\infty(G_1)$. Отсюда и из уравнения (2) вытекает, что $\Delta V = 0$, $x \in G_1$, т. е. потенциал V — гармоническая функция в области G_1 (по лемме § 11.1).

Если $\rho \in C^1(G) \cap C(G)$, то $V \in C^2(G)$.

Для доказательства возьмем подобласть $G' \subset G$ с кучно-гладкой границей S' и внешней нормалью n' (рис. 86). При этом потенциал V разобьется на сумму двух объемных потенциалов V_1 и V_2 , $V = V_1 + V_2$, где

$$V_1(x) = \int_{G'} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy, \quad V_2(x) = \int_{G \setminus G'} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy.$$

По доказанному $V_1 \in C^1(R^3)$, $V_2 \in C^\infty(G')$. Дифференцируя потенциал V_1 как свертку, получим (см. § 7.5, с))

$$\text{grad } V_1(x) = \text{grad} \left(\frac{1}{|x|} * \rho_1 \right) = \frac{1}{|x|} * \text{grad } \rho_1, \quad \rho_1 = \rho|_G. \quad (4)$$

Так как $\rho_1 \in C^1(G')$, то по формуле (22) § 6.5

$$\text{grad } \rho_1 = [\text{grad } \rho_1] - \rho n' \delta_S.$$

Подставляя полученное выражение в (4) и пользуясь формулой (3) для объемного потенциала и формулой (40) § 7.10 для потенциала простого слоя, получим

$$\begin{aligned} \text{grad } V_1(x) &= \frac{1}{|x|} * [\text{grad } \rho_1] - \frac{1}{|x|} * \rho n' \delta_S = \\ &= \int_G \frac{\text{grad } \rho(y)}{|x-y|} dy - \int_S \frac{\rho(y) n'}{|x-y|} dS_y. \end{aligned} \quad (5)$$

Первое слагаемое в правой части (5), как объемный потенциал с плотностью $\text{grad } \rho \in C(G')$, принадлежит классу $C^1(R^3)$, а второе — классу $C^\infty(G')$. Следовательно, $\text{grad } V_1 \in C^1(G')$, т. е. $V_1 \in C^2(G')$. Но тогда и $V = V_1 + V_2 \in C^2(G')$ и, ввиду произвольности $G' \subseteq G$, $V \in C^2(G)$, что и требовалось доказать.



Рис. 86.

2. Потенциалы простого и двойного слоя. Пусть

S — ограниченная кусочно-гладкая двухсторонняя*) поверхность, n — выбранное направление нормали к ней и μ и ν — непрерывные функции на S . Ньютоновы потенциалы

$$V^{(0)} = \frac{1}{|x|} * \mu \delta_S \quad \text{и} \quad V^{(1)} = -\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_S),$$

называемые потенциалами простого и двойного слоя соответственно, выражаются интегралами

$$V^{(0)}(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y, \quad (6)$$

$$V^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} dS_y \quad (7)$$

*) Та сторона поверхности S , к которой примыкает нормаль n , считается положительной, а противоположная сторона — отрицательной (рис. 86 и 87).

и представляют собой локально интегрируемые функции в R^3 (см. § 7.10, d)). Эти потенциалы удовлетворяют уравнению Пуассона:

$$\Delta V^{(0)} = -4\pi \mu \delta_S, \quad \Delta V^{(1)} = 4\pi \frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_S). \quad (8)$$

Фиксируем точку x_0 на S , и пусть n_0 — нормаль к ней к S . Дифференцируя формулу (6) при $x \in S$ по направлению n_0 и пользуясь равенством

$$\frac{\partial}{\partial n_0} \frac{1}{|x-y|} = \sum_{i=1}^3 \cos(n_0 x_i) \frac{y_i - x_i}{|x-y|^3} = \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2}, \quad (9)$$

где φ_{xy} — угол между вектором $y-x$ и нормалью n_0

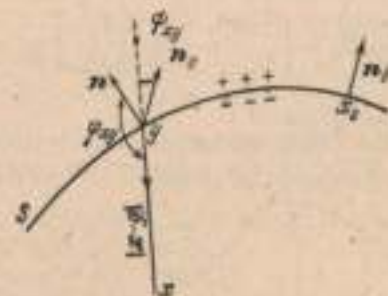


Рис. 87.

(рис. 87), получаем выражение для нормальной производной потенциала простого слоя:

$$\frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial n_0} = \int_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{1}{|x-y|} dS_y = \int_S \mu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y, \quad (10)$$

$x \in S.$

Аналогично, в силу равенства

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} = \sum_{i=1}^3 \cos(n y_i) \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3} = \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2}, \quad (11)$$

где φ_{xy} — угол между вектором $x-y$ и нормалью n (рис. 87), формула (7) для потенциала двойного слоя

$V^{(1)}$ принимает вид

$$V^{(1)}(x) = \int_S v(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^3} dS_y \quad (12)$$

Потенциалы $V^{(0)}$ и $V^{(1)}$ — гармонические функции вне поверхности S , $V^{(0)} \in C(R^3)$ и

$$V^{(0)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad V^{(1)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Эти свойства потенциалов $V^{(0)}$ и $V^{(1)}$ выводятся из представлений (6) и (12) и из уравнений (8), подобно тому, как это делалось для объемного потенциала (см. § 27.1).

Теперь покажем, что потенциал двойного слоя $V^{(1)}(x)$ с плотностью $v=1$ равен

$$\int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^3} dS_y = \begin{cases} -4\pi, & x \in G \\ 0, & x \in G_1 = R^3 \setminus \bar{G}, \end{cases} \quad (13)$$

если S — граница области G .

Пусть $x \in G$. Тогда найдется шар $U(x, r_0) \subset G$. Граница области $G \setminus U(x, r_0)$ состоит из поверхностей S и

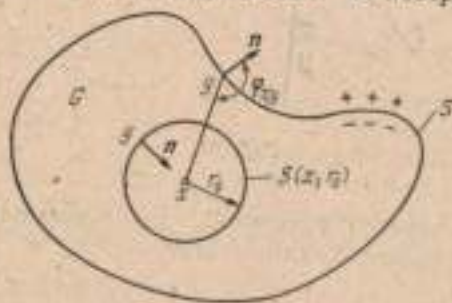


Рис. 88.

$S(x, r_0)$ (рис. 88). Поскольку функция $|x-y|^{-3}$ — гармоническая при $x \neq y$, то, применяя к области $G \setminus U(x, r_0)$ формулу (11) § 24.3, получим

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} dS_y + \int_{S(x, r_0)} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} dS_y = 0. \quad (14)$$

Принимая во внимание (11) и учитывая, что $\cos \varphi_{xy} = 1$ на сфере $|x-y|=r_0$, из (14) выводим первое из

равенств (13):

$$\int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^3} dS_y = - \int_{|x-y|=r_0} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^3} dS_y = - \frac{1}{r_0^2} \int_{|x-y|=r_0} dS_y = -4\pi.$$

Пусть теперь $x \in G_1$. Так как функция $|x-y|^{-3}$ — гармоническая в G , то, применяя формулу (11) § 24.3, имеем

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} dS_y = 0, \quad (15)$$

что, в силу (11), и доказывает вторую из формул (13).

Замечание. Формулы (13) можно обобщить на случай произвольной поверхности S (Гаусс): если $x \in S$, то потенциал $V^{(1)}(x)$ с плотностью $v \equiv 1$ равен телесному углу, под которым поверхность S видна из точки x (с учетом знаков сторон поверхности).

3. Физический смысл ньютоновых потенциалов. Потенциал $V = \frac{1}{|x|} * \rho$ с произвольной (финитной) плотностью ρ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta V = -4\pi\rho$. Поэтому V есть ньютонов или кулонов потенциал, создаваемый массами или зарядами, распределенными в пространстве с плотностью ρ . В частности, непрерывное распределение масс или зарядов создает объемный потенциал; если же массы или заряды сосредоточены на поверхности, то они создают (ньютонов или кулонов) потенциал простого слоя; если на поверхности сосредоточены диполи, то создаваемый ими кулонов потенциал есть потенциал двойного слоя.

Для примера вычислим (кулонов) потенциал $V^{(1)}(x; I)$, создаваемый диполем с моментом $+1$ в точке 0 , ориентированным в направлении I , $|I|=1$. Этот потенциал создается распределением (см. § 6.4, а))

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\frac{1}{\epsilon} \delta(x - \epsilon I) - \frac{1}{\epsilon} \delta(x) \right] = - \frac{\partial}{\partial I} \delta(x)$$



Рис. 89.

(рис. 89), и поэтому

$$V^{(1)}(x; I) = -\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial t} \delta = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{|x|} * \delta \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{|x|},$$

т. е.

$$V^{(1)}(x; I) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{|x|} = \frac{\cos \varphi}{|x|^2}, \quad (16)$$

где φ — угол между векторами x и I . На рис. 90 изображены поверхности уровня потенциала $V^{(1)}(x; I)$ (эквипотенциальные поверхности $\frac{\cos \varphi}{|x|^2} = \pm c$).

Из формул (12) и (16) следует, что потенциал двойного слоя представляет собой «сумму» элементарных потенциалов

$$v(y) V^{(1)}(x-y; n) = v(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2},$$

создаваемых диполями на поверхности S с плотностью момента $v(y)$ и ориентированных по нормали n .

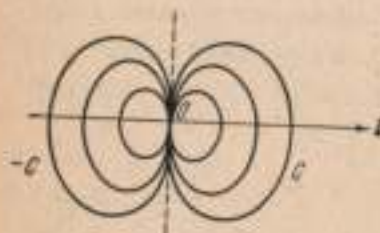


Рис. 90.

4. Поверхности Ляпунова. Дальнейшие свойства потенциалов простого и двойного слоя устанавливаются в предположении, что S — поверхность Ляпунова. Замкнутая ограниченная поверхность S называется *поверхностью Ляпунова*, если в каждой точке $x \in S$ существует нормаль n_x , непрерывная по Гёльдеру на S , т. е. существуют числа $C > 0$ и $\alpha > 0$, $\alpha \leq 1$ такие, что

$$|n_x - n_y| \leq C|x-y|^\alpha, \quad x, y \in S. \quad (17)$$

Из этого определения вытекает, что поверхности Ляпунова содержатся в классе поверхностей C^1 ; с другой стороны, всякая ограниченная замкнутая поверхность класса C^1 есть поверхность Ляпунова (при $\alpha = 1$).

Для поверхности Ляпунова S существует такое число $r_0 > 0$, $4Cr_0^\alpha < 1$, что для любой точки $x \in S$ окрестность $u_x = S \cap U(x; r_0)$ пересекается прямой, параллельной нор-

мали n_x в единственной точке, либо вообще не пересекается.

Действительно, в противном случае, из условия гладкости поверхности S следовало бы, что на куске u_x находились бы две точки y_1 и y_2 , для которых угол между нормальными n_{y_1} и n_{y_2} был бы тупым, $(n_{y_1}, n_{y_2}) < 0$, что противоречило бы неравенству (17):

$$\sqrt{2} < |n_{y_1} - n_{y_2}| \leq C|y_1 - y_2|^\alpha \leq C2^\alpha r_0^\alpha < \frac{1}{2}.$$

На куске u_x выберем локальную систему прямолинейных координат (y_1, y_2, y_3) с началом в точке x и ось y_3

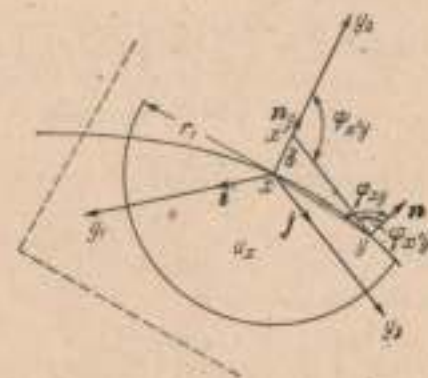


Рис. 91

направим вдоль нормали, $n_0 = n_x$, а оси y_1 и y_2 направим вдоль единичных орт I и J соответственно (рис. 91). В силу сказанного, в этих координатах поверхность u_x можно задать уравнением

$$y_3 = f(y_1, y_2), \quad f \in C^1(\sigma), \quad f(0) = 0, \quad (18)$$

где σ — проекция u_x на плоскость (y_1, y_2) , причем в силу (17)

$$|n - n_y| \leq C|y|^\alpha, \quad y \in u_x, \quad x \in S \quad (n = n_x). \quad (19)$$

Из (19) при всех $y \in u_x$ вытекают оценки

$$\left. \begin{aligned} |(n, i)| &= |(n - n_0, i) + (n_0, i)| \leq |n - n_0| \leq C|y|^{\alpha}, \\ |(n, j)| &= |(n - n_0, j) + (n_0, j)| \leq |n - n_0| \leq C|y|^{\alpha}, \\ (n, n_0) &= (n - n_0, n_0) + (n_0, n_0) \geq \\ &\geq 1 - |n - n_0| \geq 1 - C|y|^{\alpha} > \frac{3}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Учитывая, что на поверхности u_x справедливы соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = -\frac{(n, i)}{(n, n_0)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = -\frac{(n, j)}{(n, n_0)},$$

из (20) выводим неравенства

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y_1} \right| = \left| \frac{(n, i)}{(n, n_0)} \right| \leq \frac{4}{3} C|y|^{\alpha}, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y_2} \right| \leq \frac{4}{3} C|y|^{\alpha}, \quad y \in u_x. \quad (21)$$

Обозначая $\rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$, из (21) выводим

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \rho} \right| \leq |\text{grad } f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} \right)^2} \leq \leq \frac{4\sqrt{2}}{3} C|y|^{\alpha} \leq 2Cr_0^{\alpha} < \frac{1}{2}, \quad (y_1, y_2) \in \bar{\sigma}. \quad (22)$$

Отсюда, пользуясь неравенством

$$|f| = \left| \int_0^{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho' \right| \leq \int_0^{\rho} \left| \frac{\partial f}{\partial \rho'} \right| d\rho',$$

выводим $|f| \leq \rho/2$. Далее, учитывая (18) и пользуясь опять (22), получаем

$$\begin{aligned} |f| &\leq 2C \int_0^{\rho} |y|^{\alpha} d\rho' = 2C \int_0^{\rho} (\rho'^2 + j^2)^{\frac{\alpha}{2}} d\rho' \leq \\ &\leq 2C \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\rho} \rho'^{\alpha} d\rho' \leq 2C\rho^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Итак, установлены неравенства

$$|y_1| \leq \frac{\rho}{2}, \quad |y_2| \leq 2C\rho^{1+\alpha} \leq 2C|y|^{1+\alpha}, \quad y \in u_x. \quad (23)$$

Лемма 1. Если S — поверхность Ляпунова, то

$$|\cos \varphi_{xy}| \leq 3C|x-y|^{\alpha}, \quad x, y \in S, \quad (24)$$

$$|\cos \varphi_{x'y'} + \cos \varphi_{x'y}| \leq 3C|x'-y|^{\alpha}, \quad x, y \in S, \quad x' \in n_x, \quad (25)$$

где C — постоянная в неравенстве (17).

Доказательство. На основании сказанного, оценки (24) и (25) достаточно установить для всех y из (произвольной) окрестности $u_x = S \cap U(x, r_0)$. Оценка (24) следует из оценок (19) и (23):

$$\begin{aligned} |\cos \varphi_{xy}| &= \left| \left(n, \frac{y}{|y|} \right) \right| = \left| \left(n - n_0, \frac{y}{|y|} \right) + \left(n_0, \frac{y}{|y|} \right) \right| \leq \\ &\leq |n - n_0| + \frac{|y_2|}{|y|} \leq 3C|y|^{\alpha}. \end{aligned}$$

Докажем теперь оценку (25) из u_x . Пользуясь определением углов $\varphi_{x'y}$ и $\varphi_{x'y'}$ (см. формулы (9) и (11)) и неравенством Коши — Буяковского (см. § 1.7), при всех $y \in u_x$ и $x' \in R^3$ получаем оценку

$$\begin{aligned} |\cos \varphi_{x'y} + \cos \varphi_{x'y'}| &= \left| \sum_{i=1}^3 \frac{y_i - x'_i}{|x' - y|} [\cos(n_0 y_i) - \cos(n y_i)] \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^3 [\cos(n_0 y_i) - \cos(n y_i)]^2 \right|^{\frac{1}{2}} = \\ &= [(n, i)^2 + (n, j)^2 + [1 - (n, n_0)]^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

и, следовательно, в силу (20),

$$|\cos \varphi_{x'y} + \cos \varphi_{x'y'}| \leq \sqrt{3} C|y|^{\alpha}.$$

Отсюда, пользуясь неравенством (23) и замечая, что $\rho \leq |x' - y|$, $x' \in n_0$, при всех $y \in u_x$ и $x' \in n_0$ получаем оценку (25):

$$|\cos \varphi_{x'y} + \cos \varphi_{x'y'}| \leq \sqrt{3} C(\rho^2 + y_2^2)^{\frac{\alpha}{2}} \leq 3C\rho^{\alpha} \leq 3C|x' - y|^{\alpha}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Если S — поверхность Ляпунова, то существует такая постоянная K , что

$$\int_S \frac{|\cos \varphi_{x'y}|}{|x' - y|^2} dS_y \leq K, \quad x' \in R^3. \quad (26)$$

Доказательство*). Если расстояние от точки x' до S не меньше $\frac{r_0}{2}$, так что $|x' - y| \geq \frac{r_0}{2}$, $y \in S$, то интеграл (26) равномерно ограничен числом $K_1 = \frac{4}{r_0^2} \int_S dS$.

Пусть теперь расстояние от точки x' до S меньше $\frac{r_0}{2}$, так что существует точка $x \in S$ такая, что $|x - x'| = \delta < \frac{r_0}{2}$. Нетрудно убедиться, что точка x' лежит на нормали n_0 или $-n_0$ к S в точке x . Для определенности мы будем считать, что $x' \in n_0$, так что в локальных координатах $x' = (0, 0, \delta)$ (см. рис. 91). Разобьем интеграл (26) на два:

$$\int_S \frac{|\cos \varphi_{x'y}|}{|x' - y|^3} dS_y = \int_{S \setminus u_x} \frac{|\cos \varphi_{x'y}|}{|x' - y|^3} dS_y + \int_{u_x} \frac{|\cos \varphi_{x'y}|}{|x' - y|^3} dS_y. \quad (27)$$

В силу оценки

$$|x' - y| \geq |y - x| - |x - x'| > r_0 - \frac{r_0}{2} = \frac{r_0}{2}, \quad y \in S \setminus u_x,$$

первый интеграл справа в (27) равномерно ограничен числом K_1 .

Оценим теперь второй интеграл справа в (27). Замечая, что (рис. 91)

$$|\cos \varphi_{x'y}| = \frac{|\delta - y_3|}{|x' - y|} \leq \frac{\delta + |y_3|}{|x' - y|}, \quad \rho \leq |x' - y|,$$

и пользуясь оценками (23) и (25), получаем оценку

$$|\cos \varphi_{x'y}| \leq |\cos \varphi_{xy}| + |\cos \varphi_{x'y}| \leq 3C|x' - y|^2 + \frac{2C\rho^{\alpha+1} + \delta}{|x' - y|} \leq 5C|x' - y|^2 + \frac{\delta}{|x' - y|}, \quad y \in u_x.$$

Поэтому

$$\int_{u_x} \frac{|\cos \varphi_{x'y}|}{|x' - y|^3} dS_y \leq 5C \int_{u_x} \frac{dS_y}{|x' - y|^3} + \delta \int_{u_x} \frac{dS_y}{|x' - y|^3}. \quad (28)$$

Первый интеграл справа в (28) равномерно ограничен (см. § 1.6). Для оценки второго интеграла справа в (28)

*) Идея взята из книги С. Г. Михлина [1], гл. 18.

перейдем к локальным координатам (см. рис. 91)

$$\delta \int_{u_x} \frac{dS_y}{|x' - y|^3} = \delta \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} \frac{dy_1 dy_2}{(\rho^2 + (\delta - y_3)^2)^{3/2}} \leq \frac{4}{3} \delta \int_0^{\rho} \frac{dy_1 dy_2}{[\rho^2 + (\delta - y_3)^2]^{3/2}}; \quad (29)$$

здесь мы воспользовались третьим неравенством (20). Тогда, в силу (23), $|y_3| \leq \rho/2$ и, стало быть,

$$\begin{aligned} \rho^2 + (\delta - y_3)^2 &= \rho^2 + \delta^2 + y_3^2 - 2\delta y_3 \geq \rho^2 + \delta^2 - 2\delta|y_3| \geq \\ &\geq \rho^2 + \delta^2 - \delta\rho \geq \frac{1}{2}(\rho^2 + \delta^2), \quad y \in u_x. \end{aligned}$$

Учитывая полученное неравенство, продолжим оценку (29):

$$\delta \int_{u_x} \frac{dS_y}{|x' - y|^3} \leq 4\delta \int_0^{\rho} \frac{dy_1 dy_2}{(\rho^2 + \delta^2)^{3/2}} \leq 4\delta \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2 + \delta^2)^{3/2}} = 8\pi.$$

Лемма доказана.

5. Свойства потенциалов простого и двойного слоя на поверхности S . Предполагая границу S области G поверхностью Ляпунова, установим некоторые свойства потенциалов $V^{(0)}$ и $V^{(1)}$ на S . Имеют место равенства

$$\int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^3} dS_y = \begin{cases} -4\pi, & x \in G, \\ -2\pi, & x \in S, \\ 0, & x \in G_1. \end{cases} \quad (30)$$

Для доказательства равенств (30), в силу (13), осталось рассмотреть случай $x \in S$. Выбрасывая из S окрестность $u_x = S \cap U(x, r_0)$ точки x , получим

$$\int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^3} dS_y = \int_{S \setminus u_x} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^3} dS_y + \int_{u_x} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^3} dS_y. \quad (31)$$

Так как $x \in G \setminus U(x, r_0)$ (рис. 92), то применяя формулу (11) § 24.3 к области $G \setminus U(x, r_0)$ к функции $|x - y|^{-1}$ и действуя, как и в § 27.2, получим

$$\int_{S \setminus u_x} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^3} dS_y = -\frac{1}{r_0^2} \int_{G \cap S(x, r_0)} dS.$$

Поэтому при сжатии u_x в точку $x(r_0 \rightarrow 0)$ первый интеграл справа в (31) стремится к -2π (рис. 92). Вторым же интегралом справа в (31), в силу оценки (24), сходится абсолютно и потому стремится к нулю при $u_x \rightarrow x$ (см. § 1.6). Поэтому, переходя в (31) к пределу при $u_x \rightarrow x$, получим формулу (30) при $x \in S$.

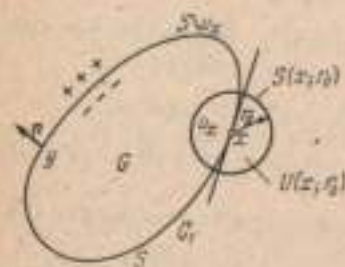


Рис. 92

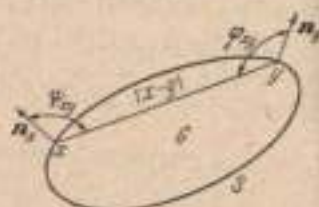


Рис. 93

Потенциал двойного слоя $V^{(1)}(x)$ — непрерывная функция на S .

Действительно, в силу неравенства (24), справедливого на поверхности Липунова S , потенциал $V^{(1)}(x)$, определяемый формулой (12), есть интегральный оператор с ядром

$$\frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2}, \quad x \in S, \quad y \in S,$$

а потому переводит всякую функцию $v \in C(S)$ в функцию $V^{(1)} \in C(S)$ (см. § 1.6; ср. с леммой 1 § 17.4).

Докажем теперь, что интеграл

$$\int_S \mu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y, \quad (32)$$

где φ_{xy} — угол между вектором $y-x$ и нормалью n_x , есть непрерывная функция x на S .

Действительно, замечая, что

$$\varphi_{xy} = \varphi_{yx}, \quad x, y \in S \quad (33)$$

(рис. 93), из (24) выводим оценку

$$|\cos \varphi_{xy}| \leq 3C|x-y|^\alpha, \quad x, y \in S, \quad (34)$$

из которой, как и для потенциала $V^{(1)}$, следует непрерывность интеграла (32) на S .

В соответствии с формулой (10) обозначим интеграл (32) через $\frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial n}$,

$$\frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial n} = \int_S \mu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y = \int_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|x-y|} dS_y, \quad (35)$$

$$x \in S.$$

Функция $\frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial n}$ называется прямым значением нормальной производной потенциала простого слоя на поверхности S ; по доказанному она непрерывна на S .

Отметим еще, что потенциал простого слоя $V^{(0)}(x)$ — непрерывная функция на S , поскольку $V^{(0)} \in C(R^n)$ (см. § 27.2).

6. Разрыв потенциала двойного слоя.

Теорема. Если S — поверхность Липунова и $v \in C(S)$, то потенциал двойного слоя $V^{(1)}$ принадлежит $C(\bar{G})$ и $C(G_1)$ и его предельные значения $V_+^{(1)}$ и $V_-^{(1)}$ на S извне и изнутри S выражаются формулами

$$V_+^{(1)}(x) = 2\pi v(x) + V^{(1)}(x) = 2\pi v(x) + \int_S v(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y, \quad (36)$$

$$V_-^{(1)}(x) = -2\pi v(x) + V^{(1)}(x) = -2\pi v(x) + \int_S v(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y, \quad (36')$$

Доказательство. Введем функцию

$$W(x', x) = \int_S [v(y) - v(x)] \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x'-y|^2} dS_y, \quad x' \in R^n, \quad x \in S.$$

Функция $W(x', x)$ при $x' = x \in S$, в силу (30), равна

$$W(x, x) = \int_S v(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y + 2\pi v(x) = 2\pi v(x) + V^{(1)}(x). \quad (37)$$

Функция $W(x, x)$ непрерывна на S в силу непрерывности плотности v и потенциала $V^{(1)}$ на S (см. § 27.5).

Докажем, что

$$W(x', x) \xrightarrow{x \in S} W(x, x), \quad x' \rightarrow x \in S. \quad (38)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как функция v равномерно непрерывна на S , то существует такое число $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, что при всех $x \in S$ имеет место неравенство

$$|v(y) - v(x)| < \frac{\varepsilon}{4K}, \quad y \in u_x = S \cap U(x; \delta), \quad (39)$$

где K — число, входящее в неравенство (26). Оценим разность

$$|W(x', x) - W(x, x)| \leq \left(\int_{u_x} + \int_{S \setminus u_x} \right) |v(y) - v(x)| \left| \frac{\cos \varphi_{x'y}}{|x' - y|^2} - \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} \right| dS_y. \quad (40)$$

В силу неравенств (39) и (26) первый интеграл справа в (40) не превосходит $\varepsilon/2$,

$$\begin{aligned} \int_{u_x} |v(y) - v(x)| \left| \frac{\cos \varphi_{x'y}}{|x' - y|^2} - \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} \right| dS_y &< \\ &< \frac{\varepsilon}{4K} \int_{u_x} \left(\frac{|\cos \varphi_{x'y}|}{|x' - y|^2} + \frac{|\cos \varphi_{xy}|}{|x - y|^2} \right) dS_y \leq \frac{\varepsilon}{4K} 2K = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Далее, подынтегральная функция в (40), как функция переменных (x, x', y) , равномерно непрерывна при $|x - x'| \leq \frac{\delta}{2}$, $x \in S$, $y \in S \setminus u_x$ и обращается в нуль при $x' = x$. Поэтому найдется такое $\delta' \leq \frac{\delta}{2}$, что при всех $x' \in U(x; \delta')$ второй интеграл справа в (40) будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$|W(x', x) - W(x, x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad x' \in U(x; \delta'), \quad x \in S,$$

что и доказывает предельное соотношение (37).

Считая $x' \in G_1$ и пользуясь формулой (30), представим потенциал $V^{(1)}(x')$ в виде

$$V^{(1)}(x') = \int_S [v(y) - v(x)] \frac{\cos \varphi_{x'y}}{|x' - y|^2} dS_y + W(x', x). \quad (41)$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x' \rightarrow x \in S$, $x' \in G_1$ и учитывая предельное соотношение (38), получаем

$$V^{(1)}(x') \xrightarrow{x \in S} W(x, x) = V_+^{(1)}(x), \quad x \in S,$$

откуда следует, что $V^{(1)} \in C(\bar{G}_1)$ и, в силу (37), справедливо равенство (36).

Другой случай рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Из формул (36) и (36') следует соотношение

$$4\pi v(x) = V_+^{(1)}(x) - V_-^{(1)}(x), \quad x \in S. \quad (42)$$

Замечание. Формулы (36) и (36') аналогичны формулам Сохоцкого (15) и (15') § 5.8.

7. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.

Теорема. Если S — поверхность Ляпунова и $\mu \in C(S)$, то потенциал простого слоя $V^{(0)}$ имеет правильные нормальные производные $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_+$ и $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_-$ на S извне и изнутри S , причем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_+(x) &= -2\pi\mu(x) + \frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial n} = \\ &= -2\pi\mu(x) + \int_S \mu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} dS_y, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_-(x) &= 2\pi\mu(x) + \frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial n} = \\ &= 2\pi\mu(x) + \int_S \mu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} dS_y. \end{aligned} \quad (43')$$

Доказательство. Пусть $V^{(1)}$ — потенциал двойного слоя на S с плотностью μ . Введем функцию

$$W_1(x', x) = \frac{\partial V^{(0)}(x')}{\partial n_x} + V^{(1)}(x'), \quad x' \in S, \quad x \in S,$$

и докажем, что при $x' \rightarrow x \in S$, $x' \in n_x$

$$W_1(x', x) \xrightarrow{x \in S} W_1(x, x) = \frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial n} + V^{(1)}(x). \quad (44)$$

По доказанному (см. § 27.5) функция $W_1(x, x)$ непрерывна на S .

Пользуясь формулами (10) и (12), представим функцию W_1 в виде интеграла:

$$W_1(x', x) = \int_S \mu(y) \frac{\cos \varphi_{x'y} + \cos \varphi_{x'y}}{|x' - y|^2} dS_y.$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Оценим разность

$$\begin{aligned} |W_1(x', x) - W_1(x, x)| &\leq \\ &\leq \left(\int_{n_x} + \int_{S \setminus n_x} \right) |\mu(y)| \left| \frac{\cos \varphi_{x'y} + \cos \varphi_{x'y}}{|x' - y|^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos \varphi_{xy} + \cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} \right| dS_y, \quad u_x = S \cap U(x, \delta). \end{aligned} \quad (45)$$

В силу оценок (24), (25) и (34) первый интеграл справа в (45) не превосходит (абсолютно) сходящегося интеграла

$$\int_{n_x} |\mu(y)| \left(\frac{3C}{|x' - y|^{2-\alpha}} + \frac{6C}{|x - y|^{2-\alpha}} \right) dS_y$$

и потому может быть сделан $< \frac{\varepsilon}{2}$ при достаточно малом $\delta = \delta_\varepsilon$. Далее подынтегральная функция в (45), как функция переменных (x, x', y) , равномерно непрерывна при $|x - x'| \leq \frac{\delta}{3}$, $x \in S$, $y \in S$ и обращается в нуль при $x' = x$. Поэтому найдется такое число $\delta' \leq \frac{\delta}{3}$, что при всех $x' \in U(x, \delta')$ второй интеграл справа в (45) будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$|W_1(x', x) - W_1(x, x)| < \varepsilon, \quad x' \in U(x, \delta'), \quad x' \in n_x, \quad x \in S,$$

что и доказывает предельное соотношение (44).

По теореме § 27.6 $V^{(1)} \in C(\bar{G})$ и

$$V_+^{(1)}(x) = 2\pi\mu(x) + V^{(1)}(x).$$

Поэтому предельное соотношение (44) при $x' \rightarrow x \in S$, $x' \in n_x$ принимает вид

$$\frac{\partial V^{(1)}(x)}{\partial n_x} \stackrel{x \in S}{\rightarrow} -V_+^{(1)}(x) + W_1(x, x) = -2\pi\mu(x) + \frac{\partial V^{(1)}(x)}{\partial n_x}.$$

откуда заключаем, что правильная нормальная производная $\left(\frac{\partial V^{(1)}}{\partial n}\right)_+$ на S извне существует (см. § 24.2) и, с учетом формулы (35), выражается равенствами (43).

Другой случай рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Из формул (43) и (43') следует соотношение

$$4\pi\mu(x) = \left(\frac{\partial V^{(1)}}{\partial n}\right)_-(x) - \left(\frac{\partial V^{(1)}}{\partial n}\right)_+(x), \quad x \in S. \quad (46)$$

Замечание. Можно доказать, что если плотность μ непрерывна по Гельдери на S (см. § 1.3), то потенциал $V^{(1)}$ принадлежит классам $C^1(\bar{G})$ и $C^1(\bar{G}_+)$ (см., например, С. Л. Соболев [1], гл. XV).

8. Упражнения. а) Показать, что потенциал простого слоя для сферы S_R с плотностью $\mu = 1$ равен

$$V^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{4\pi R^2}{|x|}, & |x| \geq R; \\ 4\pi R, & |x| \leq R. \end{cases}$$

б) Пользуясь а), показать, что объемный потенциал для шара U_R с плотностью $\mu = 1$ равен

$$V(x) = \begin{cases} \frac{4\pi R^2}{3|x|}, & |x| \geq R; \\ 2\pi R^2 - \frac{2\pi}{3}|x|^2, & |x| \leq R. \end{cases}$$

в) Показать, что для шара U_R объемный потенциал с плотностью $f(|x|)$ равен

$$V(x) = \frac{4\pi}{|x|} \int_0^R f(\rho) \rho^2 d\rho, \quad |x| \geq R.$$

д) Пользуясь в), показать: если $\int_0^R f(\rho) \rho^2 d\rho = 0$, то

$$V(x) = -\frac{8\pi^2}{3} \int_0^R f(\rho) \rho^4 d\rho.$$

е) Доказать, что если поверхность Ляпунова S ограничивает выпуклую область, то постоянную K в неравенстве (26) можно взять равной 4π .

§ 28. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в пространстве

1. **Постановка основных краевых задач.** Будем изучать следующие четыре краевые задачи I и II родов для трехмерного уравнения Лапласа (см. § 4.4). Считаем область G такой, что $G_1 = R^3 \setminus G$ есть область.

Внутренняя задача Дирихле: найти гармоническую в области G функцию $u \in C(\bar{G})$, принимающую на S заданные (непрерывные) значения u_0 .

Внешняя задача Дирихле: найти гармоническую в области G_1 функцию u , принимающую на S заданные (непрерывные) значения u_0 и обращающуюся в 0 на бесконечности.

Внутренняя задача Неймана: найти гармоническую в области G функцию u , имеющую на S заданную (непрерывную) правильную нормальную производную u_1 .

Внешняя задача Неймана: найти гармоническую в области G_1 функцию $u \in C(\bar{G}_1)$, имеющую на S заданную (непрерывную) правильную нормальную производную u_1 (нормаль внутренняя) и обращающуюся в 0 на бесконечности.

Аналогичные краевые задачи ставятся и для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f, \quad (1)$$

причем требуется, чтобы $u \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$ для внутренних задач и $u \in C^2(G_1) \cap C(\bar{G}_1)$, $u(\infty) = 0$ для внешних задач.

Подстановка

$$u = v + V, \quad V(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(y)}{|x-y|} dy \quad (2)$$

сводит внутренние краевые задачи для уравнения Пуассона к соответствующим внутренним краевым задачам для уравнения Лапласа, если $f \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$.

Действительно, в этом случае объемный потенциал $V \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ и удовлетворяет уравнению Пуассона (1) (см. § 27.1). А тогда, в силу (2), функция v должна удовлетворять уравнению Лапласа и соответствующему граничному условию.

Для внешних краевых задач поступаем аналогично (если объемный потенциал с плотностью f существует и обращается в 0 на бесконечности).

Отметим, что преобразование Кельвина (см. § 24.10) позволяет сводить внешние краевые задачи для уравнения Лапласа к внутренним, и наоборот.

Наконец, обратим внимание, что для задач Неймана (внутренних и внешних) необходимо предположить, что $S \in C^2$; далее, существование у решения $u(x)$ правильной нормальной производной на S влечет ее непрерывность на G или G_1 соответственно (см. § 24.2).

2. **Теоремы единственности решения краевых задач.** Докажем теоремы единственности решения краевых задач, поставленных в § 28.1.

Теорема 1. Решение уравнения Пуассона единственно в классе обобщенных функций, обращающихся в 0 на бесконечности.

Доказательство. Достаточно установить, что уравнение Лапласа имеет только нулевое решение в классе обобщенных функций, обращающихся в 0 при $|x| \rightarrow \infty$. Но это вытекает из аналога теоремы Лиувилля (см. § 24.9).

Теорема 2. Решение внутренней или внешней задачи Дирихле единственно и непрерывно зависит от граничного значения u_0 или u_0^+ соответственно в следующем смысле: если $|u_0^+ - \tilde{u}_0^+| \leq \epsilon$ на S , то соответствующие решения u и $\tilde{u}$ удовлетворяют оценке

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \epsilon, \quad x \in G \quad (x \in G_1). \quad (3)$$

Доказательство. Применяя неравенства (17) и (18) § 24.5 к гармонической функции $u - \tilde{u}$,

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \max_{x \in S} |u_0^+(x) - \tilde{u}_0^+(x)|, \quad x \in G \quad (x \in G_1),$$

получим все утверждения теоремы.

Будем говорить, что поверхность Лиувилля S — достаточно гладкая поверхность, если для нее справедлива формула Грина (7) § 21.2 для функций u класса $C^2(G) \cap C(\bar{G})$, имеющих правильную нормальную производную на S и $\Delta u \in \mathcal{L}_2(G)$, и для функций v класса $C^1(G) \cap C(\bar{G})$.

В силу сказанного в §§ 24.2 и 27.4 ограниченные замкнутые поверхности класса C^2 — достаточно гладкие поверхности.

Теорема 3. Если S — достаточно гладкая поверхность, то решение внутренней задачи Неймана определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Необходимым условием разрешимости этой задачи является равенство

$$\int_S u^-(x) dS + \int_G f(x) dx = 0. \quad (4)$$

Доказательство. Если u и $\bar{u}$ — два решения внутренней задачи Неймана, то их разность $\eta \in C(\bar{G})$ — гармоническая функция в G и имеет нулевую правильную нормальную производную на S . Применяя формулу Грина (7) § 21.2 при $u = v = \eta$, получим

$$\int_G |\text{grad } \eta|^2 dx = \int_S \eta \frac{\partial \eta}{\partial n} dS = 0,$$

откуда следует, что $\text{grad } \eta = 0$, $x \in G$, так что $\eta = u - \bar{u} = \text{const}$.

Необходимость условия (4) разрешимости внутренней задачи Неймана вытекает из формулы (8) § 21.2 при $v \equiv 1$, согласно которой

$$\int_S u^- dS = \int_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_G \Delta u dx = - \int_G f dx,$$

если u — решение этой задачи. Теорема доказана.

Физический смысл условия (4) состоит в том, что стационарный поток тепла (сжимаемой жидкости, напряженности электрического и магнитного полей, см. § 2) через замкнутую поверхность S равен суммарной величине всех источников (зарядов), находящихся внутри S (закон сохранения).

Теорема 4. Если S — достаточно гладкая поверхность, то решение внешней задачи Неймана единственно.

Доказательство. Пусть u и $\bar{u}$ — два решения внешней задачи Неймана. Тогда их разность $\eta \in C(\bar{G}_1)$ — гармоническая функция в G_1 , имеет нулевую правильную нормальную производную на S и $\eta(\infty) = 0$. По теореме § 24.10 функция η удовлетворяет неравенствам

$$|\eta(x)| < \frac{\epsilon}{|x|}, \quad |\text{grad } \eta(x)| < \frac{\epsilon_1}{|x|^2}, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Применяя формулу Грина (7) § 21.2 при $u = v = \eta$ к области Q_R (рис. 77), получим

$$\int_{Q_R} |\text{grad } \eta|^2 dx = \int_S \eta \frac{\partial \eta}{\partial n} dS + \int_{S_R} \eta \frac{\partial \eta}{\partial n} dS = \int_{S_R} \eta \frac{\partial \eta}{\partial n} dS. \quad (6)$$

Но из оценок (5) вытекает, что при $R \rightarrow \infty$

$$\left| \int_{S_R} \eta \frac{\partial \eta}{\partial n} dS \right| \leq \int_{S_R} |\eta| |\text{grad } \eta| dS < \frac{c_1}{R^2} \int_{S_R} dS = 4\pi \frac{c_1}{R}.$$

Поэтому, устремляя в равенстве (6) R к ∞ , получаем

$$\int_G |\text{grad } \eta|^2 dx = 0,$$

откуда следует $\text{grad } \eta = 0$, т. е. $\eta(x) = \text{const}$, $x \in G_1$. Так как $\eta(\infty) = 0$, то $\eta = u - \bar{u} = 0$, $x \in G_1$. Теорема доказана.

3. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям. Выпишем формулу Грина (5) § 24.1 при $n = 3$:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} \right] dS_y, \quad x \in G. \quad (7)$$

Формула (7) справедлива для функций $u \in C(\bar{G})$, гармонических в G и имеющих правильную нормальную производную на S , если S — достаточно гладкая поверхность (см. § 28.2).

Из теорем единственности для задач Дирихле и Неймана (см. § 28.2) следует, что, вообще говоря, не существует гармонической функции u с произвольно заданными значениями u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ на S . Поэтому формулу Грина

(7) нельзя непосредственно использовать для решения поставленных краевых задач, подобно тому как мы это делали для решения задачи Коши (см. §§ 13.3 и 16.4). В этом состоит существенное различие между краевой задачей для эллиптических уравнений и задачей Коши.

Пользуясь теорией ньютонова потенциала, сведем задачу Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям Фредгольма с полярным ядром.

Далее, используя теорию интегральных уравнений, докажем разрешимость этих краевых задач.

Пусть S — достаточно гладкая поверхность. Ищем решение задач Дирихле (внутренней и внешней) в виде потенциала двойного слоя

$$V^{(1)}(x) = \int_S v(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y,$$

где v — неизвестная непрерывная плотность на S . Функция $V^{(1)}$ — гармоническая в G и G_1 , принадлежит классам $C(\bar{G})$, $C(\bar{G}_1)$ и $C(S)$ и $V^{(1)}(\infty) = 0$ (см. §§ 27.2, 27.5 и 27.6). Поэтому, чтобы потенциал $V^{(1)}$ давал решение внутренней или внешней задачи Дирихле, необходимо и достаточно, чтобы соответственно были выполнены равенства

$$V_{\pm}^{(1)}(x) = u_{\pm}^{\mp}(x), \quad x \in S, \quad (8)$$

где $V_{\pm}^{(1)}$ — предельные значения $V^{(1)}$ изнутри и извне S . По теореме о разрыве потенциала двойного слоя (см. § 27.6) равенства (8) принимают вид

$$\mp 2\pi v(x) + \int_S v(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y = u_{\pm}^{\mp}(x), \quad x \in S. \quad (9)$$

Равенства (9) представляют собой интегральные уравнения Фредгольма относительно неизвестной плотности v .

Вводя вещественный параметр λ и ядро

$$\mathcal{K}(x, y) = -\frac{\cos \varphi_{xy}}{2\pi |x-y|^2}, \quad (10)$$

перепишем интегральные уравнения (9) в единой форме:

$$v(x) = \lambda \int_S \mathcal{K}(x, y) v(y) dS_y + f(x), \quad x \in S. \quad (11)$$

При этом для внутренней задачи Дирихле $\lambda = 1$ и $f = -\frac{u_+}{2\pi}$, а для внешней задачи Дирихле $\lambda = -1$ и $f = \frac{u_-}{2\pi}$.

Аналогично решение задач Неймана (внутренней и внешней) ищем в виде потенциала простого слоя

$$V^{(0)}(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y,$$

где μ — неизвестная непрерывная плотность на S . Функция $V^{(0)}$ — гармоническая в G и G_1 , непрерывная в R^3 , имеет правильные нормальные производные $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_{\pm}$ на S изнутри и извне S и $V^{(0)}(\infty) = 0$ (см. §§ 27.2 и 27.7). Поэтому, чтобы потенциал $V^{(0)}$ давал решение внутренней или внешней задачи Дирихле, необходимо и достаточно, чтобы соответственно были выполнены равенства

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_{\pm}(x) = u_{\pm}^{\mp}(x), \quad x \in S. \quad (12)$$

По теореме о разрыве нормальной производной потенциала простого слоя (см. § 27.7) равенства (12) превращаются в интегральные уравнения Фредгольма

$$\pm 2\pi \mu(x) + \int_S \mu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y = u_{\pm}^{\mp}(x), \quad x \in S, \quad (13)$$

относительно неизвестной плотности μ .

Из равенства $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$, $x, y \in S$ (см. § 27.5), и из (10) следует, что ядро интегральных уравнений (13) равно $\mathcal{K}(y, x) = \mathcal{K}^*(x, y)$, так что уравнения (9) и (13) — союзные друг другу. Вводя параметр λ , перепишем интегральные уравнения (13) в единой форме:

$$\mu(x) = \lambda \int_S \mathcal{K}^*(x, y) \mu(y) dS_y + g(x), \quad x \in S. \quad (11^*)$$

При этом для внутренней задачи Неймана $\lambda = -1$ и $g = \frac{u_+}{2\pi}$, а для внешней задачи Неймана $\lambda = 1$ и $g = -\frac{u_-}{2\pi}$.

Для поверхности Ляпунова S функция $\cos \varphi_{xy}$ непрерывна на $S \times S$ и, в силу леммы 1 § 27.4, удовлетворяет оценке

$$|\cos \varphi_{xy}| \leq 3C|x-y|^{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Поэтому, в силу (10), ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно при $x \in S$, $y \in S$, $x \neq y$ и удовлетворяет оценке

$$|\mathcal{K}(x, y)| \leq \frac{3C}{2\pi |x-y|^{2-\alpha}}$$

и, следовательно, является поляриным ядром (см. § 17.4). Таким образом, для интегрального уравнения (11) и союзного к нему уравнения (11*) применимы все положения теории Фредгольма (см. замечание § 18.5).

4. Исследование интегральных уравнений. Докажем сначала, что $\lambda=1$ не есть характеристическое число ядра $\mathcal{K}^*(x, y)$. Пусть, напротив, $\lambda=1$ — характеристическое число этого ядра и μ^* — соответствующая ему собственная функция,

$$\mu^*(x) = \int_S \mathcal{K}^*(x, y) \mu^*(y) dS_y = \frac{1}{2\pi} \int_S \mu^*(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y, \quad x \in S. \quad (14)$$

Собственная функция $\mu^* \in C(S)$ (см. § 18.5). Построим потенциал простого слоя $V^{(0)}$ с плотностью μ^* . Функция $V^{(0)}$ гармонична вне S , непрерывна в R^3 и $V^{(0)}(\infty)=0$ (см. § 27.2). Далее, в силу формулы (43) § 27.7 и уравнения (14), ее правильная нормальная производная на S извне равна нулю. Отсюда, по теореме 4 § 28.2 о единственности решения внешней задачи Неймана, заключаем, что $V^{(0)}(x) \equiv 0$, $x \in G_1$ и, в частности, $V^{(0)}|_S = 0$. Но тогда, по теореме 2 § 28.2 о единственности решения внутренней задачи Дирихле, $V^{(0)}(x) \equiv 0$, $x \in G$. Итак, $V^{(0)}(x) \equiv 0$, $x \in R^3$. Отсюда, пользуясь формулой (46) § 27.7, заключаем, что $\mu^*(x) \equiv 0$, $x \in S$.

Таким образом, $\lambda=1$ не есть характеристическое число ядра $\mathcal{K}^*(x, y)$. Отсюда, по второй теореме Фредгольма, $\lambda=1$ также не есть характеристическое число ядра $\mathcal{K}(x, y)$. А тогда, по третьей и первой теоремам Фредгольма, интегральные уравнения (11) и (11*) при $\lambda=1$ однозначно разрешимы при любых непрерывных f и g . Следовательно, справедливы

Теорема 1. Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана разрешимы при любых непрерывных данных u_0 и u_1^* , и их решения представляются потенциалами двойного и простого слоя соответственно.

Теперь из формулы (30) § 27.5,

$$-\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y = - \int_S \mathcal{K}(x, y) dS_y = 1, \quad x \in S,$$

следует, что $\lambda=-1$ есть характеристическое число ядра $\mathcal{K}(x, y)$ и $\mu \equiv 1$ — соответствующая ему собственная функция. Докажем, что это — простое характеристическое число. Для этого, в силу второй теоремы Фредгольма,

достаточно показать, что $\lambda=-1$ — простое характеристическое число ядра $\mathcal{K}^*(x, y)$. Пусть μ_0 — соответствующая собственная функция,

$$\mu_0(x) = - \int_S \mathcal{K}^*(x, y) \mu_0(y) dS_y = - \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} \mu_0(y) dS_y. \quad (15)$$

Собственная функция $\mu_0 \in C(S)$ (см. § 18.5).

Составим потенциал простого слоя с плотностью μ_0 ,

$$V^{(0)}(x) = \int_S \frac{\mu_0(y)}{|x-y|} dS_y. \quad (16)$$

Функция $V^{(0)}$ гармонична вне S , непрерывна в R^3 и $V^{(0)}(\infty)=0$ (см. § 27.2). Далее, в силу формулы (43') § 27.7 и уравнения (15), ее правильная нормальная производная на S изнутри равна нулю. Отсюда, по теореме 3 § 28.2 о единственности решения внутренней задачи Неймана, заключаем, что $V^{(0)}(x) \equiv C = \text{const}$, $x \in G$.

Докажем, что $C \neq 0$. Пусть, напротив, $V^{(0)}(x) \equiv 0$, $x \in G$ и, в частности, $V^{(0)}|_S = 0$. Но тогда, по теореме 2 § 28.2 о единственности решения внешней задачи Дирихле, $V^{(0)}(x) \equiv 0$, $x \in G_1$. Итак, $V^{(0)}(x) \equiv 0$, $x \in R^3$. Отсюда, пользуясь формулой (46) § 27.7, заключаем, что $\mu_0(x) \equiv 0$, $x \in S$, что невозможно.

Пусть $\tilde{\mu}_0$ — другая собственная функция ядра $\mathcal{K}^*(x, y)$, соответствующая характеристическому числу $\lambda=-1$. По доказанному потенциал простого слоя $\tilde{V}^{(0)}$ с плотностью $\tilde{\mu}_0$ равен постоянной $\tilde{C} \neq 0$ на G . Но тогда потенциал простого слоя $\frac{\tilde{C}}{C} V^{(0)} - \tilde{V}^{(0)}$ с плотностью $\frac{\tilde{C}}{C} \mu_0 - \tilde{\mu}_0$ равен нулю на G , откуда следует, что эта плотность тождественно равна нулю на S , т. е.

$$\tilde{\mu}_0(x) = \frac{\tilde{C}}{C} \mu_0(x), \quad x \in S.$$

Поэтому $\lambda=-1$ — простое характеристическое число ядра $\mathcal{K}^*(x, y)$ и, стало быть, ядра $\mathcal{K}(x, y)$.

Нормируем собственную функцию μ_0 так, чтобы

$$V^{(0)}(x) = \int_S \frac{\mu_0(y)}{|x-y|} dS_y = 1, \quad x \in G. \quad (17)$$

Потенциал простого слоя $V^{(0)}$ с плотностью μ_0 называется потенциалом Робена.

Физический смысл потенциала Робена: это есть потенциал, создаваемый зарядами на проводящей поверхности S , а его плотность

$$\mu_0(x) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n} \right)_+(x)$$

есть плотность зарядов, которая устанавливается на этой поверхности. При этом полный заряд

$$\int_S \mu_0(x) dS = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n} \right)_+ dS$$

называется емкостью проводника S .

Вернемся к уравнениям (11) и (11*) при $\lambda = -1$. По третьей теореме Фредгольма интегральное уравнение (11*) при $\lambda = -1$ разрешимо тогда и только тогда, когда свободный член g ортогонален к 1. Итак, справедлива

Теорема 2. Внутренняя задача Неймана разрешима при любой непрерывной функции u_1^0 , удовлетворяющей условию ортогональности

$$\int_S u_1^0(x) dS = 0, \quad (18)$$

и ее решение представляется потенциалом простого слоя.

Далее, для разрешимости уравнения (11) при $\lambda = -1$ необходимо и достаточно, чтобы свободный член f был ортогонален к μ_0 . Таким образом, внешняя задача Дирихле имеет решение, представимое потенциалом двойного слоя, при любой непрерывной функции u_0^0 , ортогональной к плотности μ_0 потенциала Робена

$$\int_S u_0^0(x) \mu_0(x) dS = 0. \quad (19)$$

Условие разрешимости (19) возникло за счет того, что решение внешней задачи Дирихле искалось в виде потенциала двойного слоя и, следовательно, от решения заранее требовалось убывание $O(|x|^{-2})$ при $|x| \rightarrow \infty$. Однако в постановке этой задачи требуется лишь, чтобы решение обращалось в 0 на бесконечности. Чтобы учесть и такие решения и тем самым избавиться от условия (19), поступаем следующим образом.

Считаем $0 \in G$. Ищем решение внешней задачи Дирихле в виде суммы потенциала двойного слоя $V^{(1)}$ с неизвестной плотностью v на S и ньютонова потенциала $\frac{\alpha}{|x|}$ от заряда в точке $x=0$ неизвестной величины α ,

$$u(x) = V^{(1)}(x) + \frac{\alpha}{|x|} = \int_S v(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y + \frac{\alpha}{|x|}. \quad (20)$$

Соответствующее интегральное уравнение (11) принимает вид

$$v(x) = -\int_S \mathcal{K}(x, y) v(y) dS_y + \frac{u_1^0(x)}{2\pi} - \frac{\alpha}{2\pi|x|}. \quad (21)$$

По доказанному для разрешимости интегрального уравнения (21) необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \left[u_0^0(x) - \frac{\alpha}{|x|} \right] \mu_0(x) dS = 0, \quad (22)$$

Так как $0 \in G$, то, в силу (17),

$$\int_S \frac{\mu_0(y)}{|y|} dS = V^{(0)}(0) = 1,$$

а потому условие разрешимости (22) принимает вид

$$\alpha = \int_S u_0^0(x) \mu_0(x) dS. \quad (23)$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. Внешняя задача Дирихле разрешима при любой непрерывной функции u_0^0 и ее решение представляется в виде суммы потенциала двойного слоя и потенциала

$$\frac{1}{|x|} \int_S u_0^0(x) \mu_0(x) dS.$$

Замечание. Пусть выполнены условия разрешимости (18) и (23). Тогда общие решения интегральных уравнений (21) и (11*) при $\lambda = -1$ содержат по одной произвольной постоянной C_1 и C соответственно: $v(x) + C_1$, $\mu(x) + C\mu_0(x)$. Отсюда, в силу формул (30) § 27.5 и (17), опять получаем, что решение внешней задачи Дирихле единственно (и, значит, не содержит постоянной C), а решение внутренней задачи Неймана определено с точностью до аддитивной постоянной C_1 .

5. Решение задач Дирихле и Неймана для шара. Построим решения задач Дирихле и Неймана (внутренней и внешней) для шара U_R .

Пусть f — заданная непрерывная функция на сфере S_R . Тогда $f(Rs)$ разлагается в ряд Фурье по сферическим функциям

$$f(Rs) = \sum_{l=0}^{\infty} Y_l(s), \quad s \in S_1, \quad (24)$$

где, в силу (38) § 25.7,

$$Y_l(s) = \frac{2l+1}{4\pi} \int_{S_1} f(Rs') P_l((s, s')) ds'.$$

Ряд (24) сходится в $\mathcal{L}^2(S_R)$ (см. § 25.6). Предположим, что этот ряд сходится в $C(S_R)$.

Тогда

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^l Y_l(\theta, \varphi), \quad r < R, \quad (25)$$

— решение внутренней задачи Дирихле с $u_0 = f$;

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R}{l+1} \left(\frac{r}{R}\right)^l Y_l(\theta, \varphi) + C, \quad r < R, \quad (26)$$

— решение внутренней задачи Неймана с $u_1 = f$ при условии, что

$$Y_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} f(Rs') ds' = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} f(x) dS = 0; \quad (27)$$

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_l(\theta, \varphi), \quad r > R, \quad (28)$$

— решение внешней задачи Дирихле с $u_0 = f$;

$$u(r, \theta, \varphi) = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R}{l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_l(\theta, \varphi), \quad r > R, \quad (29)$$

— решение внешней задачи Неймана с $u_1 = f$.

Действительно, ряд (25) состоит из гармонических полиномов (см. § 25.8) и по предположению сходится

в $C(S_R)$. Поэтому этот ряд сходится в $C(U_R)$ (см. § 24.5), определяя функцию u , гармоническую в U_R (см. § 24.8), непрерывную на U_R и принимающую, в силу (24), значения f на S_R . Это и значит, что ряд (25) дает решение внутренней задачи Дирихле для шара U_R с $u_0 = f$.

На основании признака Абеля *) ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l} Y_l(s)$$

сходится вместе с рядом (24) в $C(S_R)$. Отсюда, повторяя предыдущие рассуждения, заключаем, что ряд (26) сходится в $C(U_R)$ и определяет функцию u , гармоническую в U_R и непрерывную на U_R . Далее, этот ряд можно почленно дифференцировать по r ,

$$\frac{\partial u(r, \theta, \varphi)}{\partial r} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{l-1} Y_l(\theta, \varphi), \quad (30)$$

поскольку ряд (30), в силу признака Абеля, сходится в $C(U_R)$. Наконец, сумма ряда (30) на S_R согласно (24) совпадает с f , если функция f удовлетворяет условию (27) разрешимости внутренней задачи Неймана (см. § 28.4). Это и значит, что ряд (26) дает решение внутренней задачи Неймана для шара U_R с $u_1 = f$ при выполнении условия разрешимости (27).

Аналогично доказывается, что ряды (28) и (29) определяют решения соответствующих внешних краевых задач.

§ 29. Функция Грина задачи Дирихле

1. Определение и свойства функции Грина. Функцией Грина (внутренней) задачи Дирихле для (ограниченной) области G называется функция $\mathcal{G}(x, y)$, $x \in G$, $y \in G$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) При каждом $y \in G$ представляется в виде

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + g(x, y), \quad (1)$$

где функция $g(x, y)$ — гармоническая в G и непрерывная на $\bar{G}$ по x .

*) См. Г. М. Фихтенгольца [1], г. II.

2) При каждом $y \in G$ удовлетворяет граничному условию

$$\mathcal{P}(x, y)|_{x \in S} = 0. \quad (2)$$

Из условий 1) и 2) вытекает, что функция $\mathcal{P}(x, y)$ — гармоническая по x в области $G \setminus \{y\}$, непрерывная в $G \setminus \{y\}$, обращается в нуль на S и стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow y$. Отсюда, в силу принципа максимума (см. § 24.4), вытекает, что $\mathcal{P}(x, y) > 0$, $x \in G$, $y \in G$. Далее, гармоническая функция $g(x, y)$ удовлетворяет граничному условию

$$g(x, y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad x \in S, \quad y \in G, \quad (3)$$

откуда следует, что $g(x, y) < 0$, $x \in S$, $y \in G$. Но тогда, в силу принципа максимума, это неравенство сохранится и в области G , т. е. $g(x, y) < 0$, $x \in G$, $y \in G$. Итак, в силу (1), функция Грина удовлетворяет неравенствам

$$0 < \mathcal{P}(x, y) < \frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad x \in G, \quad y \in G, \quad x \neq y. \quad (4)$$

Из единственности решения задачи Дирихле (см. § 28.2) вытекает, что функция Грина $\mathcal{P}(x, y)$ единственна (если она существует).

Физический смысл функции Грина. Из определения функции Грина $\mathcal{P}(x, y)$ следует, что при каждом $y \in G$ она удовлетворяет в обобщенном смысле уравнению Пуассона $\Delta_x \mathcal{P}(x, y) = -\delta(x-y)$, $x \in G$, и обращается в нуль на границе S . Поэтому функцию $\mathcal{P}(x, y)$ можно интерпретировать как кулонов потенциал (см. § 27.3), порождаемый внутри заземленной проводящей поверхности S зарядом $+\frac{1}{4\pi}$, находящимся в точке $y \in G$ (рис. 94).

Функция $g(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных (x, y) в $G \times G$.

Пусть $x_0 \in G$, $y_0 \in G$ и $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, $x \in G$, $y \in G$. Пользуясь непрерывностью функции $g(x, y)$ по x , прин-



Рис. 94.

ципом максимума и равенством (3), получаем

$$\begin{aligned} |g(x_0, y_0) - g(x, y)| &\leq \\ &\leq |g(x_0, y_0) - g(x, y_0)| + |g(x, y_0) - g(x, y)| \leq \\ &\leq |g(x_0, y_0) - g(x, y_0)| + \max_{x \in S} \frac{1}{4\pi} \left| \frac{1}{|x-y_0|} - \frac{1}{|x-y|} \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

что и доказывает непрерывность функции g в точке (x_0, y_0) .

Теорема. Если S — достаточно гладкая поверхность, то функция Грина $\mathcal{P}(x, y)$ существует, имеет правильную нормальную производную $\frac{\partial \mathcal{P}(x, y)}{\partial n}$ на S при всех $y \in G$ и симметрична:

$$\mathcal{P}(x, y) = \mathcal{P}(y, x), \quad x \in G, \quad y \in G. \quad (5)$$

Доказательство. Достаточно установить существование симметричной функции $g(x, y)$, обладающей при каждом $y \in G$ следующими свойствами по x : гармоническая в G , непрерывная на G , удовлетворяет граничному условию (3) и имеет правильную нормальную производную на S .

Фиксируем $y \in G$. Функция $-\frac{1}{4\pi|x-y|}$, $x \in G_1$, есть, очевидно, решение внешней задачи Неймана с граничной функцией

$$u_1^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|x-y|}, \quad x \in S. \quad (6)$$

С другой стороны, по теореме 1 § 28.4 это решение представляется в виде потенциала простого слоя

$$V^{(0)}(x, y) = \int_S \frac{\mu(y', y)}{|x-y'|} dS_{y'}$$

с непрерывной плотностью $\mu(y', y)$ по $y' \in S$. Поэтому, в силу единственности решения внешней задачи Неймана (см. § 28.2, теорема 4),

$$V^{(0)}(x, y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad x \in G_1. \quad (7)$$

Потенциал $V^{(0)}$ гармоничен в G и непрерывен в R^3 (см. § 27.2) и, в силу (7), удовлетворяет граничному условию (3). Поэтому

$$g(x, y) = V^{(0)}(x, y) = \int_S \frac{\mu(y', y)}{|x-y'|} dS_{y'}, \quad x \in G. \quad (8)$$

Отсюда по теореме § 27.7 следует, что функция $g(x, y)$ имеет правильную нормальную производную (изнутри) на S и эта производная, в силу формул (46) § 27.7 и (6), равна

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial n_x} = 4\pi \mu(x, y) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|x-y|}, \quad x \in S. \quad (9)$$

Осталось доказать симметрию функции $g(x, y)$. Применяя формулу Грина (13) § 28.3 к функции $g(x, y)$ и пользуясь граничными условиями (3) и (9) и формулой (8), при всех $x \in G$ и $y \in G$ получаем

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{|x-y'|} \frac{\partial g(y', y)}{\partial n_{y'}} - g(y', y) \frac{\partial}{\partial n_{y'}} \frac{1}{|x-y'|} \right] dS_{y'} = \\ &= - \int_S g(y', x) \frac{\partial g(y', y)}{\partial n_{y'}} dS_{y'} + \\ &+ \int_S g(y', y) \left[\frac{\partial g(y', x)}{\partial n_{y'}} - 4\pi \mu(y', x) \right] dS_{y'} = \\ &= \int_S \left[g(y', y) \frac{\partial g(y', x)}{\partial n_{y'}} - g(y', x) \frac{\partial g(y', y)}{\partial n_{y'}} \right] dS_{y'} - \\ &- 4\pi \int_S g(y', y) \mu(y', x) dS_{y'} = \\ &= \int_G [g(y', y) \Delta g(y', x) - g(y', x) \Delta g(y', y)] dy' + \\ &+ \int_S \frac{\mu(y', x)}{|y-y'|} dS_{y'} = g(y, x). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из симметрии функции $g(x, y)$ вытекают следующие дополнительные свойства ее: непрерывная по (x, y) в $G \times G$, при каждом $x \in G$ — гармоническая по y в G , принимает значение $-\frac{1}{4\pi} |x-y|^{-1}$ при $y \in S$ и имеет правильную нормальную производную $\frac{\partial g(x, y)}{\partial n_y}$ на S .

2. Примеры построения функции Грина (метод отражений). Для построения функции Грина для области с достаточно широкой группой симметрии весьма эффективным оказывается метод отражений. Этот метод мы проиллюстрируем на ряде примеров.

а) Шар, U_R . Пусть $y \in U_R$, $y \neq 0$ и

$$y^* = y \frac{R^2}{|y|^2}, \quad |y||y^*| = R^2, \quad (10)$$

— симметричная точка относительно сферы S_R при преобразовании инверсии (см. § 24.10).

Ищем функцию Грина в виде

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi |x-y|} - \frac{\alpha}{4\pi |x-y^*|}, \quad (11)$$

где $-\frac{\alpha}{4\pi}$ — неизвестный заряд в симметричной точке y^* . Функция

$$g(x, y) = -\frac{\alpha}{4\pi |x-y^*|}$$

— гармоническая в U_R и принадлежит классу $C^\infty(\bar{U}_R)$. Подберем величину α так, чтобы функция $\mathcal{G}(x, y)$ обращалась в нуль на границе S_R . Для этого заметим, что при $|x|=R$ треугольники Oxy^* и Oxy подобны: один угол у них общий, а прилегающие стороны, в силу (10), пропорциональны (рис. 95). Поэтому при $|x|=R$ справедливо соотношение

$$\frac{R}{|y|} = \frac{|x-y^*|}{|x-y|},$$

и, следовательно, в силу (11), необходимо положить $\alpha = \frac{R}{|y|}$. Итак,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y) &= \frac{1}{4\pi |x-y|} - \frac{R}{4\pi |y| |x-y^*|} = \\ &= \frac{1}{4\pi |x-y|} - \frac{R|y|}{4\pi |x| |y|^2 - yR^2} \end{aligned} \quad (12)$$

есть функция Грина для шара. Формула (12) сохраняет силу и при $y=0$:

$$\mathcal{G}(x, 0) = \frac{1}{4\pi |x|} - \frac{1}{4\pi R}.$$

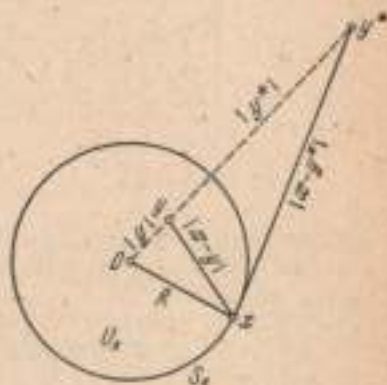


Рис. 95.

б) Полупространство, $x_3 > 0^*$. Пусть точка $y = (y_1, y_2, y_3)$ лежит в этом полупространстве, $y_3 > 0$. Точка $\bar{y} = (y_1, y_2, -y_3)$ называется симметричной с точкой y

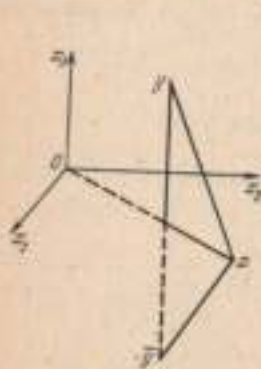


Рис. 96.

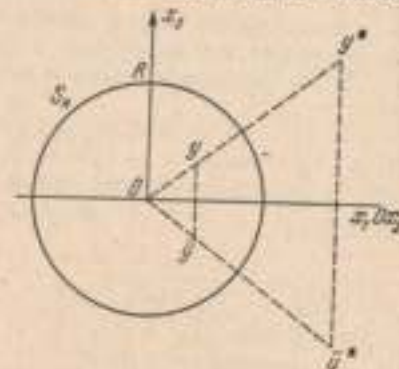


Рис. 97.

относительно плоскости $x_3 = 0$ (рис. 96). Нетрудно видеть, что функция Грина для полупространства $x_3 > 0$ определяется формулой

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi|x-\bar{y}|}. \quad (13)$$

с) Полушар, $|x| < R$, $x_3 > 0$. Пусть точка y лежит в этом полушаре; y^* — точка, симметричная с y относительно сферы S_R ; $\bar{y}$ и $\bar{y}^*$ — точки, симметричные с y и y^* относительно плоскости $x_3 = 0$ (рис. 97). Функция Грина выражается формулой

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{R}{4\pi|y||x-y^*|} - \frac{1}{4\pi|x-\bar{y}|} + \frac{R}{4\pi|y||x-\bar{y}^*|}. \quad (14)$$

д) Двугранный угол, $x_3 > 0$, $x_2 > 0$. Пусть точка $y = (y_1, y_2, y_3)$ лежит в этом двугранном угле, $y_3 > 0$, $y_2 > 0$; $\bar{y}$ и $\bar{y}'$ — точки, симметричные с y относительно плоскостей $x_3 = 0$ и $x_2 = 0$ соответственно; y' — точка, сим-

* Эта область неограничена (см. также пример д)). Функция Грина $\mathcal{G}(x, y)$ для таких областей, кроме условий 1) и 2), должна удовлетворять условию $\mathcal{G}(x, y) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, $y \in G$.

метричная с y относительно плоскости $x_2 = 0$ (рис. 98). Функция Грина имеет вид

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi|x-\bar{y}|} - \frac{1}{4\pi|x-y'|} + \frac{1}{4\pi|x-\bar{y}'|}. \quad (15)$$

Аналогично строится функция Грина и для двугранного угла раствора $\frac{\pi}{n}$, где n — целое, $n \geq 3$.

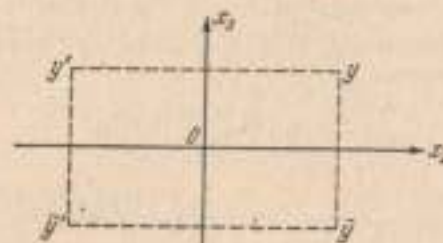


Рис. 98.

3. Решение краевой задачи с помощью функции Грина. Впредь в этом параграфе будем считать, что S — достаточно гладкая поверхность (см. § 28.2). Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f(x), \quad u|_S = u_0(x), \quad u \in C^2(G) \cap C(\bar{G}), \quad (16)$$

где $f \in \mathcal{L}_2(G) \cap C(G)$ и $u_0 \in C(S)$. Как установлено § 28.2, решение этой задачи единственно.

Теорема. Если решение $u(x)$ задачи (16) имеет правильную нормальную производную на S , то оно представляется формулой

$$u(x) = - \int_S \frac{\partial \mathcal{G}(x, y)}{\partial n_y} u_0(y) dS_y + \int_G \mathcal{G}(x, y) f(y) dy, \quad (17)$$

$$x \in G.$$

Доказательство. По условию решение $u \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$, имеет правильную нормальную производную на S и $\Delta u = -f$, $f \in \mathcal{L}_2(G) \cap C(G)$. Применяя к функции $u(x)$ формулу Грина (1) § 24.1 при $n=3$ и учитывая

(16), получим

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} - u_0(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} \right] dS_y + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{f(y)}{|x-y|} dy, \quad x \in G. \quad (18)$$

Далее, при каждом $x \in G$ функция $g(x, y)$ гармоническая по y в G , непрерывная по y на $\bar{G}$ и имеет правильную нормальную производную $\frac{\partial g(x, y)}{\partial n_y}$ на S (см. § 29.2). Применяя к функциям $u(y)$ и $g(x, y)$ формулу Грина (8) § 21.2, выводим равенство

$$0 = \int_S \left[\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} g(x, y) - u_0(y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial n_y} \right] dS_y + \\ + \int_G f(y) g(x, y) dy, \quad x \in G.$$

Прибавляя это равенство к равенству (18) и пользуясь (1) и (3), получаем формулу (17). Теорема доказана.

4. Формула Пуассона. Вычислим теперь нормальную производную функции Грина для шара U_R на сфере S_R . Пользуясь выражением (12) для этой функции, получим

$$\frac{\partial \mathcal{G}(x, y)}{\partial n_y} \Big|_{S_R} = \frac{\partial}{\partial |y|} \left[\frac{1}{4\pi |x-y|} - \frac{R|y|}{4\pi |x|y|^2 - yR^2} \right] \Big|_{|y|=R} = \\ = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\sqrt{|x|^2 + \rho^2 - 2|x|\rho \cos \gamma}} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + |x|^2 \rho^2 - 2R^2|x|\rho \cos \gamma}} \right] \Big|_{\rho=R} = \\ = \frac{|x|^2 - R^2}{4\pi R (R^2 + |x|^2 - 2R|x|\cos \gamma)^{3/2}} = \frac{|x|^2 - R^2}{4\pi R |x-y|^3} \Big|_{y \in S_R}.$$

И формула (17) для шара U_R при $f=0$ принимает вид

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^3} u_0(y) dS_y, \quad |x| < R. \quad (19)$$

Это и есть формула (интеграл) Пуассона. Она аналогична формуле Коши для аналитических функций.

Докажем, что формула Пуассона (19) дает решение внутренней задачи Дирихле для шара U_R

$$\Delta u = 0, \quad u|_{S_R} = u_0 \quad (20)$$

для любой непрерывной на S_R функции u_0 .

Действительно, решение $u(x)$ этой задачи существует для любой непрерывной функции u_0 и единственно (см. § 28). Во всяком меньшем шаре U_ρ , $\rho < R$, функция $u(x)$ является решением задачи Дирихле с граничным значением $u|_{S_\rho}$ и принадлежит классу $C^\infty(U_\rho)$. Поэтому, по теореме § 29.3, это решение представляется интегралом Пуассона (19), т. е.

$$u(x) = \frac{1}{4\pi \rho} \int_{|y|=\rho} \frac{\rho^2 - |x|^2}{|x-y|^3} u(y) dS_y, \quad |x| < \rho.$$

Переходя в этой формуле к пределу при $\rho \rightarrow R$ и пользуясь непрерывностью $u(x)$ на $\bar{U}_R$ и граничным условием (20), получаем представление (19), что и требовалось.

5. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению. Рассмотрим в области G краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f(x), \quad u|_S = 0, \quad u \in C^2(G) \cap C(\bar{G}), \quad (21)$$

где $f \in \mathcal{L}_2(G) \cap C(\bar{G})$.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Если $f \in C(\bar{G})$, то функция

$$\tilde{V}(x) = \int_G g(x, y) f(y) dy \quad (22)$$

— гармоническая в области G .

Доказательство. Так как функция $g(x, y)$ непрерывна по (x, y) в $G \times \bar{G}$ и гармонична по $x \in G$ (см. § 29.1), то $\tilde{V} \in C(\bar{G})$ и для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ справедливы равенства

$$\int \tilde{V}(x) \Delta \varphi(x) dx = \int \left[\int g(x, y) f(y) dy \right] \Delta \varphi(x) dx = \\ = \int f(y) \left[\int g(x, y) \Delta \varphi(x) dx \right] dy = 0,$$

так как g удовлетворяет уравнению Лапласа (см. § 29.1). Поэтому функция $\tilde{V}(x)$ — обобщенно-гармоническая и, значит, гармоническая в области G (см. § 24.7). Лемма доказана.

Теорема. Если $f \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$, то (единственное) решение задачи (21) выражается формулой

$$u(x) = \int_G \mathcal{D}(x, y) f(y) dy \quad (23)$$

и имеет правильную нормальную производную на S .

Доказательство. Докажем, что формула (23) дает решение задачи (21). Пользуясь (1), перепишем (23) в виде суммы двух слагаемых:

$$u(x) = V(x) + \hat{V}(x), \quad (24)$$

где V — объемный потенциал с плотностью $\frac{f}{4\pi}$ и функция $\hat{V}$ определена равенством (22).

По предположению $f \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$. Поэтому объемный потенциал $V \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ и удовлетворяет уравнению Пуассона (21) (см. § 27.1). По лемме функция $\hat{V}(x)$ — гармоническая в области G . Итак, в силу (24) функция $u \in C^2(G)$ и в области G удовлетворяет уравнению Пуассона (21).

Докажем, что $u \in C(\bar{G})$ и обращается в нуль на S . Для этого достаточно показать, что

$$|u(x')| \xrightarrow{x' \rightarrow x} 0, \quad x' \rightarrow x, \quad x' \in G. \quad (25)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. В силу оценок (4) найдется такая под-область $G' \subset G$ (рис. 99), что (см. § 1.6)

$$\left| \int_{G \setminus G'} \mathcal{D}(x', y) f(y) dy \right| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{G \setminus G'} \frac{|f(y)|}{|x' - y|} dy < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (26)$$

$$x' \in G.$$

Но функция $g(x', y)$ равномерно непрерывна по (x', y) на $G \times G'$ (см. § 29.1), и поэтому, в силу (1), функция Грина $\mathcal{D}(x', y)$ равномерно непрерывна по (x', y) на $(G \setminus G') \times G'$, где G' — любая подобласть такая, что $G' \subset G$ (рис. 99). Поэтому, учитывая, что функция $\mathcal{D}(x', y)$ обращается в нуль при $x' \in S$, $y \in G'$, заключаем, что найдется такая достаточно близкая к G под-область $G'' \subset G$, что

$$\left| \int_G \mathcal{D}(x', y) f(y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x' \in G \setminus G'',$$

откуда и из неравенства (26) вытекает неравенство

$$|u(x')| = \left| \int_G \mathcal{D}(x', y) f(y) dy \right| \leq \left| \int_{G'} \mathcal{D}(x', y) f(y) dy \right| + \left| \int_{G \setminus G'} \mathcal{D}(x', y) f(y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

справедливое при всех $x' \in G \setminus G''$. Это и доказывает предельное соотношение (25).

Докажем, что функция $u(x)$ имеет правильную нормальную производную на S . Так как $V \in C^1(R^3)$ (см. § 27.1), то, в силу (24), для этого достаточно установить, что функция $\hat{V}(x)$ имеет правильную нормальную производную на S . По доказанному $\hat{V} \in C(\bar{G})$ — гармоническая в G и удовлетворяет граничному условию $\hat{V}|_S = -V|_S$. Построим потенциал простого слоя $V^{(0)}$ с непрерывной плотностью, решающий внешнюю задачу Неймана с $u_1^* = -\frac{\partial V}{\partial n}|_S$ (см. § 28.4).

Объемный потенциал $-V(x)$ также является решением этой задачи (см. § 27.1). Поэтому, в силу единственности решения внешней задачи Неймана (см. § 28.2), заключаем, что $V^{(0)}(x) = -V(x)$, $x \in G_1$. В частности, $V^{(0)}|_S = -V|_S$. Отсюда, по теореме о единственности решения внутренней задачи Дирихле (см. § 28.2), получаем, что $\hat{V}(x) = V^{(0)}(x)$, $x \in G$. Поскольку потенциал простого слоя $V^{(0)}$ имеет правильную нормальную производную (изнутри) на S (см. § 27.7), то, следовательно, и функция $\hat{V}$ обладает таким же свойством. Теорема доказана.

Теперь установим, что *красивая задача*

$$-\Delta u = \lambda u + f(x), \quad u|_S = 0, \quad u \in C^2(G) \cap C(\bar{G}) \quad (27)$$

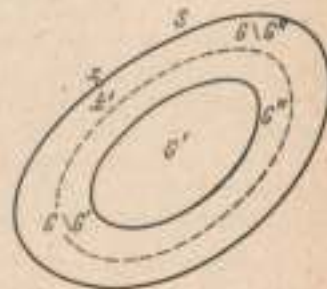


Рис. 99.

эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \int_G \mathcal{D}(x, y) [\lambda u(y) + f(y)] dy, \quad u \in C(\bar{G}), \quad (28)$$

если $f \in C^1(\bar{G}) \cap C(\bar{G})$.

Действительно, пусть функция $u \in C(\bar{G})$ есть решение интегрального уравнения (28), т. е., в силу (1),

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{\lambda u(y) + f(y)}{|x-y|} dy + \int_G g(x, y) [\lambda u(y) + f(y)] dy. \quad (28')$$

Первое слагаемое справа в (28') есть объемный потенциал и потому принадлежит классу $C^1(R^3)$ (см. § 27.1), а второе слагаемое есть гармоническая функция в области G (см. лемму). Поэтому $u \in C^1(\bar{G})$ и, следовательно, $\lambda u + f \in C^1(\bar{G}) \cap C(\bar{G})$. По теореме § 29.5 функция $u(x)$ есть решение краевой задачи (27).

Обратно, если функция $u_1(x)$ есть решение краевой задачи (27), то она является (единственным) решением краевой задачи (21) с заменой f на $\lambda u_1 + f$. Так как $\lambda u_1 + f \in C^1(\bar{G}) \cap C(\bar{G})$, то, по теореме, это решение выражается интегралом (23) с заменой f на $\lambda u_1 + f$, т. е. функция u_1 удовлетворяет интегральному уравнению (28). Этим доказана эквивалентность задач (27) и (28).

6. Свойства собственных значений и собственных функций. Рассмотрим однородную краевую задачу на собственные значения (внутреннюю задачу Дирихле)

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad u|_S = 0, \quad u \in C^2(\bar{G}) \cap C(\bar{G}). \quad (29)$$

В § 29.5 было показано, что задача (29) эквивалентна задаче на собственные значения для однородного интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_G \mathcal{D}(x, y) u(y) dy, \quad u \in C(\bar{G}), \quad (30)$$

с симметричным (и, стало быть, эрмитовым) ядром $\mathcal{D}(x, y)$ (см. § 29.1).

Докажем, что ядро $\mathcal{D}(x, y)$ слабо полярное (см. § 17.4). Для этого функцию $g(x, y)$, заданную и непрерывную на $(\bar{G} \times \bar{G}) \cup (G \times \bar{G})$ (см. § 29.1), продолжим на $G \times G$, полагая, в соответствии с (3),

$$g(x, y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad x \in S, \quad y \in S.$$

При таком продолжении функция $g(x, y)$ непрерывна на $\bar{G} \times \bar{G}$, кроме тех точек, где $x = y$, $y \in S$. А тогда, в силу (1), функция Грина $\mathcal{D}(x, y)$ непрерывна при $x \in \bar{G}$, $y \in \bar{G}$, $x \neq y$ и, стало быть, в силу (4), ядро $\mathcal{D}(x, y)$ слабо полярное ($\alpha = 1$, $\lambda = 3$).

Поэтому для уравнения (30) справедливы все положения теории интегральных уравнений с симметричным слабо полярным ядром, доказанные в §§ 19 и 20. Но собственные значения и собственные функции краевой задачи (29) совпадают с характеристическими числами и соответствующими собственными функциями ядра $\mathcal{D}(x, y)$. Это дает возможность для краевой задачи (29) полностью доказать теорему 1 § 21.4, а также установить и некоторые другие свойства этой задачи.

Теорема. Множество собственных значений $\{\lambda_k\}$ краевой задачи (29) не имеет конечных предельных точек, причем $\lambda_k > 0$; каждое собственное значение λ_k имеет конечную кратность. Наименьшее собственное значение λ_1 — простое, а соответствующая ему собственная функция $X_1(x) > 0$, $x \in G$. Собственные функции $\{X_k\}$ можно выбрать вещественными и ортонормальными; $X_k \in C^2(\bar{G}) \cap C(\bar{G})$; они имеют правильную нормальную производную на S . Всякая функция f из $\mathcal{H}_2^*$ разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям $\{X_k\}$.

Доказательство. Отсутствие конечных предельных точек у множества $\{\lambda_k\}$ и конечная кратность каждого собственного значения λ_k следуют из теорем Фредгольма (см. § 18.5). Из вещественности и эрмитовости ядра $\mathcal{D}(x, y)$ вытекает, что собственные функции $\{X_k\}$ можно выбрать вещественными и ортонормальными (см. §§ 19.4 и 20.7).

Собственная функция $X_k \in C^2(\bar{G}) \cap C(\bar{G})$ и является решением при $\lambda = \lambda_k$ краевой задачи (29) и интегрального уравнения (30). Поэтому, по теореме § 29.5, $X_k(x)$ имеет правильную нормальную производную на S . Отсюда и из формулы Грина (7) § 21.2 при $u = v = X_k$ вытекает, что

$$\lambda_k = \lambda_k(X_k, X_k) = -(\Delta X_k, X_k) = \int_G |\text{grad } X_k|^2 dx > 0.$$

Простота λ_1 и положительность $X_1(x)$ в G вытекают из теоремы Энтча (см. § 20.7), так как, в силу (4), ядро $\mathcal{D}(x, y)$ положительное.

* То есть $f \in C^1(\bar{G}) \cap C^1(\bar{G})$, $\Delta f \in \mathcal{L}_2(\bar{G})$ и $f|_S = 0$ (см. § 21.1).

Пусть $f \in \mathcal{H}_\Delta$. Тогда функция $f(x)$ является (единственным) решением краевой задачи

$$\Delta f = -h, \quad f|_S = 0,$$

где $h = -\Delta f \in C(G) \cap \mathcal{L}_2(G)$. По теореме § 29.3 функция $f(x)$ истокообразно представима через ядро $\mathcal{S}(x, y)$, и, следовательно, по теореме Гильберта — Шмидта (см. § 20.6) она разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям $\{X_k\}$. Теорема доказана.

Таким образом, для краевой задачи (29) верны теорема 1 § 21.4 и следствия из нее. В частности, система собственных функций $\{X_k\}$ этой задачи полна в $\mathcal{L}_2(G)$.

Замечание. Пользуясь замечанием § 27.7, можно доказать, что собственные функции $X_k \in C^1(\bar{G})$; кроме того, $X_k \in C^\infty(\bar{G})$ (см. § 30.2).

7. Упражнения. а) Пользуясь формулой Пуассона (19), доказать неравенство Гарнака

$$\frac{R(R-|x|)}{(R+|x|)^2} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R(R+|x|)}{(R-|x|)^2} u(0), \quad |x| < R,$$

справедливое для любой функции $u(x) \geq 0$, гармонической в шаре U_R и непрерывной на $\bar{U}_R$.

б) Пользуясь неравенством Гарнака, доказать теорему: всякая возрастающая последовательность гармонических функций в области G сходится (равномерно на каждом компакте $K \subset G$) или к гармонической в G функции, или к $+\infty$.

в) Доказать равенство

$$\frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^3} \cdot dS_y = \begin{cases} 1, & |x| < R, \\ -\frac{R}{|x|}, & |x| > R. \end{cases}$$

г) Пользуясь в), доказать, что интеграл Пуассона

$$\frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^3} u_0(y) dS_y, \quad |x| > R$$

дает решение внешней задачи Дирихле для шара U_R .

е) Показать, что n -мерный интеграл Пуассона

$$\frac{1}{\sigma_n R} \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} u_0(y) dS_y$$

дает решение внутренней задачи Дирихле для шара $U_R \subset \mathbb{R}^n$,

г) Показать, что решения задач Дирихле и Неймана для полупространства $x_n > 0$ представляются соответственно формулами

$$\frac{x_n}{2\pi} \int_{y_n=0} \frac{u_0(y)}{|x-y|^3} dS_y, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{y_n=0} \frac{u_1(y)}{|x-y|^2} dS_y,$$

если $u_0(y) = O(|y|^{-1-\varepsilon})$, $u_1(y) = O(|y|^{-1-\varepsilon})$, $|y| \rightarrow \infty$ при любом $\varepsilon > 0$; $y = (y_1, y_2)$.

г) Пусть G — выпуклая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что краевая задача для стационарного уравнения переноса (см. § 2.4)

$$(s, \text{grad } \psi) + \alpha \psi = \lambda h(x) \psi(x) + f(x),$$

$$\psi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \psi(x, s') ds', \quad \psi(x, s) = 0, \quad x \in S, \quad (s, n_x) < 0,$$

эквивалентна интегральному уравнению Пайерлса (см. § 18.5, г)).

$$\psi(x) = \int_G \mathcal{K}(x-y) [\lambda h(y) \psi(y) + f(y)] dy, \quad \mathcal{K}(z) = \frac{e^{-\alpha|z|}}{4\pi|z|^2}.$$

Здесь $h \in C(\bar{G})$, $h(x) > 0$, $\alpha > 0$.

д) Пользуясь г) и теоремой Ентца (см. § 20.7) доказать: все характеристические числа $\{\lambda_k\}$ однородного уравнения Пайерлса положительны, λ_1 — простое, соответствующая ему собственная функция φ_1 положительна, система собственных функций $\{\varphi_k\}$ полна в $\mathcal{L}_2(G; h)$.

е) Доказать следующий принцип максимума: если функция $u(x)$ класса $C^2(G) \cap C(\bar{G})$ удовлетворяет в ограниченной области G дифференциальному уравнению

$$Lu = -\text{div}(p \text{ grad } u) + q(x)u \leq 0, \quad p > 0, \quad q \geq 0,$$

то либо $u \leq 0$ на $\bar{G}$, либо $u(x)$ принимает свой (положительный) максимум на $\bar{G}$ на границе S .

ж) Пользуясь е), доказать: если функция $u \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$ есть решение краевой задачи

$$-\Delta u + q(x)u = F(x), \quad u|_S = v(x), \quad (31)$$

то справедливо неравенство

$$\|u\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{1}{q_0} \|F\|_{C(\bar{G})} + \|v\|_{C(S)}, \quad q_0 = \min_{x \in \bar{G}} q(x).$$

з) Пользуясь ж), доказать единственность решения задачи (31) в классе $C^2(G) \cap C(\bar{G})$ и его непрерывную зависимость от F и v в норме C (при условии $q_0 > 0$).

и) Доказать, что решение краевой задачи

$$Lu = f, \quad \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = v$$

единственно в классе $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, если $q \not\equiv 0$ или $\alpha \not\equiv 0$.

и) Пусть L — положительно определенный оператор, т. е. $(Lu, u) > 0$, $u \in M_L$, $u \neq 0$. Докажем: для того чтобы функция u_0 из M_L была решением уравнения $Lu = f$, $f \in L_2(G)$ необходимо и достаточно, чтобы она сообщала в M_L минимум функционалу

$$(Lu, u) - 2 \operatorname{Re} (f, u);$$

решение u_0 единственно в M_L .

§ 30. Уравнение Гельмгольца

Уравнением Гельмгольца называется уравнение (см. § 2.3)

$$\Delta u + k^2 u = -f(x). \quad (1)$$

При $k=0$ оно превращается в уравнение Пуассона. Теория уравнения Гельмгольца близка к теории уравнения Пуассона, однако имеются некоторые особенности, связанные с неединственностью решения (при $k^2 > 0$).

Уравнение (1) будем рассматривать в трехмерном пространстве, $n=3$. Соответствующие фундаментальные решения выражаются формулами (см. § 11.9)

$$E(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad \bar{E}(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}.$$

В дальнейшем считаем $k > 0$.

1. Условия излучения Зоммерфельда. Как было показано в § 28.2, решение уравнения Пуассона во всем пространстве единственно в классе (обобщенных) функций, обращающихся в нуль на бесконечности. Для уравнения Гельмгольца это утверждение уже не имеет места, поскольку соответствующее однородное уравнение

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (2)$$

имеет в R^3 ненулевое решение

$$\operatorname{Im} E(x) = -\frac{\sin k|x|}{4\pi|x|},$$

обращающееся в 0 на бесконечности.

Чтобы выделить класс единственности решения для уравнения Гельмгольца в неограниченных областях, являющихся внешностью ограниченных областей, нужно потребовать дополнительных ограничений на поведение решения на бесконечности. Такими ограничениями являются

условия излучения Зоммерфельда (см. § 2.3):

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - iku(x) = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (3)$$

или

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} + iku(x) = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (3')$$

В дальнейшем (см. § 30.5) будет выяснен физический смысл условий излучения: условия (3) соответствуют рассеянным волнам (уходящим в бесконечность), а условия (3') — падающим волнам (приходящим из бесконечности). Нетрудно проверить, что фундаментальные решения $E(x)$ и $\bar{E}(x)$ удовлетворяют условиям излучения (3) и (3') соответственно. Заметим, что для гармонических функций ($k=0$) условия излучения вытекают только из одного требования: $u(\infty)=0$ (см. § 24.10). С другой стороны, можно показать*, что при $k>0$ всякое решение однородного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее второму из условий излучения (3) или (3'), удовлетворяет и первому условию:

$$u(x) = O(|x|^{-1}).$$

2. Однородное уравнение Гельмгольца. Решения однородного уравнения Гельмгольца (2) обладают свойствами, аналогичными свойствам гармонических функций. Отметим некоторые из них.

а) Если функция $u \in C(G)$ удовлетворяет в области G уравнению (2) в обобщенном смысле, то $u \in C^\infty(G)$.

Это утверждение доказывается так же, как и для гармонических функций (см. § 24.7).

б) Пусть граница S области G — достаточно гладкая поверхность (в смысле § 28.2). Если функция $u \in C(G)$ удовлетворяет в области G уравнению (2) и имеет правильную нормальную производную на S , то справедливы формулы

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right] dS_y, \quad (4)$$

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \right] dS_y. \quad (4')$$

* См. И. Н. Векуа [2].

Доказательство этих формул аналогично доказательству формулы Грина (5) § 24.1 для гармонических функций.

с) Если обобщенная функция u из $\mathcal{S}'$ удовлетворяет во всем пространстве однородному уравнению Гельмгольца, то $u \in \mathcal{D}_M$.

Действительно, применяя к уравнению (2) преобразование Фурье, получим $(-|\xi|^2 + k^2)F[u] = 0$, откуда следует, что $F[u] = 0$ при $|\xi| \neq k$, т. е. $F[u]$ — финитная обобщенная функция. Но тогда, по теореме § 9.4,

$$u \in F^{-1}[F[u]] \in \mathcal{D}_M.$$

d) Будем говорить, что обобщенная функция $u(x)$ удовлетворяет условиям излучения (3) или (3'), если она — класса C^1 вне некоторого шара и удовлетворяет условиям (3) или (3').

Если обобщенная функция u удовлетворяет во всем пространстве R^3 однородному уравнению Гельмгольца и условиям излучения (3) или (3'), то $u(x) = 0$, $x \in R^3$.

Действительно, пусть решение u уравнения (2) удовлетворяет условиям (3). Тогда $u \in \mathcal{S}'$ и, в силу с), $u \in C^\infty(R^3)$. Применяя формулу (4) к шару U_R произвольного радиуса R , при $|x| < R$ получаем

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_R} \left[\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial |y|} - u(y) \frac{\partial}{\partial |y|} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right] dS_y = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_R} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \left[\frac{\partial u(y)}{\partial |y|} - iku(y) + \right. \\ &\quad \left. + iku(y) \left(1 - \frac{R-|x|\cos\gamma}{|x-y|} \right) + u(y) \frac{R-|x|\cos\gamma}{|x-y|^2} \right] dS_y. \end{aligned}$$

Принимая во внимание условия (3)

$$|u(y)| < \frac{C}{R}, \quad \left| \frac{\partial u(y)}{\partial |y|} - iku(y) \right| < \frac{\eta(R)}{R}, \quad |y| = R,$$

где $\eta(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, и неравенства

$$R - |x| \leq |y - x| \leq R + |x|, \quad |x| < R, \quad |y| = R,$$

оценим последний интеграл при больших R :

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{S_R} \frac{1}{R-|x|} \left[\frac{\eta(R)}{R} + \frac{kC}{R(R-|x|)} (|x-y| - R + |x|) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C(R+|x|)}{R(R-|x|)^2} \right] dS_y \leq \frac{R}{R-|x|} \left[\frac{\eta(R)}{R} + \frac{2kC|x|}{R-|x|} + \right. \\ &\quad \left. + C \frac{R+|x|}{(R-|x|)^2} \right], \quad |x| < R. \end{aligned}$$

Устремляя в правой части полученного неравенства R к ∞ , заключаем: $u(x) = 0$, что и требовалось установить. Аналогично рассматривается и случай условий (3').

Замечание. Справедливое более общее утверждение*: если граница S области G — достаточно гладкая поверхность, функция $u \in C(\bar{G}_1)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца в области $G_1 = R^3 \setminus \bar{G}$, имеет правильную нормальную производную на S , удовлетворяет условиям излучения (3) или (3') и граничным условиям $u|_S = 0$ или $\frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0$, то $u(x) = 0$, $x \in G_1$.

3. Потенциалы. Пусть ρ — обобщенная функция. Свертки

$$V = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} * \rho = -4\pi \mathcal{E} * \rho, \quad \mathcal{V} = \frac{e^{-ik|x|}}{|x|} * \rho = -4\pi \mathcal{E} * \rho$$

являются аналогами ньютоновых потенциалов (см. § 27).

Если ρ финитная, то эти потенциалы принадлежат $\mathcal{S}'$ (см. § 8.6) и удовлетворяют уравнению Гельмгольца (см. § 11.3)

$$\Delta u + k^2 u = -4\pi \rho,$$

Таким образом, решения уравнения Гельмгольца (1) существуют в $\mathcal{S}'$ для любой финитной обобщенной функции f и представляются потенциалами

$$u = -\mathcal{E} * f, \quad v = -\mathcal{E} * f. \quad (5)$$

При этом решение единственно в классе обобщенных функций, удовлетворяющих условиям излучения (3) или (3') (см. § 30.2, d)).

* См. И. Н. Векуа [2], В. Н. Смирнов [2], гл. IV, § 2.

Если $\rho \in C(\bar{G})$ и $\rho(x) = 0$, $x \in G_1 = R^3 \setminus \bar{G}$, то потенциалы V и $\bar{V}$ выражаются интегралами

$$V(x) = \int_G \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \rho(y) dy, \quad \bar{V}(x) = \int_G \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \rho(y) dy.$$

Эти потенциалы принадлежат классу $C^1(R^3) \cap C^\infty(G_1)$, удовлетворяют в области G_1 однородному уравнению (2) и условиям (3) и (3) соответственно.

Это утверждение доказывается так же, как и для объемного ньютонова потенциала (см. § 27.1). В проверке нуждается лишь второе из условий излучения. Считаем $G \subset U_R$, $|x| > R$, и, следовательно,

$$|x| - R \leq |x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y| \leq |x| + R \quad (6)$$

при всех $y \in G$. Тогда (ср. § 30.2, d))

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial |x|} - ikV(x) &= \int_G \rho(y) \times \\ &\times \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|^2} \left[\frac{|x| - |y| \cos \varphi}{|x-y|} + ik(|x| - |y| \cos \varphi - |x-y|) \right] dy, \end{aligned}$$

и потому, в силу неравенств (6),

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial V(x)}{\partial |x|} - ikV(x) \right| &\leq \int_G \frac{|\rho(y)|}{|x-y|^2} \left(\frac{|x| + |y|}{|x-y|} + k|y| + k||x| - |x-y|| \right) dy \leq \\ &\leq \frac{1}{(|x| - R)^2} \left(\frac{|x| + R}{|x| - R} + 2kR \right) \int_G |\rho(y)| dy = o(|x|^{-1}). \end{aligned}$$

Аналогично рассматривается и потенциал $\bar{V}$.

Если $\rho = \mu \delta_S$ или $\rho = -\frac{\partial}{\partial n}(\nu \delta_S)$, где μ и $\nu \in C(S)$, то соответствующие потенциалы V и $\bar{V}$ представляют собой аналоги поверхностных потенциалов простого и двойного слоя и выражаются интегралами:

$$V^{(0)}(x) = \int_S \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \mu(y) dS_y, \quad \bar{V}^{(0)}(x) = \int_S \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \mu(y) dS_y,$$

$$V^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dS_y,$$

$$\bar{V}^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} dS_y.$$

Свойства потенциалов $V^{(0)}$, $\bar{V}^{(0)}$, $V^{(1)}$ и $\bar{V}^{(1)}$ аналогичны свойствам соответствующих ньютоновых потенциалов (см. § 27). Вне поверхности S эти потенциалы бесконечно дифференцируемы, удовлетворяют однородному уравнению (2) и условиям излучения (3) или (3) соответственно, причем $V^{(0)}$ и $\bar{V}^{(0)} \in C(R^3)$. Если S — поверхность Липшица, то потенциалы $V^{(0)}$ и $\bar{V}^{(0)}$ имеют правильную нормальную производную на S извне и изнутри S и эти производные равны соответственно

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n} \right)_\pm(x) = \mp 2\pi\mu(x) + \int_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dS_y, \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{V}^{(0)}}{\partial n} \right)_\pm(x) = \mp 2\pi\mu(x) + \int_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} dS_y, \quad (7)$$

потенциалами двойного слоя $V^{(1)}$ и $\bar{V}^{(1)}$ принадлежат классу $C(\bar{G}) \cap C(\bar{G}_1) \cap C(S)$, и их предельные значения на S извне и изнутри S равны соответственно

$$V_\pm^{(1)}(x) = \pm 2\pi\nu(x) + \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dS_y, \quad (8)$$

$$\bar{V}_\pm^{(1)}(x) = \pm 2\pi\nu(x) + \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} dS_y. \quad (8)$$

4. Принцип предельного поглощения. Добавим к левой части уравнения Гельмгольца член $i\epsilon u$:

$$\Delta u_\epsilon + (k^2 + i\epsilon) u_\epsilon = -f(x). \quad (9)$$

При $\epsilon \neq 0$ для любой финитной обобщенной функции f уравнение (9) имеет единственное решение в классе $\mathcal{S}'$ и это решение выражается сверткой

$$u_\epsilon = \frac{1}{4\pi|x|} e^{i\sqrt{k^2 + i\epsilon}|x|} * f. \quad (10)$$

Действительно, свертка (10) существует в $\mathcal{S}'$ (см. § 8.6) и удовлетворяет уравнению (9), ибо функция

$$-\frac{1}{4\pi|x|} e^{i\sqrt{k^2 + i\epsilon}|x|}$$

есть соответствующее фундаментальное решение (см. § 11.9). Единственность решения уравнения (9) в классе $\mathcal{S}'$

вытекает из единственности решения однородного уравнения

$$\Delta u + (k^2 + i\epsilon)u = 0,$$

т. е. уравнения

$$(-|\xi|^2 + k^2 + i\epsilon)F[u] = 0.$$

Пусть $f \in C(\bar{G})$, $f(x) = 0$, $x \in G_1$. В этом случае решение (10) уравнения (9) записывается в виде интеграла

$$u_\epsilon(x) = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{e^{i\sqrt{k^2 + i\epsilon}|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy. \quad (11)$$

Переходя в формуле (11) к пределу при $\epsilon \rightarrow +0$ или $\epsilon \rightarrow -0$ и полагая $\sqrt{k^2 \pm i0} = \pm k$, получим, в силу (5), решения u или $\bar{u}$ уравнения (1), удовлетворяющие условиям (3) или (3) соответственно:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} u_\epsilon(x) = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy = u(x),$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow -0} u_\epsilon(x) = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy = \bar{u}(x).$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение, называемое *принципом предельного поглощения*: решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3) или (3) есть (равномерный по x) предел единственного решения уравнения (9) при $\epsilon \rightarrow \pm 0$ соответственно.

Принцип предельного поглощения позволяет выделить единственное решение уравнения Гельмгольца, не заботясь о его поведении на бесконечности: при этом полученное решение автоматически будет удовлетворять условиям излучения (3) или (3).

5. Принцип предельной амплитуды. Этот принцип состоит в том, что решения u или $\bar{u}$ уравнения (1), удовлетворяющие условиям (3) или (3), являются соответственно пределами

$$u(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{ikt} v_+(x, t), \quad (12)$$

$$\bar{u}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-ikt} v_-(x, t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{ikt} v_-(x, -t), \quad (12')$$

где $v_\pm(x, t)$ — решение (обобщенной) задачи Коши для волнового уравнения с правой частью $\delta(t) e^{\pm ikt} f(x)$ и с нулевыми начальными данными:

$$\square v_\pm = \delta(t) e^{\pm ikt} f(x), \quad v_\pm(x, t) = 0, \quad t < 0. \quad (13)$$

Действительно, пусть функция $f \in C(\bar{G})$, $f(x) = 0$, $x \in G_1$. Тогда единственное (обобщенное) решение v задачи Коши (13) выражается с помощью волнового потенциала (см. § 13)

$$v_\pm(x, t) = \frac{e^{\pm ikt}}{4\pi} \int_{G \cap \Sigma_t} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy. \quad (14)$$

Пусть $G \subset U_R$. Тогда $|x-y| \leq |x| + R$ и, следовательно, $|x-y| \leq t$ при всех $y \in G$, если $t \geq |x| + R$ (рис. 100). Поэтому формула (14) в области $t \geq |x| + R$ принимает вид

$$v_\pm(x, t) = \frac{e^{\pm ikt}}{4\pi} \int_G \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy,$$

т. е., в силу (5),

$$v_\pm(x, t) = e^{\pm ikt} u(x),$$

откуда и вытекает предельное соотношение (12) для $u(x)$. Аналогично рассматривается и случай решения $\bar{u}(x)$.

Таким образом, решение уравнения Гельмгольца (1), удовлетворяющее условиям излучения (3) или (3), можно рассматривать как амплитуду установившегося колебания, полученную с помощью предельного перехода из неустановившихся колебаний, вызванных периодическим внешним возмущением с частотой k и амплитудой $f(x)$. При этом предельная амплитуда $u(x)$ соответствует рассеянной волне, а амплитуда $\bar{u}(x)$ — падающей волне.

6. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца. Пусть граница S области G — достаточно гладкая поверхность

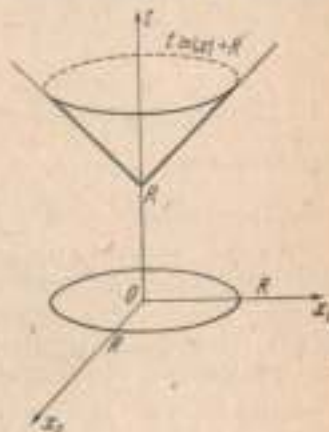


Рис. 100.

(в смысле § 28.2), а $G_1 = R^3 \setminus G$ — область. Задачи Дирихле и Неймана (внутренние и внешние) для уравнения Гельмгольца ставятся так же, как и для уравнения Пуассона (см. § 28.1). При этом для внешних задач требуется, чтобы на бесконечности решение удовлетворяло условиям излучения (3) или (3').

Если $\lambda = k^2$ не есть собственное значение внутренней задачи Дирихле или Неймана для уравнения Лапласа, то решение соответствующей внутренней краевой задачи для уравнения Гельмгольца единственно.

Отметим, что множество исключительных значений k , при которых нарушается единственность решения внутренних краевых задач, счетно (см. §§ 21.4 и 29.6).

Решения поставленных краевых задач для однородного уравнения Гельмгольца строятся методом теории потенциалов, подобно тому как это делалось в § 28 для уравнения Лапласа.

Решение задачи Дирихле (внутренней и внешней, удовлетворяющей условию (3)) ищется в виде потенциала двойного слоя $V^{(1)}$ с неизвестной плотностью $v \in C(S)$. В силу (8) функции v должна удовлетворять интегральному уравнению

$$v(x) = \lambda \int_S \mathcal{K}(x, y) v(y) dS_y + f(x), \quad x \in S, \quad (15)$$

где

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = (1 - ik|x-y|) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} e^{ik|x-y|}.$$

При этом $\lambda = 1$ и $f = -\frac{u_1}{2\pi}$ соответствуют внутренней задаче Дирихле и $\lambda = -1$ и $f = \frac{u_1}{2\pi}$ — внешней.

Решение задачи Неймана (внутренней и внешней, удовлетворяющей условию (3')) ищется в виде потенциала простого слоя $V^{(0)}$ с неизвестной плотностью $\mu \in C(S)$. В силу (7) функция μ должна удовлетворять интегральному уравнению, сопряженному к уравнению (15),

$$\mu(x) = \lambda \int_S \mathcal{K}^*(x, y) \mu(y) dS_y + g(x), \quad x \in S, \quad (15^*)$$

причем $\lambda = -1$ и $g = -\frac{u_1}{2\pi}$ соответствуют внутренней задаче

Неймана и $\lambda = 1$ и $g = \frac{u_1}{2\pi}$ — внешней.

Применяя теоремы Фредгольма к интегральным уравнениям (15) и (15*) и пользуясь теоремой единственности (см. § 30.2, замечание), как и для уравнения Лапласа (см. § 28.4), получим следующую теорему.

Теорема. Если $\lambda = k^2$ не есть собственное значение внутренних задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа, то краевые задачи (внутренние и внешние) для однородного уравнения Гельмгольца однозначно разрешимы в виде соответствующих потенциалов при любых непрерывных граничных значениях*).

Замечание. К крайним задачам для уравнения Гельмгольца приводят задачи на рассеяние (дифракцию) (см. § 2.3). Различные применения рассмотрены в гл. VII книги А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [1].

7. Внешние краевые задачи для шара. Рассмотрим внешнюю краевую задачу для шара радиуса R

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad u|_{S_R} = u_0(\theta, \varphi),$$

$$u = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial r} - ik u = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Как показано в § 30.6, эта задача имеет единственное решение. Построим его. Для этого разложим функции $u(r, \theta, \varphi)$ и $u_0(\theta, \varphi)$ в ряды по сферическим функциям (см. § 25.6):

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \mathcal{R}_{lm}(r) Y_{lm}^m(\theta, \varphi),$$

$$u_0(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}^m(\theta, \varphi).$$

Неизвестные коэффициенты разложения $\mathcal{R}_{lm}$ должны удовлетворять уравнению (см. § 26.2, с))

$$\mathcal{R}_{lm}'' + \frac{2}{r} \mathcal{R}_{lm}' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \mathcal{R}_{lm} = 0, \quad (16)$$

граничному условию

$$\mathcal{R}_{lm}(R) = a_{lm} \quad (17)$$

*) Разрешимость внешних краевых задач имеет место при всех значениях параметра k^2 (см. Н. Н. Векуа [2]).

и условиям излучения

$$\mathcal{R}_{lm}(r) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \mathcal{R}'_{lm}(r) - ik\mathcal{R}_{lm}(r) = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Общее решение уравнения (16) имеет вид

$$\frac{c_1}{Vr} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) + \frac{c_2}{Vr} H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr), \quad (19)$$

где $H_{\nu}^{(j)}$ — функция Ханкеля (§ 23.8). Учитывая асимптотические формулы (38) § 23.8 для этих функций, видим, что условиям (18) удовлетворяет лишь функция $\frac{1}{Vr} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr)$,

так что $c_2 = 0$. Чтобы удовлетворить условию (17), достаточно положить $c_1 = \frac{VR a_{lm}}{H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(kR)}$. Подставляя найденные

значения c_1 и c_2 в (19), получим искомое решение u в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr)}{H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(kR)} Y_l^m(\theta, \varphi).$$

Аналогично рассматривается и внешняя краевая задача II рода.

8. Уравнения. а) Пусть ρ — финитная обобщенная функция. Доказать, что потенциалы V и $\bar{V}$ с плотностью ρ удовлетворяют условиям излучения (3) и (3') соответственно.

б) Пусть функция $u(x)$ класса $C(\bar{U}_R)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца в шаре U_R . Доказать аналог теоремы о среднем арифметическом:

$$u(0) = \frac{kR}{4\pi \sin kR} \int_{S_1} u(Rs) ds \quad (kR < \pi).$$

в) Пусть k^2 лежит в плоскости комплексного переменного z с разрезом: $\text{Im } z = 0, \text{Re } z \geq 0$. Доказать, что решение уравнения Гельмгольца единственно в классе $\mathcal{S}'$.

г) Показать, что в n -мерном случае условия излучения Зоммерфельда

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{\frac{1-n}{2}}}\right), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} + ik u(x) = o\left(\frac{1}{|x|^{\frac{1-n}{2}}}\right), \quad |x| \rightarrow \infty$$

обеспечивают единственность решения уравнения Гельмгольца.

е) Построить теорию потенциала для уравнения Гельмгольца при $k^2 < 0$.

г) Доказать: если $f \in \mathcal{D}'(R^n)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца в области G , то $f \in C^\infty(\bar{G})$, k^2 — любое (комплексное) число.

д) Доказать: если функция $u(x)$ гармонична в области G_1 и $u(\infty) = 0$, то она удовлетворяет условиям излучения (при $k=0$).

е) Распространить формулы (4) и (4') на функции $u \in C(\bar{G}_1)$, удовлетворяющие в области G_1 уравнению (2), имеющие правильную нормальную производную на S и удовлетворяющие условиям излучения (3) и (3') соответственно.

§ 31. Краевые задачи

для уравнения Лапласа на плоскости

Для точки (x, y) плоскости R^2 удобно употреблять обозначения $z = x + iy$ или $\bar{z} = x - iy$. Считаем: G — ограниченная область в R^2 с кусочно-гладкой границей S .

Большинство результатов, полученных в §§ 27, 28 и 29 для краевых задач трех переменных, переносится и на двумерные краевые задачи с заменой фундаментального решения $\mathcal{E}_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$ на фундаментальное решение $\mathcal{E}_2(z) = \frac{1}{2\pi} \ln|z|$. Однако в постановках и решениях

этих задач возникают некоторые различия, связанные с особенностью поведения фундаментального решения $\mathcal{E}_2$ на бесконечности.

1. Постановка и единственность решения основных краевых задач. Основные краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости ставятся так же, как и соответствующие задачи в пространстве (см. § 28.1), за исключением того, что для внешних задач от решения требуется лишь ограниченность при $|z| \rightarrow \infty$ (а не обращение в 0). Предполагаем, что $G_1 = R^2 \setminus \bar{G}$ — область.

Из результатов §§ 24.5 и 24.10 следует: если функции $u(z)$ — гармоническая в G_1 , непрерывная и ограниченная на G_1 , то

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} u(z) = \alpha, \quad (1)$$

$$\text{grad } u(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (2)$$

$$|u(z)| \leq \max_{z \in S} |u(z)|, \quad z \in G_1. \quad (3)$$

Линия Ляпунова и достаточно гладкая линия определяются так же, как и в случае пространства (см. §§ 27.4 и 28.2); неравенство (26) § 27.4 в этом случае принимает вид

$$\int_S \frac{|\cos \varphi_{z\zeta}|}{|z' - \zeta|} dS_\zeta \leq K, \quad z' \in R^2.$$

Справедливы следующие теоремы единственности для основных краевых задач для уравнения Лапласа.

Решение внутренней или внешней задачи Дирихле единственно и непрерывно зависит от граничных данных u_0 или u_0^ соответственно.*

Если S — достаточно гладкая линия, то решение внутренней или внешней задачи Неймана определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной, причем

$$\int_S u_i(z) dS = 0 \quad \text{или} \quad \int_S u_i^*(z) dS = 0 \quad (4)$$

— необходимое условие разрешимости соответствующей задачи.

Доказательство этих утверждений подобно доказательствам теорем 2, 3 и 4 § 28.2. Некоторое отличие возникает в связи с появлением необходимого условия разрешимости (7) внешней задачи Неймана. Докажем это. Пусть $u(z)$ — решение внешней задачи Неймана с граничной функцией u_0^* на S . Так как u гармонична в G_+ и имеет на S правильную нормальную производную, равную $-u_0^*$, то, применяя формулу (8) § 21.2 при $\sigma = 1$ к области Q_R (см. рис. 77), получим

$$-\int_S u_0^*(z) dS + \int_{S_R} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $R \rightarrow \infty$ и пользуясь оценкой (2), получаем условие (4).

2. **Логарифмический потенциал.** Логарифмический потенциал определяется как свертка обобщенной функции ρ с функцией $-\ln|z|$ (см. § 7.10):

$$V = -\ln|z| * \rho = -2\pi \delta_z * \rho. \quad (5)$$

Логарифмический потенциал V удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V = -2\pi \rho. \quad (6)$$

Частными случаями логарифмического потенциала являются: потенциал площади

$$V(z) = \int_S \rho(\zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} d\zeta d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (7)$$

потенциал простого слоя

$$V^{(0)}(z) = \ln \frac{1}{|z|} * \mu \delta_S = \int_S \mu(\zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} dS_\zeta \quad (8)$$

и потенциал двойного слоя

$$V^{(1)}(z) = -\ln \frac{1}{|z|} * \frac{\partial}{\partial n} (v \delta_S) = \\ = \int_S v(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|z - \zeta|} dS_\zeta = \int_S v(\zeta) \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z - \zeta|} dS_\zeta. \quad (9)$$

Эти потенциалы обладают следующими свойствами: Если $\rho \in C(G)$, то потенциал площади $V \in C^1(R^2)$, гармоничен в G_+ и при $|z| \rightarrow \infty$

$$V(z) = \int_S \rho(\zeta) d\zeta d\eta \ln \frac{1}{|z|} + O\left(\frac{1}{|z|}\right). \quad (10)$$

Если, кроме того, $\rho \in C^1(G)$, то $V \in C^2(G)$.

Если $\mu \in C(S)$, то потенциал простого слоя $V^{(0)} \in C(R^2)$, гармоничен вне S и при $|z| \rightarrow \infty$

$$V^{(0)}(z) = \int_S \mu(\zeta) dS \ln \frac{1}{|z|} + O\left(\frac{1}{|z|}\right). \quad (11)$$

Если S — линия Ляпунова, то потенциал $V^{(0)}(z)$ имеет правильные нормальные производные $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_+$ и $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_-$ на S извне и изнутри S , причем

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_+(z) = -\pi \mu(z) + \frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}(z) = \\ = -\pi \mu(z) + \int_S \mu(\zeta) \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z - \zeta|} dS_\zeta, \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_-(z) = \pi \mu(z) + \frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}(z) = \\ = \pi \mu(z) + \int_S \mu(\zeta) \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z - \zeta|} dS_\zeta. \quad (12')$$

Если $v \in C(S)$, то потенциал двойного слоя $V^{(1)}$ гармоничен вне S и

$$V^{(1)}(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (13)$$

Если S — линия Ляпунова, то

$$\int_S \frac{\cos \varphi \zeta}{|z - \zeta|} dS_\zeta = \begin{cases} -2\pi, & x \in G, \\ -\pi, & x \in S, \\ 0, & x \in G_1. \end{cases} \quad (14)$$

Потенциал $V^{(1)}(z)$ принадлежит классам $C(\bar{G})$, $C(G_1)$ и $C(S)$, и его предельные значения V^+ и V^- на S извне и изнутри S выражаются формулами

$$V^+(z) = \pi v(z) + V^{(1)}(z) = \pi v(z) + \int_S v(\zeta) \frac{\cos \varphi \zeta}{|z - \zeta|} dS_\zeta, \quad (15)$$

$$V^-(z) = -\pi v(z) + V^{(1)}(z) = -\pi v(z) + \int_S v(\zeta) \frac{\cos \varphi \zeta}{|z - \zeta|} dS_\zeta. \quad (15')$$

Доказательство этих свойств аналогично соответствующим доказательствам для трехмерного случая (см. § 27). Некоторое различие имеется лишь при доказательстве оценок (10) и (11). Докажем оценку (10). Оценка (11) доказывается аналогично. Пользуясь (7), имеем

$$V(z) - \int_G \rho(\zeta) d\zeta \ln \frac{1}{|z|} = \int_G \rho(\zeta) \ln \frac{|z|}{|z - \zeta|} d\zeta d\eta. \quad (16)$$

Пусть G лежит в шаре U_R и $|z| > 2R$. Тогда при всех $\zeta \in G$ справедливы неравенства

$$|z| - R \leq |z - \zeta| \leq |z| + R, \\ -\frac{2R}{|z|} \leq \ln \frac{|z|}{|z - \zeta|} \leq \ln \frac{|z|}{|z - \zeta|} \leq \ln \frac{|z|}{|z| - R} \leq \frac{2R}{|z|}, \quad (17)$$

откуда и из (16) следует оценка (10):

$$\left| V(z) - \int_G \rho(\zeta) d\zeta \ln \frac{1}{|z|} \right| \leq \int_G |\rho(\zeta)| \left| \ln \frac{|z|}{|z - \zeta|} \right| d\zeta d\eta \leq \\ \leq \frac{2R}{|z|} \int_G |\rho(\zeta)| d\zeta d\eta = \frac{C}{|z|}.$$

Физический смысл фундаментального решения $\mathcal{E}_2(z)$. Вычислим электростатический потенциал $V(z, x_2)$, создаваемый зарядами, лежащими на оси x_2 , с линейной плотностью $-\frac{1}{4\pi}$, т. е. с распределением $\rho(z, x_2) = -\frac{1}{4\pi} \delta(z) \cdot 1(x_2)$. Метод спуска по переменной x_2 , изложенный в § 11.4, здесь не проходит. Несколько модифицируя этот метод, определим потенциал $V(z, x_2)$ как предел при $N \rightarrow \infty$ потенциалов $V_N(z, x_2)$, создаваемых зарядами, лежащими на отрезке $|x_2| \leq N$ оси x_2 , с линейной плотностью $-\frac{1}{4\pi}$, т. е. с распределением

$$\rho_N(z, x_2) = -\frac{1}{4\pi} \delta(z) \cdot \theta(N - |x_2|). \quad (18)$$

Этот потенциал есть свертка ρ_N с $-4\pi \mathcal{E}_2$ (см. § 27) плюс произвольная постоянная c_N).

$$V_N(z, x_2) = -\frac{1}{V|z|^2 + x_2^2} \left[\frac{\delta(z)}{4\pi} \cdot \theta(N - |x_2|) \right] + c_N = \\ = -\frac{1}{4\pi} \int_{-N}^N \frac{dx'_2}{V|z|^2 + (x_2 - x'_2)^2} + c_N = \\ = -\frac{1}{4\pi} \ln [x_2 - x'_2 + V|z|^2 + (x_2 - x'_2)^2] \Big|_{-N}^N + c_N = \\ = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{x_2 - N + V|z|^2 + (x_2 - N)^2}{x_2 + N + V|z|^2 + (x_2 + N)^2} + c_N. \quad (19)$$

Чтобы обеспечить существование конечного предела V_N при $N \rightarrow \infty$, положим в (19) $c_N = \frac{1}{2\pi} \ln(2N)$. В результате получим

$$V(z, x_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} V_N(z, x_2) = \frac{1}{2\pi} \ln |z| \cdot 1(x_2).$$

Таким образом, фундаментальное решение $\mathcal{E}_2(z) = \frac{1}{2\pi} \ln |z|$ есть электростатический потенциал, создаваемый

*) В классе функций, обращающихся в 0 на ∞ , потенциал $U(z, x_2)$ не существует. Поэтому и потенциалы $V_N(z, x_2)$ будем выбирать из более широкого класса функций (в данном случае — ограниченных на ∞).

мый зарядами, лежащими на оси x_2 , с линейной плотностью $-\frac{1}{4\pi}$ (ср. § 11.4).

3. Разрешимость краевых задач. Предположим, что граница S области G — достаточно гладкая линия и $G_1 = R^2 \setminus G$ — область.

Как и в § 28.3, решение внутренней задачи Дирихле ищем в виде потенциала двойного слоя

$$V^{(1)}(z) = \int_S v(\zeta) \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z-\zeta|} dS_\zeta, \quad v \in C(S); \quad (20)$$

решение внешней задачи Дирихле — в виде суммы потенциала двойного слоя $V^{(1)}$ и неизвестной постоянной α ; решение задачи Неймана (внутренней или внешней) — в виде потенциала простого слоя

$$V^{(0)}(z) = \int_S \mu(\zeta) \ln \frac{1}{|z-\zeta|} dS_\zeta, \quad \mu \in C(S). \quad (21)$$

Для неизвестных плотностей v и μ и числа α , в силу формул (12), (12'), (15) и (15'), получаем интегральные уравнения

$$v(z) = \lambda \int_S \mathcal{K}(z, \zeta) v(\zeta) dS_\zeta + f(z), \quad z \in S, \quad (22)$$

$$\mu(z) = \lambda \int_S \mathcal{K}^*(z, \zeta) \mu(\zeta) dS_\zeta + g(z), \quad z \in S, \quad (22^*)$$

с полярными (союзными друг другу) ядрами

$$\mathcal{K}(z, \zeta) = \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{\pi |z-\zeta|}, \quad \mathcal{K}^*(z, \zeta) = \frac{\cos \varphi_{\zeta z}}{\pi |z-\zeta|}. \quad (23)$$

При этом $\lambda = 1$, $f = -\frac{u_1^-}{\pi}$ соответствуют внутренней и $\lambda = -1$, $f = \frac{u_1^- - \alpha}{\pi}$ — внешней задачам Дирихле; $\lambda = -1$, $g = \frac{u_1^-}{\pi}$ — внутренней и $\lambda = 1$, $g = -\frac{u_1^-}{\pi}$ — внешней задачам Неймана.

Пусть μ — непрерывное решение уравнения (22*) при $\lambda = 1$ и $g = -\frac{u_1^-}{\pi}$. Интегрируя это уравнение по кривой S

и пользуясь (23) и (14), получаем

$$\begin{aligned} \int_S \mu(z) dS &= \frac{1}{\pi} \int_S \int_S \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z-\zeta|} \mu(\zeta) dS_\zeta dS_z - \frac{1}{\pi} \int_S u_1^-(z) dS = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_S \mu(\zeta) \int_S \frac{\cos \varphi_{\zeta z}}{|\zeta-z|} dS_z dS_\zeta - \frac{1}{\pi} \int_S u_1^-(z) dS = \\ &= - \int_S \mu(\zeta) dS - \frac{1}{\pi} \int_S u_1^-(z) dS, \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_S \mu(z) dS = - \frac{1}{2\pi} \int_S u_1^-(z) dS. \quad (24)$$

Докажем, что $\lambda = 1$ не есть характеристическое число ядра $\mathcal{K}^*(z, \zeta)$. Пусть, напротив, $\lambda = 1$ — характеристическое число этого ядра и μ^* — соответствующая ему обобщенная функция,

$$\mu^*(z) = \int_S \mathcal{K}^*(z, \zeta) \mu^*(\zeta) dS_\zeta = \frac{1}{\pi} \int_S \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z-\zeta|} \mu^*(\zeta) dS_\zeta, \quad z \in S. \quad (25)$$

Тогда $\mu^* \in C(S)$ и, в соответствии с (24) (при $u_1^- = 0$)

$$\int_S \mu^*(z) dS = 0. \quad (26)$$

Построим теперь потенциал простого слоя $V^{(0)}$ с плотностью μ^* . Функция $V^{(0)} \in C(R^2)$ гармонична вне S и, в силу (26) и (11), $V^{(0)}(\infty) = 0$. Далее, в силу (12) и (25) ее правильная нормальная производная на S извне равна 0. Отсюда, пользуясь единственностью решения внешней задачи Неймана и внутренней задачи Дирихле (см. § 31.1), как и в § 28.4, заключаем, что $V^{(0)}(z) \equiv 0$, $z \in R^2$, и, следовательно, $\mu^*(z) \equiv 0$, $z \in S$, что противоречиво.

По теоремам Фредгольма уравнения (22) и (22*) при $\lambda = 1$ однозначно разрешимы в $C(S)$ при любых непрерывных f и g . При этом для решения μ уравнения (22*) при $\lambda = 1$ и $g = -\frac{u_1^-}{\pi}$ справедливо соотношение (24). Поэтому, если выполнено условие (4), то, в силу (11), $V^{(0)}(\infty) = 0$. Итак, доказана

Теорема 1. Внутренняя задача Дирихле разрешима при любой $u_0^* \in C(S)$. Внешняя задача Неймана разрешима при любой $u_1^* \in C(S)$, удовлетворяющей условию разрешимости (4).

Из формулы (14) вытекает, что $\lambda = -1$ есть характеристическое число ядра $\mathcal{K}(z, \zeta)$ и $v \equiv 1$ — соответствующая ему собственная функция. По второй теореме Фредгольма $\lambda = -1$ — характеристическое число сопряженного ядра $\mathcal{K}^*(z, \zeta)$. Пусть μ_0 — соответствующая собственная функция,

$$\begin{aligned} \mu_0(z) &= - \int_S \mathcal{K}^*(z, \zeta) \mu_0(\zeta) dS_\zeta = \\ &= - \frac{1}{\pi} \int_S \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z - \zeta|} \mu_0(\zeta) dS_\zeta, \quad z \in S. \end{aligned} \quad (27)$$

Мы знаем, что $\mu_0 \in C(S)$ (см. § 18.5). Докажем, что

$$\int_S \mu_0(\zeta) dS = C \neq 0. \quad (28)$$

Пусть, напротив, $C = 0$. Составим потенциал простого слоя с плотностью μ_0 (потенциал Робена):

$$V^{(0)}(z) = \int_S \mu_0(\zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} dS_\zeta. \quad (29)$$

Функция $V^{(0)} \in C(R^2)$ гармонична вне S и, в силу условия $C = 0$, $V^{(0)}(\infty) = 0$ (см. § 31.2). Далее, из (12') и (27) вытекает, что ее правильная нормальная производная на S изнутри равна нулю. Отсюда, так как решение внутренней задачи Неймана единственно с точностью до аддитивной постоянной, заключаем, что $V^{(0)}(z) = \text{const} = C_1$, $z \in G$. Но тогда, в силу единственности решения внешней задачи Дирихле (см. § 30.1), $V^{(0)}(z) = C_1$, $z \in G_1$, и, следовательно, $\mu_0(z) = 0$, $z \in S$, что невозможно.

Таким образом, $C \neq 0$. Отсюда, рассуждая, как и в § 28.4, заключаем, что $\lambda = -1$ — простое характеристическое число ядра $\mathcal{K}^*(z, \zeta)$ и, стало быть, ядра $\mathcal{K}(z, \zeta)$.

Нормируем собственную функцию μ_0 так, чтобы $C = 1$. По доказанному соответствующий потенциал Робена $V^{(0)}(z) = \text{const}$, $z \in G$.

По третьей теореме Фредгольма интегральные уравнения (22) и (22*) при $\lambda = -1$ разрешимы тогда и только

тогда, когда их свободные члены f и g ортогональны к собственным функциям μ_0 и 1 соответственно. Для внешней задачи Дирихле это условие принимает вид

$$\frac{1}{\pi} \int_S [u_1^*(z) - \alpha] \mu_0(z) dS = 0,$$

т. е., в силу (28) (при $C = 1$), оно всегда может быть удовлетворено за счет надлежащего выбора постоянной α ,

$$\alpha = \int_S u_1^*(z) \mu_0(z) dS. \quad (30)$$

Итак, справедлива следующая

Теорема 2. Внешняя задача Дирихле разрешима при любой $u_0^* \in C(S)$. Внутренняя задача Неймана разрешима при любой $u_1^* \in C(S)$, удовлетворяющей условию разрешимости (4).

4. Решение краевых задач для круга. Для окружности S_R интегральные уравнения (22) и (22*) легко решаются, и это дает возможность построить решения краевых задач для круга U_R в явном виде.

Действительно, в силу соотношения (см. рис. 101)

$$|z|^2 = |z - \zeta|^2 + R^2 + 2R|z - \zeta| \cos \varphi_{z\zeta}, \quad |\zeta| = R, \quad (31)$$

получаем

$$\mathcal{K}(z, \zeta) = \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{\pi |z - \zeta|} = - \frac{1}{2\pi R} = \mathcal{K}^*(z, \zeta), \quad z, \zeta \in S_R.$$

Поэтому интегральные уравнения (22) и (22*) принимают единый вид:

$$v(z) = - \frac{\lambda}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} v(\zeta) dS + f(z), \quad |z| = R. \quad (32)$$

Решая это уравнение (см. § 18.1), получим:

$$v(z) = - \frac{1}{\pi} u_0^*(z) + \frac{1}{4\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0^*(\zeta) dS \quad (33)$$

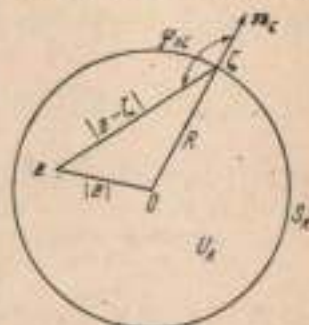


Рис. 101.

при $\lambda = 1$, $f = -\frac{u_0}{\pi}$ (внутренняя задача Дирихле);

$$v(z) = \frac{1}{\pi} u_0^+(z) - \frac{1}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0^+(\zeta) dS, \\ \alpha = \frac{1}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0^+(\zeta) dS \quad (34)$$

при $\lambda = -1$, $f = \frac{u_0^+}{\pi} - \frac{\alpha}{\pi}$ (внешняя задача Дирихле);

$$\mu(z) = \frac{1}{\pi} u_0^+(z), \text{ если } \int_{|\zeta|=R} u_0^+(\zeta) dS = 0 \quad (35)$$

при $\lambda = -1$, $f = \frac{u_0^-}{\pi}$ (внутренняя задача Неймана);

$$\mu(z) = -\frac{1}{\pi} u_0^-(z), \text{ если } \int_{|\zeta|=R} u_0^-(\zeta) dS = 0 \quad (36)$$

при $\lambda = 1$, $f = -\frac{u_0^-}{\pi}$ (внешняя задача Неймана).

Подставляя выражение (33) для плотности $v(z)$ в потенциал двойного слоя (20) и пользуясь формулами (14) и (31), получим решение внутренней задачи Дирихле:

$$u(z) = \int_{|\zeta|=R} \left[-\frac{1}{\pi} u_0^-(\zeta) + \frac{1}{4\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0^-(\zeta') dS \right] \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z-\zeta|} dS = \\ = \frac{1}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0^-(\zeta) \left(-\frac{2R \cos \varphi_{z\zeta}}{|z-\zeta|} + \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{\cos \varphi_{\zeta\zeta'}}{|z-\zeta'|} dS \right) dS = \\ = \frac{1}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0^-(\zeta) \frac{-2R|z-\zeta| \cos \varphi_{z\zeta} - |z-\zeta|^2}{|z-\zeta|^3} dS = \\ = \frac{1}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0^-(\zeta) \frac{R^2 - |z|^2}{|z-\zeta|^3} dS, \\ \text{т. е. это решение представляется формулой (интегралом) Пуассона}$$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0^-(\zeta) \frac{R^2 - |z|^2}{|z-\zeta|^3} dS, \quad |z| < R. \quad (37)$$

Аналогично, подставляя выражения (34) для плотности $v(z)$ и постоянной α в сумму $V^{(1)}(z) + \alpha$, получим

решение внешней задачи Дирихле:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0^+(\zeta) \frac{|z|^2 - R^2}{|z-\zeta|^3} dS, \quad |z| > R. \quad (38)$$

Наконец, подставляя выражения (35) и (36) для плотности $\mu(z)$ в потенциал простого слоя (21), получим соответственно решения внутренней и внешней задач Неймана:

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|=R} u_0^-(\zeta) \ln \frac{1}{|z-\zeta|} dS + C, \quad |z| < R, \quad (39)$$

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|=R} u_0^+(\zeta) \ln |z-\zeta| dS + C, \quad |z| > R. \quad (40)$$

5. Функция Грина задачи Дирихле. Функцией Грина (внутренней) задачи Дирихле для (ограниченной) области G называется функция $\mathcal{G}(z, \zeta)$, обладающая свойствами (ср. с § 29.1): при каждом $\zeta \in G$ представляется в виде

$$\mathcal{G}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z-\zeta|} + g(z, \zeta), \quad (41)$$

где функция $g(z, \zeta)$ — гармоническая в G и непрерывная на $\bar{G}$ по z и удовлетворяет граничному условию

$$\mathcal{G}(z, \zeta)|_{z \in \partial G} = 0. \quad (42)$$

Из принципа максимума вытекает, что функция Грина удовлетворяет оценке

$$0 < \mathcal{G}(z, \zeta) < \frac{1}{2\pi} \ln \frac{D}{|z-\zeta|}, \quad z \in G, \zeta \in G, z \neq \zeta, \quad (43)$$

где D — диаметр области G . Функция Грина $\mathcal{G}(z, \zeta)$ обладает и всеми остальными свойствами, изложенными в § 29.1.

Пусть теперь G — односвязная область, ограниченная кусочно-гладкой кривой S , и $w = w(z)$ — функция, конформно отображающая область G на единичный круг $|\omega| < 1$ (рис. 102). Тогда функция

$$\omega(z, \zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - \overline{w(\zeta)} w(z)} \quad (44)$$

конформно отображает область G на единичный круг $|\omega| < 1$, причем точка $\zeta \in G$ переходит в 0. Поэтому эта

функция при каждом $\zeta \in G$ представляется в виде

$$\omega(z, \zeta) = (z - \zeta) \psi(z, \zeta), \quad (45)$$

где функция $\psi(z, \zeta)$ — аналитическая в области* G , $\psi(z, \zeta) \neq 0$, $z \in G$ и $\psi \in C(\bar{G})$.

Проверим, что функция

$$g(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\omega(z, \zeta)| = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \omega(z, \zeta) \quad (46)$$

есть функция Грина задачи Дирихле для области G .

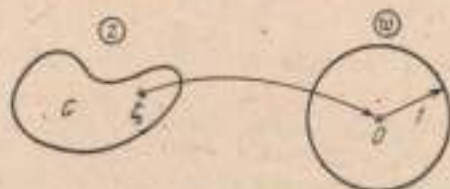


Рис. 102.

Действительно, из (45) вытекает, что функция (46) представляется в виде (41), причем функция

$$g(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\psi(z, \zeta)| = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \psi(z, \zeta),$$

как вещественная часть аналитической функции $\ln \psi(z, \zeta)$, $\psi(z, \zeta) \neq 0$, гармонична в G и непрерывна на G . Далее, в силу равенства $|\omega(z, \zeta)| = 1$, $z \in S$, функция (46) удовлетворяет и условию (42).

Для примера построим функцию Грина для круга $|z| < R$. Функция

$$\omega(z, \zeta) = \frac{R(z - \bar{\zeta})}{R^2 - z\bar{\zeta}}$$

отображает круг $|z| < R$ на единичный круг $|\omega| < 1$, причем точка ζ переходит в 0. Поэтому, в силу (46),

$$g(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R(z - \bar{\zeta})} \right| = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R(z - \bar{\zeta})} \quad (47)$$

есть функция Грина для круга $|z| < R$.

*) См., например, М. А. Енгельсон [1] гл. V и IX.

6. Решение задачи Дирихле для односвязной области. Метод конформных отображений позволяет получить представление для решения задачи Дирихле для любой односвязной области. Это представление является обобщением формулы Пуассона.

Сначала, пользуясь равенством

$$\frac{R^2 - |z|^2}{|z - \bar{\zeta}|^2} = \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}, \quad |\zeta| = R,$$

представим формулу Пуассона (37) в виде

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} u_0(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (48)$$

Пусть функция u_0 непрерывна на границе S односвязной области G . Пусть, далее, функция $z = z(\omega)$ конформно отображает круг $|\omega| < 1$ на область G и $\omega = \omega(z)$ — обратное отображение (рис. 102). Тогда $z \in C(\bar{G})$; предположим, что $\omega \in C^1(\bar{G})$. При этом отображении функция $u_0(z)$ перейдет в функцию $u_0[z(\omega)]$, непрерывную на окружности $|\omega| = 1$. По формуле (48) построим решение задачи Дирихле для круга $|\omega| < 1$ с граничной функцией $u_0[z(\omega)]$:

$$U(\omega) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} u_0[z(\omega)] \frac{\omega + w}{\omega - w} \frac{dw}{w}.$$

Переходя в этой формуле к старым переменным z и ζ , $\omega = \omega(z)$, $w = \omega(\zeta)$, получим искомое решение задачи Дирихле для области G с граничной функцией u_0 :

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_S u_0(\zeta) \frac{\omega(\zeta) + \omega(z)}{\omega(\zeta) - \omega(z)} \frac{\omega'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} d\zeta, \quad z \in G. \quad (49)$$

Замечание. Как известно, вещественная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями. Обратно, если функция $u(z)$ — гармоническая, то, построив сопряженную функцию

$$v(z) = \int \left[-\frac{\partial u(\zeta)}{\partial \eta} d\zeta + \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \xi} d\eta \right] + C, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

получим аналитическую функцию $f(z) = u(z) + iv(z)$, у которой вещественная часть есть функция $u(z)$. Это дает возможность использовать аппарат теории аналитических функций при решении и исследовании краевых задач для гармонических функций на плоскости (см. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат [1]).

7. Упражнения. а) Пользуясь формулой (42) § 6.5 и фундаментальным решением $\frac{1}{\pi z}$ оператора Коши — Римана (см. § 11.10), вывести формулу Коши — Грина: если $u \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$, то справедливо представление

$$\frac{1}{\pi} \int_G \frac{1}{z-\zeta} \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{u(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \begin{cases} u(z), & z \in G; \\ 0, & z \in G_1. \end{cases}$$

б) Пользуясь а), доказать: если $u \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ и удовлетворяет условию Коши — Римана, $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$, $z \in G$, то $u(z)$ — аналитическая функция в области G и справедлива формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{u(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \begin{cases} u(z), & z \in G; \\ 0, & z \in G_1. \end{cases}$$

в) Показать, что потенциал простого слоя для окружности $|z|=R$ с плотностью $\mu=1$ равен

$$V^+(z) = - \int_{|\zeta|=R} \ln|z-\zeta| dS_{\zeta} = \begin{cases} -2\pi R \ln R, & |z| \leq R, \\ -2\pi R \ln|z|, & |z| \geq R. \end{cases}$$

г) Пользуясь в), показать, что логарифмический потенциал площади для круга $|z| < R$ с плотностью $\rho=1$ равен

$$V(z) = \begin{cases} -\pi R^2 \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi}{2} |z|^2, & |z| \leq R, \\ -\pi R^2 \ln|z|, & |z| \geq R. \end{cases}$$

д) Показать, что следующие функции являются функциями Грина задачи Дирихле:

$$\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z-\bar{\zeta}}{z-\zeta} \right| \text{ для полуплоскости } y > 0^*);$$

$$\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{(z-\bar{\zeta}^*)(z-\bar{\zeta})}{(z-\zeta)(z-\zeta^*)} \right| \text{ для полукруга } |z| < R, y > 0;$$

$$\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z^2-\bar{\zeta}^2}{z^2-\zeta^2} \right| \text{ для четверти плоскости } x > 0, y > 0^*);$$

$$\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{e^z-\bar{\zeta}}{e^z-\zeta} \right| \text{ для полосы } 0 < y < \pi^*).$$

*) См. примечание на стр. 428.

г) Показать, что решения задач Дирихле и Неймана для полуплоскости $y > 0$ представляются соответственно формулами

$$\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \frac{d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}, \quad -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi) \ln[(x-\xi)^2+y^2] d\xi + C,$$

если $u_0(\xi) = O(|\xi|^{-1-\epsilon})$, $u_1 = O(|\xi|^{-1-\epsilon})$, $|\xi| \rightarrow \infty$ при любом $\epsilon > 0$.

д) Пусть функция $\varphi(\theta)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье на $[0, 2\pi]$.

$$\varphi(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Доказать, что

$$u(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|z|}{R} \right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

— решение внутренней задачи Дирихле для круга $|z| < R$ с $u_1 = \varphi$;

$$u(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|z|} \right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

— решение внешней задачи Дирихле с $u_1^+ = \varphi$;

$$u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{kR^{k-1}} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + C$$

— решение внутренней задачи Неймана с $u_1^- = \varphi$ при условии $a_0 = 0$;

$$u(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^{k+1}}{k|z|^k} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + C$$

— решение внешней задачи Неймана с $u_1^+ = \varphi$ при условии $a_0 = 0$.

В этой главе будет рассмотрена смешанная задача для уравнений гиперболического и параболического типов и дано обоснование метода Фурье.

§ 32. Метод Фурье

Одним из наиболее эффективных методов решения многомерных краевых задач является метод Фурье (разделения переменных). В § 26 этот метод был применен к краевым задачам на собственные значения. В этом параграфе метод Фурье формально применяется к решению краевых задач для уравнений различных типов. Обоснование метода Фурье для решения смешанных задач для уравнений гиперболического и параболического типов будет дано в следующих параграфах этой главы.

Пусть оператор L определяется дифференциальным выражением

$$Lu = -\operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} u) + qu, \quad x \in G,$$

и граничным условием

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0,$$

причем функции $\rho(x)$, $q(x)$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ удовлетворяют условиям (3) § 21.1.

Предполагаем, что собственные значения $|\lambda_k|$ оператора L положительны, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, а соответствующие собственные функции $\{X_k\}$.

$$LX_k = \lambda_k \rho X_k, \quad X_k \in \mathcal{H}_L, \quad k = 1, 2, \dots$$

вещественны и образуют полную ортонормальную систему в пространстве $\mathcal{L}_2(G; \rho)$ со скалярным произведением $(f, g)_\rho$ с весом $\rho(x) > 0$, $x \in G$, $\rho \in C(\bar{G})$. (Достаточные

условия, при которых реализуются эти предположения, даны в § 21.4.)

1. Однородное гиперболическое уравнение. Рассмотрим в бесконечном цилиндре $\Pi_\infty = G \times (0, \infty)$ смешанную задачу для однородного уравнения гиперболического типа (см. § 4.5):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu; \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_t(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \bar{G}; \quad (2)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Сущность метода Фурье состоит в следующем: построим достаточное количество решений уравнения (1), представляемых произведением

$$T(t)X(x) \quad (4)$$

и удовлетворяющих граничному условию (3); из этих решений составим линейную комбинацию, удовлетворяющую начальным условиям (2); при некоторых условиях естественно ожидать, что полученная линейная комбинация будет удовлетворять уравнению (1) и граничному условию (3), т. е. будет решением задачи (1) — (2) — (3).

Итак, ищем решение уравнения (1) в виде произведения (4), причем от функции $X(x)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла граничному условию (3). Подставляя выражение (4) в уравнение (1) и деля его на ρTX , получим

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{LX(x)}{\rho(x)X(x)}. \quad (5)$$

Левая часть равенства (5) не зависит от x , а правая — от t . Следовательно, каждая из этих величин не зависит ни от x , ни от t , т. е. является постоянной величиной. Обозначая эту постоянную через $-\lambda$ (ср. § 26.1) из равенства (5) для неизвестных функций T и X и параметра λ получим уравнения

$$LX = \lambda \rho X, \quad (6)$$

$$T'' + \lambda T = 0. \quad (7)$$

Следовательно, уравнение (1) распалось на два уравнения (6) и (7) с меньшим числом независимых переменных, т. е., как говорят, переменные разделились.

Решения $X(x)$ уравнения (6) должны удовлетворять граничному условию (3). Поэтому в качестве X и λ можно взять собственные функции X_k и собственные значения λ_k оператора L . Общее решение уравнения (6) при $\lambda = \lambda_k > 0$ имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t, \quad (8)$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные.

Таким образом, в силу (4) и (8), построено счетное число частных (линейно независимых) решений уравнения (1):

$$T_k(t) X_k(x) = (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x), \quad (9)$$

$$k = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяющих граничному условию (3) и содержащих произвольные постоянные a_k и b_k . Всякая конечная сумма решений (9), естественно, опять будет удовлетворять уравнению (1) и граничному условию (3).

Составим формальный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x). \quad (10)$$

Коэффициенты a_k и b_k выберем такими, чтобы ряд (10) формально удовлетворял начальным условиям (2):

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x) = u_0(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} b_k X_k(x) = u_1(x),$$

т. е., в силу полноты ортонормальной системы $\{X_k\}$ в $\mathcal{L}_2(G; \rho)$,

$$a_k = (u_0, X_k)_\rho = \int_G \rho u_0 X_k dx, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (u_1, X_k)_\rho. \quad (11)$$

Итак, для решения $u(x, t)$ смешанной задачи (1) — (2) — (3) получено формальное разложение по собственным функциям $\{X_k\}$ оператора L ,

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x). \quad (12)$$

Этот ряд назовем *формальным решением* смешанной задачи (1) — (2) — (3): k -й член ряда (12), равный

$$T_k(t) X_k(x) = N_k X_k(x) \sin(\sqrt{\lambda_k} t + \alpha_k),$$

где

$$N_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \sin \alpha_k = \frac{a_k}{N_k}, \quad \cos \alpha_k = \frac{b_k}{N_k},$$

представляет собой так называемое *гармоническое колебание* с собственной частотой $\sqrt{\lambda_k}$ и амплитудой $N_k X_k(x)$. Последовательность чисел $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots$ называется *спектром собственных частот* колеблющейся системы.

2. Неоднородное гиперболическое уравнение. Изложим другой, более общий, вариант метода Фурье, пригодный для построения формального решения смешанной задачи также и для неоднородного уравнения гиперболического типа

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu + F(x, t). \quad (13)$$

При каждом $t > 0$ разложим решение $u(x, t)$ задачи (13) — (2) — (3) в ряд Фурье по собственным функциям $\{X_k\}$ оператора L ,

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \quad T_k(t) = (u, X_k)_\rho. \quad (14)$$

В силу (2), (14) и (11) неизвестные функции $T_k(t)$ должны удовлетворять начальным условиям:

$$\left. \begin{aligned} T_k(0) &= \int_G \rho(x) u(x, 0) X_k(x) dx = (u_0, X_k)_\rho = a_k, \\ T'_k(0) &= \int_G \rho(x) \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} X_k(x) dx = (u_1, X_k)_\rho = \sqrt{\lambda_k} b_k. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Составим дифференциальное уравнение для функций T_k . Умножая скалярно уравнение (13) на X_k и производя формальные выкладки, получим

$$\begin{aligned} \int_G \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} X_k dx &= \frac{d^2}{dt^2} \int_G \rho u X_k dx = \frac{d^2}{dt^2} (u, X_k)_\rho = \\ &= -(Lu, X_k) + (F, X_k) = \\ &= -(u, LX_k) + (F, X_k) = -\lambda_k (u, X_k)_\rho + (F, X_k). \end{aligned}$$

т. е., в силу (14), функции T_k удовлетворяют уравнению

$$T_k'' + \lambda_k T_k = c_k(t), \quad k=1, 2, \dots, \quad (16)$$

где

$$c_k(t) = (F, X_k) = \int_0^1 F(x, t) X_k(x) dx. \quad (17)$$

Решая задачу Коши для уравнения (16) с начальными условиями (15), имеем (см. § 13.1)

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t c_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k} (t-\tau) d\tau. \quad (18)$$

Подставляя выражение (18) в ряд (14), получим формальное решение смешанной задачи (13) — (2) — (3):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t c_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k} (t-\tau) d\tau \right] X_k(x). \quad (19)$$

Отметим, что первые два слагаемых в ряде (19), в силу (12), дают формальное решение смешанной задачи при $F=0$; третье слагаемое есть решение этой задачи при $u_0 = u_1 = 0$.

Пусть $u_0 = u_1 = 0$ и

$$F(x, t) = C \sin(\omega t) \rho(x) X_l(x). \quad (20)$$

Тогда

$$a_k = b_k = 0, \quad c_k(t) = C \sin(\omega t) (X_l, X_k)_0 = C \delta_{lk} \sin \omega t$$

и, следовательно, в силу (18),

$$\begin{aligned} T_k(t) &= \frac{C \delta_{lk}}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \sin(\omega \tau) \sin \sqrt{\lambda_k} (t-\tau) d\tau = \\ &= \frac{C \delta_{lk}}{\omega^2 - \lambda_k} \left(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t - \sin \omega t \right). \end{aligned}$$

Поэтому формальный ряд (19) сводится к единственному слагаемому

$$u(x, t) = \frac{C}{\omega^2 - \lambda_l} \frac{\omega}{\sqrt{\lambda_l}} \sin \sqrt{\lambda_l} t - \sin \omega t \Big) X_l(x), \quad (21)$$

которое является фактическим решением задачи. При $\omega \rightarrow \sqrt{\lambda_l}$ решение (21) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{C}{2\sqrt{\lambda_l}} \left(\frac{\sin \sqrt{\lambda_l} t}{\sqrt{\lambda_l}} - t \cos \sqrt{\lambda_l} t \right) X_l(x). \quad (22)$$

Из формулы (22) следует, что под действием периодического внешнего возмущения (20) с частотой, равной одной из собственных частот $\sqrt{\lambda_l}$, амплитуда колебаний

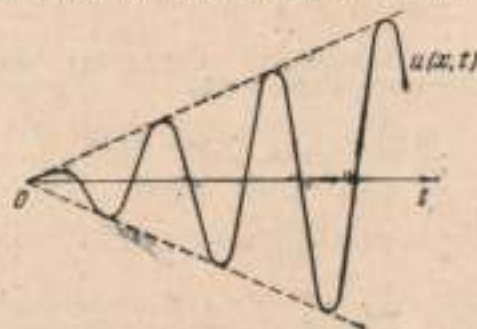


Рис. 103.

неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$, т. е., как говорят, имеет место явление резонанса (см. рис. 103).

3. Параболическое уравнение. Рассмотрим в цилиндре $\Pi_\infty = G \times (0, \infty)$ смешанную задачу для уравнения параболического типа (см. § 4.5):

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -Lu + F(x, t); \quad (23)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in G; \quad (24)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad t \geq 0. \quad (25)$$

Для построения формального решения смешанной задачи (23) — (24) — (25) используем метод Фурье в форме, данной в § 32.2. В соответствии с этим методом решение

$u(x, t)$ ищется в виде ряда (14). Для функций $T_k(t)$ получим задачу Коши:

$$T_k' + \lambda_k T_k = c_k(t), \quad T_k(0) = a_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

где $c_k(t)$ и a_k определяются равенствами (17) и (15) соответственно. Решая задачу Коши (26), получим (см. § 13.1)

$$T_k(t) = a_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t c_k(\tau) e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau, \quad (27)$$

и, следовательно, формальное решение смешанной задачи (23) — (24) — (25) выражается рядом

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t c_k(\tau) e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau \right] X_k(x). \quad (28)$$

4. Уравнение Шредингера. Смешанная задача для уравнения Шредингера (см. § 2.7)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + V(x) \psi; \quad (29)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x), \quad x \in G; \quad (30)$$

$$\alpha \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad t \geq 0 \quad (31)$$

рассматривается так же, как и смешанная задача (23) — (24) — (25). Для функций T_k имеем следующую задачу Коши:

$$i\hbar T_k' - \lambda_k T_k = 0, \quad T_k(0) = a_k = (\psi_0, X_k), \quad (32)$$

откуда

$$T_k(t) = a_k e^{-\frac{i}{\hbar} \lambda_k t}, \quad (33)$$

и, следовательно, формальное решение смешанной задачи (29) — (30) — (31) выражается рядом

$$\psi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{i}{\hbar} \lambda_k t} X_k(x), \quad (34)$$

где X_k — собственные функции оператора L при $p = \frac{\hbar^2}{2m_0}$, $q = V$ и $r = 1$.

5. Эллиптическое уравнение. Рассмотрим в конечном цилиндре $\Pi_l = G \times (0, l)$ краевую задачу для уравнения

эллиптического типа:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Lu + F(x, t); \quad (35)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{t=l} = u_l(x), \quad x \in G; \quad (36)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad 0 \leq t \leq l. \quad (37)$$

Формальное решение этой задачи ищем в виде ряда (14). Неизвестные функции $T_k(t)$ должны удовлетворять уравнению

$$T_k' - \lambda_k T_k = c_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (38)$$

и граничным условиям

$$T_k(0) = (u_0, X_k)_0 = a_k, \quad T_k(l) = (u_l, X_k)_l = b_k; \quad (39)$$

функции $c_k(t)$ определяются равенством (17).

Построим решение краевой задачи (38) — (39). Функция

$$v_k(t) = T_k(t) - a_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} (l-t)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} l} - b_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} t}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} l}$$

удовлетворяет уравнению (38) и граничным условиям $v_k(0) = v_k(l) = 0$. Поэтому эта функция выражается формулой (см. § 22.2)

$$v_k(t) = - \int_0^l \mathcal{D}_k(t, \tau) c_k(\tau) d\tau, \quad (40)$$

где

$$\mathcal{D}_k(t, \tau) = \frac{1}{V \lambda_k \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} l} \begin{cases} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} t \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} (l-\tau), & 0 \leq t \leq \tau, \\ \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} (l-t) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} \tau, & \tau \leq t \leq l, \end{cases}$$

— функция Грина краевой задачи (см. § 22.1)

$$-v'' + \lambda_k v = -c_k(t), \quad v(0) = v(l) = 0.$$

Следовательно,

$$T_k(t) = a_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} (l-t)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} l} + b_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} t}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} l} - \int_0^l \mathcal{D}_k(t, \tau) c_k(\tau) d\tau. \quad (41)$$

Таким образом, формальное решение граничной задачи (35)–(36)–(37) выражается рядом

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} (l-t)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} l} + b_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} t}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} l} - \int_0^t \mathcal{P}_k(t, \tau) c_k(\tau) d\tau \right] X_k(x). \quad (42)$$

6. Примеры.

а) Колебание закрепленной струны. Эта задача сводится к решению смешанной задачи в полуплоскости $(0, l) \times (0, \infty)$ для одномерного волнового уравнения (см. § 2.1):

$$\square u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \quad (43)$$

Соответствующая задача на собственные значения есть задача Штурма–Лиувилля:

$$-a^2 X'' = \lambda X, \quad X(0) = X(l) = 0.$$

Поэтому (см. § 22.4)

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k=1, 2, \dots,$$

и формальное решение задачи (43) выражается рядом

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (44)$$

где

$$a_k = \int_0^l u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{l}{k\pi a} \int_0^l u_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Каждое гармоническое колебание

$$T_k(t) X_k(x) = N_k \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left(\frac{k\pi a}{l} t + \alpha_k \right), \\ k=1, 2, \dots,$$

образует *стоячую волну* с собственной частотой $\frac{k\pi a}{l}$ и амплитудой

$$N_k \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Нули $\frac{\pi}{l} t$, $n=0, 1, \dots, k$, амплитуды называются *узлами*, а ее точки экстремума $\frac{\pi+0,5}{k} l$, $n=0, 1, \dots, k-1$, — *пучностями* этой стоячей волны (рис. 104).

Гармоническое колебание $T_1 X_1$ с наименьшей собственной частотой $\sqrt{\lambda_1} = \frac{\pi a}{l}$ называется *основным тоном*; остальные гармонические колебания $T_2 X_2, T_3 X_3, \dots$ с собственными частотами

$$\sqrt{\lambda_2} = \frac{2\pi a}{l}, \quad \sqrt{\lambda_3} = \frac{3\pi a}{l}, \dots$$

образуют ряд последовательных *обертонов*.

Решение (44) складывается из отдельных тонов (основного тона и обертонов), и их суммарное действие приводит к созданию *тембра звука*, издаваемого струной.

б) Распространение тепла в ограниченном стержне. Рассмотрим смешанную задачу для одномерного уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \quad (45)$$

Формальное решение задачи (45) выражается рядом

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (46)$$

Ограничиваясь первым членом ряда (46), получим приближенное решение задачи (45):

$$u(x, t) \approx \frac{2a_1}{l} e^{-\frac{\pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

в) Колебания закрепленной мембраны. Задача сводится к решению смешанной задачи для дву-

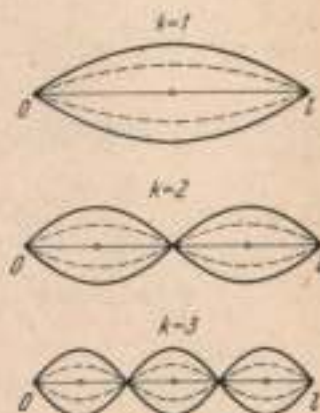


Рис. 104

мерного волнового уравнения:

$$\square_0 u = 0, \quad u|_{z=0} = u_0(x), \quad u_t|_{z=0} = u_1(x), \quad u|_S = 0. \quad (47)$$

Соответствующая задача на собственные значения принимает вид

$$-a^2 \Delta X = \lambda X, \quad X|_S = 0.$$

Для прямоугольника $(0, l) \times (0, m)$ (см. § 26.2)

$$\lambda_{kj} = \pi^2 a^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2} \right), \quad X_{kj}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{lm}} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m},$$

$$k, j = 1, 2, \dots,$$

и формальное решение задачи (47) выражается двойным рядом

$$u(x, y, t) = \frac{4}{lm} \sum_{k,j=1}^{\infty} \left(a_{kj} \cos \pi a \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}} t + \right. \\ \left. + b_{kj} \sin \pi a \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}} t \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m}, \quad (48)$$

где

$$a_{kj} = \int_0^l \int_0^m u_0(x, y) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m} dx dy, \\ b_{kj} = \frac{lm}{\pi a \sqrt{k^2 m^2 + j^2 l^2}} \int_0^l \int_0^m u_1(x, y) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m} dx dy.$$

Для круга U_R (см. § 26.2)

$$\lambda_{kj} = [\mu_j^{(k)}]^2 \frac{a^2}{R^2}, \quad X_{kj}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi} R |J'_k(\mu_j^{(k)})|} J_k \left(\mu_j^{(k)} \frac{r}{R} \right) e^{ik\varphi},$$

$$k = 0, 1, \dots; \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $\mu_j^{(k)}$ — положительные корни уравнения $J_k(\mu) = 0$. Формальное решение задачи (47) выражается двойным рядом

$$u(x, y, t) = \\ = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_{kj} \cos \frac{\mu_j^{(k)} a}{R} t + b_{kj} \sin \frac{\mu_j^{(k)} a}{R} t \right] \frac{J_k \left(\mu_j^{(k)} \frac{r}{R} \right)}{[J'_k(\mu_j^{(k)})]^2} e^{ik\varphi}, \quad (49)$$

где

$$a_{kj} = \int_0^R \int_0^{2\pi} u_0(x, y) J_k \left(\mu_j^{(k)} \frac{r}{R} \right) e^{-ik\varphi} r dr d\varphi, \\ b_{kj} = \frac{R}{a \mu_j^{(k)}} \int_0^R \int_0^{2\pi} u_1(x, y) J_k \left(\mu_j^{(k)} \frac{r}{R} \right) e^{-ik\varphi} r dr d\varphi.$$

д) Формальное решение смешанной задачи для двумерного уравнения теплопроводности,

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad u|_{z=0} = u_0(x), \quad u|_S = 0, \quad (50)$$

имеет вид: для прямоугольника $(0, l) \times (0, m)$

$$u(x, y, t) = \frac{4}{lm} \sum_{k,j=1}^{\infty} a_{kj} e^{-\pi^2 a^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2} \right) t} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m}, \quad (51)$$

для круга U_R

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} e^{-\frac{[\mu_j^{(k)}]^2 a^2}{R^2} t} \frac{J_k \left(\mu_j^{(k)} \frac{r}{R} \right)}{[J'_k(\mu_j^{(k)})]^2} e^{ik\varphi}, \quad (52)$$

е) Колебание шарового объема. Рассмотрим смешанную задачу (47) для трехмерного шара U_R . Соответствующие собственные значения и собственные функции вычислены в § 26.2, с) (формулы (30) и (31)).

Формальное решение задачи выражается рядом

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi R^2 V_r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[a_{ljm} \cos \mu_j^{(l)} \left(t + \frac{1}{2} \right) \frac{at}{R} + \right. \\ \left. + b_{ljm} \sin \mu_j^{(l)} \left(t + \frac{1}{2} \right) \frac{at}{R} \right] \frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \frac{1}{\left[J'_{l+\frac{1}{2}} \left(\mu_j^{(l)} \left(t + \frac{1}{2} \right) \right) \right]^2} \times \\ \times J_{l+\frac{1}{2}} \left(\mu_j^{(l)} \left(t + \frac{1}{2} \right) \frac{r}{R} \right) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (53)$$

где

$$a_{lm} = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_0(x) J_{l+\frac{1}{2}}\left(\mu_j \left(l+\frac{1}{2}\right) \frac{r}{R}\right) Y_l^m(\theta, \varphi) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$b_{lm} = \frac{R}{a_{lm} \left(l+\frac{1}{2}\right)} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_1(x) J_{l+\frac{1}{2}}\left(\mu_j \left(l+\frac{1}{2}\right) \frac{r}{R}\right) \times$$

$$\times Y_l^m(\theta, \varphi) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi.$$

г) Формальное решение смешанной задачи (50) для трехмерного шара U_R выражается рядом

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi R^2 V} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} e^{-\left[\mu_j \left(l+\frac{1}{2}\right)\right]^2 \frac{a^2}{R^2} t} \times$$

$$\times \frac{2l+1}{1+\delta_{lm}} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}\left(\mu_j \left(l+\frac{1}{2}\right) \frac{r}{R}\right) Y_l^m(\theta, \varphi)}{\left[J_{l+\frac{1}{2}}\left(\mu_j \left(l+\frac{1}{2}\right)\right)\right]^2}. \quad (54)$$

г) Рассмотрим в шаре U_R смешанную задачу для уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + V(|x|) \psi, \quad (55)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x), \quad \psi|_{S_R} = 0,$$

с потенциалом V , зависящим только от $|x|$. Соответствующая задача на собственные значения принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta X + V(|x|) X = \lambda X, \quad X|_{S_R} = 0,$$

или, в сферических координатах,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial X}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial X}{\partial \theta} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2} \right] + V(r) X = \lambda X, \quad (56)$$

$$|X(0, \theta, \varphi)| < \infty, \quad X(R, \theta, \varphi) = 0.$$

Собственные значения и собственные функции краевой задачи (56) определяются методом разделения переменных. Полагая

$$X = \frac{\omega_l^2(r)}{r} Y(\theta, \varphi)$$

и действуя, как и в § 25.8, получим

$$\lambda_{lj}, X_{lm}(x) = V \frac{2l+1}{\pi(1+\delta_{lm})} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \frac{\omega_l^2(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi),$$

$$l=0, 1, \dots; j=1, 2, \dots; m=0, \pm 1, \dots, \pm l,$$

где λ_{lj} и $\omega_l^2(r)$, $j=1, 2, \dots$, — собственные значения и собственные функции одномерной краевой задачи

$$-\omega_l^2 r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \omega_l^2 + \frac{2m_0}{\hbar^2} (V - \lambda) \omega_l^2 = 0,$$

$$\omega_l^2(0) = \omega_l^2(R) = 0.$$

Формальное решение задачи (55) выражается рядом

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi R^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} e^{-\frac{l}{R} \lambda_{lj} t} \frac{2l+1}{1+\delta_{lm}} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \times$$

$$\times \omega_l^2(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (57)$$

где

$$a_{lm} = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_0(x) \omega_l^2(r) Y_l^m(\theta, \varphi) r dr \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Собственные значения λ_{lj} определяют уровни энергии квантовой частицы; индексы l и m называются соответственно *орбитальным* (азимутальным) и *магнитным квантовыми числами*. *)

h) Формальное решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = u_0(x), \quad u|_{y=l} = u_l(x) \quad (58)$$

в прямоугольнике $(0, a) \times (0, l)$ выражается рядом

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \operatorname{sh} k\pi \frac{l-y}{a} + b_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} \right) \frac{\sin \frac{k\pi x}{a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi l}{a}}, \quad (59)$$

*) См., например, А. Мессиа [1], гл. IX.

где

$$a_k = \int_0^1 u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx, \quad b_k = \int_0^1 u_1(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx.$$

г) Рассмотрим задачу Дирихле в трехмерном цилиндре $U_R \times (0, h)$:

$$\Delta u = 0, \quad u|_{S_R} = u_0(z), \quad u|_{z=0} = u|_{z=h} = 0. \quad (60)$$

В цилиндрических координатах (r, φ, z) (см. § 3.2) решение $u(x, y, z) = \tilde{u}(r, z)$ не зависит от угла φ , и поэтому задача (60) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} = 0, \quad (61)$$

$$\tilde{u}(R, z) = u_0(z), \quad \tilde{u}(r, 0) = \tilde{u}(r, h) = 0.$$

Решая краевую задачу (61) методом разделения переменных, $\tilde{u}(r, z) = \mathcal{R}(r)Z(z)$, для функций $\mathcal{R}$ и Z получим краевые задачи

$$Z'' + \lambda Z = 0, \quad Z(0) = Z(h) = 0,$$

$$\mathcal{R}'' + \frac{\mathcal{R}'}{r} - \lambda \mathcal{R} = 0, \quad |\mathcal{R}(0)| < \infty.$$

Решения этих краевых задач легко находятся,

$$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{h^2}, \quad Z_k(z) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sin \frac{k\pi z}{h}, \quad \mathcal{R}_k(r) = c_k I_0 \left(k\pi \frac{r}{h} \right),$$

где I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента (см. § 23.8).

Формальное решение задачи (61) и, стало быть, задачи (60) выражается рядом

$$u(x, y, z) = \tilde{u}(r, z) = \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{I_0 \left(k\pi \frac{r}{h} \right)}{I_0 \left(k\pi \frac{R}{h} \right)} \sin \frac{k\pi z}{h}, \quad (62)$$

где

$$a_k = \int_0^1 u_0(z) \sin \frac{k\pi z}{h} dz.$$

7. Упражнения. а) Доказать: если $u_0^* \in \mathcal{L}_2(0, l)$, $u_0(0) = u_0(l) = -u_0^*(0) = -u_0^*(l) = 0$, $u_1^* \in \mathcal{L}_2(0, l)$, $u_1(0) = u_1(l) = 0$, то ряд (44) представляет классическое решение задачи (43).

б) Доказать: если $u_0^* \in \mathcal{L}_2(0, l)$, $u_0(0) = u_0(l) = 0$, то ряд (46) представляет классическое решение задачи (45).

с) Доказать: если u_0 и $u_1 \in C^2(\bar{G})$, $u_0|_S = u_1|_S = 0$, то ряд

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(u_0, X_k) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} (l-y)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} l} + (u_1, X_k) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} y}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k} l} \right] X_k(x)$$

даст решение следующей задачи Дирихле для уравнения Лапласа в цилиндре $G \times (0, l)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Delta_x u = 0, \quad u|_{y=0} = u_0(x), \quad u|_{y=l} = u_1(x), \quad u|_S = 0.$$

§ 33. Смешанная задача для уравнения гиперболического типа

В этом параграфе будет рассмотрена смешанная задача для уравнения гиперболического типа (см. § 4.5):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} (p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) = -Lu + F(x, t), \quad (1)$$

$$(x, t) \in U_{\infty} = G \times (0, \infty);$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \bar{G}; \quad (2)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Предполагаем, что функции ρ , p , q , α и β удовлетворяют условиям § 32; G — ограниченная область и ее граница S — кусочно-гладкая поверхность, S_0 — та часть S , где $\alpha(x) > 0$ и $\beta(x) > 0$ одновременно.

1. Классическое решение. Интеграл энергии. Классическим решением смешанной задачи (1) — (2) — (3) называется функция $u(x, t)$ класса $C^2(U_{\infty}) \cap C^1(\bar{U}_{\infty})$, удовлетворяющая уравнению (1) в цилиндре U_{∞} , начальным условиям (2) на нижнем основании и граничному условию (3) на боковой поверхности этого цилиндра.

Необходимыми условиями существования классического решения задачи (1) — (2) — (3) являются следующие

условия гладкости:

$$F \in C(\bar{U}_\infty), \quad u_0 \in C^1(\bar{G}), \quad u_1 \in C(\bar{G}),$$

и условие согласованности

$$\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_S = 0.$$

При изучении краевых задач для гиперболических уравнений весьма эффективным оказывается метод интегралов энергии. Пусть

$u(x, t)$ — классическое решение задачи (1) — (2) — (3). Интегралом энергии называется величина

$$J^2(t) = \frac{1}{2} \int_G \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p |\text{grad } u|^2 + qu^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_{S_+} p \frac{\alpha}{\beta} u^2 dS,$$

представляющая собой сумму кинетической и потенциальной энергий колеблющейся системы в момент времени t .

Пусть $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1) — (2) — (3) и $F \in C(\bar{U}_\infty)$. Тогда справедливо соотношение

$$J^2(t) = J^2(0) + \int_0^t \int_G F(x, \tau) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} dx, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где

$$J^2(0) = \frac{1}{2} \int_G (\rho u_1^2 + p |\text{grad } u_0|^2 + qu_0^2) dx + \frac{1}{2} \int_{S_+} p \frac{\alpha}{\beta} u_0^2 dS.$$

Для доказательства возьмем произвольные число $\varepsilon > 0$ и область $G' \subset G$ с кусочно-гладкой границей S' (рис. 105). Умножая уравнение (1) на $\frac{\partial u}{\partial t}$, интегрируя по цилиндру $G' \times (\varepsilon, T)$ и пользуясь первой формулой Грина (см. § 21.2),

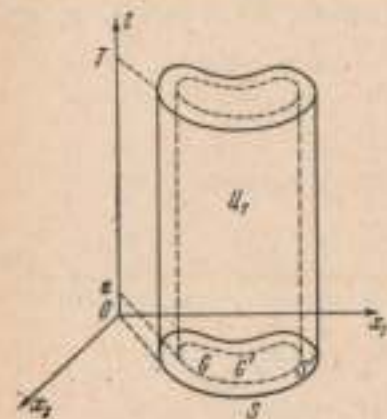


Рис. 105.

получим

$$\begin{aligned} \int_{G' \times (\varepsilon, T)} F \frac{\partial u}{\partial t} dx dt &= \int_{G' \times (\varepsilon, T)} \frac{\partial u}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu \right) dx dt = \\ &= \int_{G'} \rho \int_{\varepsilon}^T \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt dx + \int_{\varepsilon}^T \int_{G'} \frac{\partial u}{\partial t} Lu dx dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{G'} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \Big|_{\varepsilon}^T dx + \int_{\varepsilon}^T \int_{G'} p (\text{grad } u, \text{grad } \frac{\partial u}{\partial t}) dx - \\ &= \int_{G'} p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} dS' + \int_{G'} qu \frac{\partial u}{\partial t} dx \Big|_{\varepsilon}^T - \frac{1}{2} \int_{G'} \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + p |\text{grad } u|^2 + qu^2 \right] \Big|_{\varepsilon}^T dx - \int_{\varepsilon}^T \int_{S'} p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} dS' dt. \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $G' \rightarrow G$ и пользуясь тем, что $u \in C^1(\bar{U}_T)$ и $F \in C(\bar{U}_T)$, получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_G \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p |\text{grad } u|^2 + qu^2 \right] \Big|_0^T dx - \\ - \int_0^T \int_{S_+} p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} dS dt = \int_{U_T} F \frac{\partial u}{\partial t} dx dt. \quad (5) \end{aligned}$$

Из граничного условия (3) вытекают соотношения на S $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta} u$, если $\beta > 0$; $u = 0$, если $\beta = 0$. Поэтому

$$- \int_0^T \int_{S_+} p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} dS dt = \int_0^T \int_{S_+} p \frac{\alpha}{\beta} u \frac{\partial u}{\partial t} dS dt = \frac{1}{2} \int_{S_+} p \frac{\alpha}{\beta} u^2 \Big|_0^T dS,$$

откуда и из (5), заменяя T на t , получаем формулу (4). Теорема доказана.

Следствие. При $F=0$ равенство (4) принимает вид

$$J^2(t) = J^2(0), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Физический смысл равенства (6) состоит в том, что полная энергия колеблющейся системы при отсутствии внешних возмущений не меняется со временем (закон сохранения энергии).

2. Единственность и непрерывная зависимость классического решения. Применим метод интегралов энергии для доказательства единственности и непрерывной зависимости классического решения смешанной задачи (1) — (2) — (3).

Дифференцируя равенство (4) по t , получим

$$2J(t)J'(t) = \int_G F(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Применяя к правой части равенства (7) неравенство Коши — Буняковского, выводим неравенство

$$2JJ' \leq |F| \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|. \quad (8)$$

Учитывая теперь, что $\rho(x) > 0$, $\rho \in C(\bar{G})$ и, стало быть, $\rho(x) \geq \rho_0$ при некотором $\rho_0 > 0$, получаем цепочку неравенств

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \leq \frac{1}{\rho_0} \int_G \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \leq \frac{2}{\rho_0} J^2(t).$$

т. е.

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(t). \quad (9)$$

Аналогично убеждаемся в справедливости оценки

$$|\text{grad } u| \leq \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(t), \quad (10)$$

где $\rho_0 = \min \rho(x)$, $x \in G$, $\rho_0 > 0$.

Подставляя неравенство (9) в неравенство (8) и сокращая на J , выводим неравенство

$$J'(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} |F|, \quad t \geq 0.$$

Интегрируя полученное дифференциальное неравенство для функции J получаем оценку

$$J(t) \leq J(0) + \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \int_0^t |F| d\tau. \quad (11)$$

Из оценок (9), (10) и (11) выводим оценки

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(0) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t |F| d\tau, \quad t \geq 0; \quad (12)$$

$$|\text{grad } u| \leq \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(0) + \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \rho_0}} \int_0^t |F| d\tau, \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Теперь оценим функцию $|u|$. Дифференцируя равенство

$$|u|^2 = \int_G u^2(x, t) dx$$

по t , пользуясь неравенством Коши — Буняковского и учитывая неравенство (12), получаем

$$\begin{aligned} 2|u||u'| &= 2 \int_G u \frac{\partial u}{\partial t} dx \leq 2|u| \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \leq \\ &\leq 2|u| \left[\sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(0) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t |F| d\tau \right], \end{aligned}$$

т. е., после сокращения на $2|u|$,

$$|u'| \leq \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(0) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t |F| d\tau, \quad t \geq 0.$$

Интегрируя это дифференциальное неравенство, имеем

$$|u| \leq |u|_0 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(0)t + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \int_0^{\tau} |F| d\tau' d\tau,$$

где $|u|_0$ — значение функции $|u|$ в точке $t=0$, т. е.

$$|u|_0^2 = \int_G u^2(x, 0) dx = \int_G u_0^2(x) dx = |u_0|^2.$$

Меняя порядок интегрирования в последнем интеграле, получим искомую оценку

$$|u| \leq |u|_0 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(0)t + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t (t-\tau) |F| d\tau, \quad t \geq 0. \quad (14)$$

Теперь, пользуясь оценками (12), (13) и (14), докажем следующую теорему.

Теорема. Классическое решение задачи (1)–(2)–(3) единственно и непрерывно зависит от u_0 , u_1 и F в том смысле, что если $F \in C(\bar{U}_T)$, $\bar{F} \in C(\bar{U}_T)$ и

$$\left\{ \begin{aligned} |F - \bar{F}| &\leq \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T; \quad |u_0 - \bar{u}_0|_C \leq \varepsilon_0, \\ ||\text{grad } u_0 - \text{grad } \bar{u}_0|| &\leq \varepsilon'_0, \quad |u_1 - \bar{u}_1| \leq \varepsilon_1, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

то соответствующие (классические) решения $u(x, t)$ и $\bar{u}(x, t)$ удовлетворяют при $0 \leq t \leq T$ неравенствам

$$|u - \bar{u}| \leq C \left(\varepsilon_0 + T\varepsilon'_0 + T\varepsilon_1 + \frac{T^2}{2}\varepsilon \right), \quad (16)$$

$$||\text{grad}_x u - \text{grad}_x \bar{u}|| \leq C (\varepsilon_0 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_1 + T\varepsilon), \quad (17)$$

$$|u_t - \bar{u}_t| \leq C (\varepsilon_1 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_1 + T\varepsilon), \quad (18)$$

причем число C не зависит от u_0 , u_1 , F , t и T .

Доказательство. Для доказательства единственности достаточно установить, что классическое решение $u(x, t)$ однородной задачи (1)–(2)–(3) (при $u_0 = u_1 = 0$ и $F = 0$) единственно, т. е. $u(x, t) = 0$, $(x, t) \in \bar{U}_T$ (см. § 1.11). Но это вытекает из неравенства (14), поскольку $u_0 = 0$, $J(0) = 0$ и $F = 0$.

Для доказательства непрерывной зависимости составим разность $\eta = u - \bar{u}$. Функция η является классическим решением задачи (1)–(2)–(3) с заменой F , u_0 и u_1 на $F - \bar{F}$, $u_0 - \bar{u}_0$ и $u_1 - \bar{u}_1$ соответственно. Пользуясь неравенствами (15), для решения η оценим величину интеграла энергии $J^2(0)$:

$$\begin{aligned} 2J^2(0) = & \int_G [\rho(u_1 - \bar{u}_1)^2 + \rho|\text{grad } u_0 - \text{grad } \bar{u}_0|^2 + q(u_0 - \bar{u}_0)^2] dx + \\ & + \int_{S_0} \rho \frac{\alpha}{\beta} (u_0 - \bar{u}_0)^2 dS \leq V \max_{x \in \bar{G}} \rho(x) \varepsilon_1^2 + V \max_{x \in \bar{G}} \rho(x) (\varepsilon'_0)^2 + \\ & + \left[V \max_{x \in \bar{G}} q(x) + \sigma \max_{x \in S_0} \rho \frac{\alpha}{\beta}(x) \right] \varepsilon_0^2 \leq C_1^2 (\varepsilon_0 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_1)^2, \end{aligned}$$

где V — объем области G , σ — площадь куска S_0 и C_1^2 — число большее, чем числа $V \max \rho$, $V \max \rho$ и $V \max q + \sigma \max \rho \frac{\alpha}{\beta}$.

Таким образом, получена оценка

$$\sqrt{2}J(0) \leq C_1 (\varepsilon_0 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_1). \quad (19)$$

Применяя теперь к решению η неравенство (14),

$$|\eta| \leq |u_0 - \bar{u}_0| + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(0) t + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t (t - \tau) |F - \bar{F}| d\tau,$$

и пользуясь неравенствами (15) и (19), получим при всех $t \in [0, T]$ оценку (16):

$$\begin{aligned} |\eta| \leq & \sqrt{V} |u_0 - \bar{u}_0|_C + \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} C_1 (\varepsilon_0 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_1) t + \\ & + \frac{\varepsilon}{\rho_0} \int_0^t (t - \tau) d\tau \leq \varepsilon_0 \sqrt{V} + \frac{T}{\sqrt{\rho_0}} C_1 (\varepsilon_0 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_1) + \\ & + \frac{\varepsilon}{2\rho_0} T^2 \leq C (\varepsilon_0 + \varepsilon'_0 T + \varepsilon_1 T + \frac{\varepsilon}{2} T^2) \end{aligned}$$

при надлежащем выборе постоянной C .

Аналогично, с помощью неравенств (12), (13) и (19), устанавливаются и неравенства (17) и (18). Теорема доказана.

Доказательство существования классического решения задачи (1)–(2)–(3) представляет значительные трудности. Чтобы обойти эти трудности, как и для задачи Коши, введем понятие обобщенного решения этой задачи: существование же обобщенного решения устанавливается более простыми средствами. Прежде чем приступить к этой программе, изучим более подробно функции из $\mathcal{L}_2(G)$, зависящие от параметра.

3. Функции, непрерывные в $\mathcal{L}_2(G)$. Пусть при каждом $t \in [a, b]$ функция $u(x, t)$ принадлежит $\mathcal{L}_2(G)$. Функция $u(x, t)$ называется непрерывной в $\mathcal{L}_2(G)$ по переменной t на $[a, b]$, если для любого $t \in [a, b]$

$$u(x, t') \rightarrow u(x, t), \quad t' \rightarrow t \text{ в } \mathcal{L}_2(G).$$

Из этого определения вытекает: если функция $u(x, t)$ непрерывна в $\mathcal{L}_2(G)$ по t на $[a, b]$, то норма $|u(x, t)|$ непрерывна по t на $[a, b]$; для любой $f \in \mathcal{L}_2(G)$ скалярное произведение $(u(x, t), f)$ непрерывно по t на $[a, b]$; $u \in \mathcal{L}_2(G \times (a, b))$, если интервал (a, b) конечен.

Действительно, непрерывность $|u|$ следует из неравенства

$$||u(x, t')| - |u(x, t)|| \leq |u(x, t') - u(x, t)|.$$

вытекающего из неравенства Минковского. Непрерывность (u, f) следует из неравенства Коши — Буняковского

$$|(u(x, t'), f) - (u(x, t), f)| \leq |u(x, t') - u(x, t)| \|f\|.$$

Принадлежность u к $\mathcal{L}_2(G \times (a, b))$ следует из конечности (a, b) , непрерывности $|u|$ и равенства

$$\int_a^b \int_G |u(x, t)|^2 dx dt = \int_a^b |u(x, t)|^2 dt.$$

Последовательность функций $u_k(x, t)$, $k=1, 2, \dots$, называется сходящейся к функции $u(x, t)$ в $\mathcal{L}_2(G)$ равномерно по t на $[a, b]$, если

$$|u_k(x, t) - u(x, t)| \xrightarrow{t \in [a, b]} 0, \quad k \rightarrow \infty;$$

при этом будем писать

$$u_k \xrightarrow{t \in [a, b]} u, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{L}_2(G).$$

Из этого определения следует, что

$$u_k \rightarrow u, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{L}_2(G \times (a, b));$$

$$|u_k(x, t) - u(x, t)| \xrightarrow{t \in [a, b]} 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Лемма 1. Если последовательность функций $u_k(x, t)$, $k=1, 2, \dots$, непрерывных в $\mathcal{L}_2(G)$ по t на $[a, b]$, сходится к функции $u(x, t)$ в $\mathcal{L}_2(G)$ равномерно по t на $[a, b]$, то $u(x, t)$ — непрерывная в $\mathcal{L}_2(G)$ по t на $[a, b]$ функция.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует такое число $m = m_\varepsilon$, что

$$|u_m(x, t) - u(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad t \in [a, b].$$

По условию функция $u_m(x, t)$ непрерывна в $\mathcal{L}_2(G)$ по $t \in [a, b]$. Поэтому существует такое число $\delta = \delta_\varepsilon$, что

$$|u_m(x, t') - u_m(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |t' - t| < \delta, \quad t', t \in [a, b].$$

Следовательно, пользуясь неравенством Минковского, получаем

$$|u(x, t') - u(x, t)| \leq |u(x, t') - u_m(x, t')| + |u_m(x, t') - u_m(x, t)| + |u_m(x, t) - u(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

при всех $|t - t'| < \delta$, $t', t \in [a, b]$. Лемма доказана.

Последовательность функций $u_k(x, t)$, $k=1, 2, \dots$, называется сходящейся в себе в $\mathcal{L}_2(G)$ равномерно по t на $[a, b]$, если

$$u_k - u_p \xrightarrow{t \in [a, b]} 0, \quad k, p \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{L}_2(G).$$

Лемма 2. Если последовательность функций $u_k(x, t)$, $k=1, 2, \dots$, сходится в себе в $\mathcal{L}_2(G)$ равномерно по t на $[a, b]$, то существует функция $u(x, t)$, непрерывная в $\mathcal{L}_2(G)$ по t на $[a, b]$ такая, что

$$u_k \xrightarrow{t \in [a, b]} u, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{L}_2(G).$$

Доказательство. По теореме Рисса — Фишера (см. § 1.7) при каждом $t \in [a, b]$ существует функция $u(x, t) \in \mathcal{L}_2(G)$ такая, что

$$u_k \rightarrow u, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{L}_2(G). \quad (20)$$

Далее, можно выбрать подпоследовательность $u_{k_i}(x, t)$, $i=1, 2, \dots$, такую, что

$$|u_{k_{i+1}}(x, t) - u_{k_i}(x, t)| < \frac{1}{2^i}, \quad t \in [a, b]. \quad (21)$$

Но, в силу (20), при каждом $t \in [a, b]$

$$u = \lim_{p \rightarrow \infty} u_{k_p} = u_{k_1} + (u_{k_{i+1}} - u_{k_i}) + (u_{k_{i+2}} - u_{k_{i+1}}) + \dots$$

и потому, в силу (21),

$$u - u_{k_1} \leq |u_{k_{i+1}} - u_{k_i}| + |u_{k_{i+2}} - u_{k_{i+1}}| + \dots < \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} + \dots = \frac{1}{2^{i-1}}, \quad i=1, 2, \dots,$$

откуда следует, что подпоследовательность $\{u_{k_i}\}$ сходится к u в $\mathcal{L}_2(G)$ равномерно по $t \in [a, b]$. А тогда из неравенства

$$|u_k - u| \leq |u_k - u_{k_i}| + |u_{k_i} - u|$$

заключаем, что последовательность $\{u_k\}$ сходится к функции u в $\mathcal{L}_2(G)$ равномерно по t на $[a, b]$. По лемме 1 функция $u(x, t)$ непрерывна в $\mathcal{L}_2(G)$ по t на $[a, b]$. Лемма доказана.

получим

$$\left| \frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{\partial u_p}{\partial t} \right| \leq C (|u_{k0} - u_{p0}| + \|\text{grad } u_{k0} - \text{grad } u_{p0}\| + |u_{k1} - u_{p1}| + T \max_{0 \leq t \leq T} |F_k - F_p|),$$

откуда, в силу (22), следует, что последовательность производных $\frac{\partial u_k}{\partial t}$, $k=1, 2, \dots$, сходится в себе в $\mathcal{L}_2(G)$ равномерно по t на $[0, T]$ при всех $T > 0$. По лемме 2 § 33.3 существует функция $\bar{u}(x, t)$, непрерывная в $\mathcal{L}_2(G)$ по t на $[0, \infty)$, такая, что при всех $T > 0$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} \xrightarrow{t \in [0, T]} \bar{u}, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{L}_2(G). \quad (26)$$

С другой стороны, из (23) следует, что $u_k \rightarrow u$, $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'$ (функции u_k и u считаем продолженными нулем вне цилиндра $\bar{U}_\infty$). Отсюда, пользуясь непрерывностью в $\mathcal{D}'$ операции обобщенного дифференцирования (см. § 6.2, а)), заключаем, что

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}'.$$

Применяя полученное соотношение к основным функциям φ из $\mathcal{D}(\bar{U}_\infty)$ и учитывая (26), выводим

$$\int \bar{u} \varphi \, dx \, dt \leftarrow \int \frac{\partial u_k}{\partial t} \varphi \, dx \, dt \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi \right), \quad k \rightarrow \infty,$$

откуда вытекает равенство (см. § 5.5)

$$u_t = \bar{u}, \quad (x, t) \in \bar{U}_\infty.$$

Таким образом, в силу (26), доказано первое предельное соотношение (25). Второе соотношение (25) доказывается аналогично.

с) Обобщенное решение $u(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям (2) в следующем смысле:

$$|u - u_0| \rightarrow 0, \quad \|\text{grad}_x(u - u_0)\| \rightarrow 0, \quad |u_t - u_1| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0. \quad (27)$$

Для доказательства перейдем к пределу при $k \rightarrow \infty$ в неравенстве

$$|u(x, 0) - u_0(x)| \leq |u(x, 0) - u_k(x, 0)| + |u_{k0}(x) - u_0(x)|,$$

используя предельные соотношения $u_k(x, 0) \rightarrow u(x, 0)$ и $u_{k0}(x) \rightarrow u_0(x)$ в $\mathcal{L}_2(G)$. В результате получим $u(x, 0) = u_0(x)$. Отсюда, в силу непрерывности функции $u(x, t)$ в $\mathcal{L}_2(G)$ по $t \in [0, \infty)$, убеждаемся в справедливости первого предельного соотношения (27). Аналогично, используя свойство b), получим и остальные соотношения (27).

Вопрос о том, в каком смысле обобщенное решение $u(x, t)$ удовлетворяет граничному условию (3), подлежит дальнейшему выяснению.

5. Единственность и непрерывная зависимость обобщенного решения. Докажем, что оценки (12), (13) и (14) остаются справедливыми и для обобщенного решения $u(x, t)$ задачи (1)–(2)–(3).

Действительно, пусть $u_k(x, t)$, $k=1, 2, \dots$, — последовательность классических решений задачи (1')–(2')–(3'), сходящаяся к обобщенному решению $u(x, t)$ в смысле (23). Применяя к решениям u_k неравенство (14), получим

$$|u_k| \leq |u_{k0}| + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J_k(0) t + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t (t-\tau) |F_k| \, d\tau, \quad t \geq 0, \quad (28)$$

где

$$J_k(0) = \frac{1}{2} \int_{\partial_+} (\rho u_{k1}^2 + p |\text{grad } u_{k0}|^2 + q u_{k0}^2) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial_+} p \frac{\alpha}{\beta} u_{k0}^2 \, dS. \quad (29)$$

Пользуясь тем, что, в силу (23) и (22) (см. § 33.4),

$$\begin{aligned} |u_k| &\xrightarrow{t \in [0, T]} |u|, \quad |F_k| \xrightarrow{t \in [0, T]} |F|, \quad T > 0 \text{ — любое;} \\ |u_{k0} - u_0| &\rightarrow 0, \quad \|\text{grad } u_{k0}\| \rightarrow \|\text{grad } u_0\|; \\ |u_{k1}| &\rightarrow |u_1|, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

и переходя к пределу в (28) и (29), убедимся в справедливости оценки (14).

Оценки (12) и (13) устанавливаются аналогично, если воспользоваться предельными соотношениями (25).

Из оценок (12), (13) и (14), как и для классического решения, вытекают единственность обобщенного решения задачи (1)–(2)–(3) и его непрерывная зависимость от u_0 , u_1 и F в смысле теоремы § 33.2.

6. Существование обобщенного решения. В § 32.2 было построено формальное решение задачи (1) – (2) – (3) в виде ряда Фурье по собственным функциям $\{X_j\}$ оператора L ,

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t) X_j(x), \quad (30)$$

где

$$T_j(t) = a_j \cos \sqrt{\lambda_j} t + b_j \sin \sqrt{\lambda_j} t + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_0^t c_j(\tau) \sin \sqrt{\lambda_j} (t - \tau) d\tau, \quad (31)$$

$$a_j = (u_0, X_j)_0, \quad b_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (u_1, X_j)_0, \quad c_j(t) = (F, X_j). \quad (32)$$

Возникает задача обоснования метода Фурье, т. е. выяснения условий, при которых ряд (30) сходится и дает обобщенное или классическое решение.

Предположим, что $u_0 \in \mathcal{H}_L$, $u_1 \in \mathcal{L}_2(G)$ и F непрерывна в $\mathcal{L}_2(G)$ по t на $[0, \infty)$. Докажем, что при этих условиях ряд (30), представляющий формальное решение задачи (1) – (2) – (3), сходится в $\mathcal{L}_2(G)$ равномерно по t на $[0, T]$ при всех $T > 0$ и определяет обобщенное решение $u(x, t)$ этой задачи.

Действительно, пользуясь теоремами разложения 1, 2 и 3 § 21.4 (см. замечание), представим функции u_0 , u_1 и $\frac{F}{\rho}$ в виде рядов Фурье по собственным функциям $\{X_j\}$ оператора L ,

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j(x), \quad (33)$$

$$\text{grad } u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{grad } X_j(x), \quad u_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} b_j X_j(x), \quad (34)$$

$$F(x, t) = \rho(x) \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t) X_j(x), \quad (35)$$

где a_j , b_j и $c_j(t)$ определены формулами (32), причем функции $c_j(t)$ непрерывны на $[0, \infty)$ (см. § 33.3). При этом ряд (33) сходится в $C(\bar{G})$, а ряды (34) сходятся в $\mathcal{L}_2(G)$.

Докажем, что ряд (35) сходится в $\mathcal{L}_2(G)$ равномерно по t на $[0, T]$ при любом $T > 0$. Действительно, при каждом $t \in [0, \infty)$ для функции $\frac{F(x, t)}{\rho(x)}$ справедливо равенство Парсеваля – Стеклова (см. § 1.8)

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2(t) = \left\| \frac{F(x, t)}{\rho(x)} \right\|_0^2 = \int_G \frac{F^2(x, t)}{\rho(x)} dx. \quad (36)$$

Каждый член ряда (36) представляет собой неотрицательную непрерывную функцию $c_j^2(t)$, и этот ряд сходится к непрерывной функции (см. § 33.3). По лемме Дини (см. § 1.3) ряд (36) сходится равномерно на любом конечном промежутке $[0, T]$. Отсюда, оценивая остаток ряда (35) в $\mathcal{L}_2(G)$,

$$\left\| \rho(x) \sum_{j=k}^{\infty} c_j(t) X_j(x) \right\|^2 \leq \max_{t \in \bar{G}} \rho(x) \left\| \sum_{j=k}^{\infty} c_j(t) \sqrt{\rho(x)} X_j(x) \right\|^2 = \\ = \bar{C} \sum_{j=k}^{\infty} c_j^2(t) c_j(t) (X_j, X_j)_0 = \bar{C} \sum_{j=k}^{\infty} c_j^2(t),$$

закключаем, что этот ряд сходится в $\mathcal{L}_2(G)$ равномерно по $t \in [0, T]$ при любом $T > 0$.

Обозначим через u_k , u_{k0} , u_{k1} и F_k k -е частные суммы рядов (30), (33), (34) и (35) соответственно, например:

$$u_k(x, t) = \sum_{j=1}^k T_j(t) X_j(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как

$$T_j'(t) = -\lambda_j T_j(t) + c_j(t), \quad T_j \in C^2([0, \infty)),$$

$$LX_j = \lambda_j \rho X_j, \quad \alpha X_j + \beta \frac{\partial X_j}{\partial n} \Big|_S = 0,$$

$$X_j \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G}),$$

то функции u_k принадлежат $C^2(U_\infty) \cap C^1(\bar{U}_\infty)$, удовлетворяют уравнению (1')

$$\rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + Lu_k = \sum_{j=1}^k (\rho T_j'' X_j + T_j L X_j) = \\ = \sum_{j=1}^k (-\lambda_j \rho T_j X_j + \rho c_j X_j + \lambda_j \rho T_j X_j) = \rho \sum_{j=1}^k c_j X_j = F_k(x, t),$$

граничному условию (3') и начальным условиям (2')

$$u_k|_{t=0} = \sum_{j=1}^k a_j X_j(x) = u_{k0}(x),$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^k V \lambda_j b_j X_j(x) = u_{k1}(x).$$

Таким образом, построена последовательность $u_k(x, t)$, $k=1, 2, \dots$, классических решений задачи (1')—(2')—(3') таких, что справедливы предельные соотношения (22). В § 33.4 было доказано, что эта последовательность (и, стало быть, формальный ряд (30)) сходится в $\mathcal{L}_2(G)$ равномерно по t на $[0, T]$ при всех $T > 0$ к обобщенному решению $u(x, t)$ задачи (1)—(2)—(3). Построенное обобщенное решение $u(x, t)$ обладает свойствами а), б) и в), установленными в § 33.4. Итак, доказана следующая

Теорема. Если $u_0 \in \mathcal{L}_2$, $u_1 \in \mathcal{L}_2(G)$ и F непрерывна в $\mathcal{L}_2(G)$ по t на $[0, \infty)$, то обобщенное решение задачи (1)—(2)—(3) существует и представляется рядом (30) — формальным решением этой задачи.

Замечание. При $n=1$ справедлива теорема вложения: если $F \in \mathcal{L}_2(0, T)$, то $f \in C([0, T])$ и

$$\|f\|_C \leq \frac{1}{Vl} \|f\| + V \|F\|. \quad (*)$$

Действительно, из равенства

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(x') dx', \quad x_0 \in [0, T]$$

следует, что $f \in C([0, T])$. Отсюда, выбирая точку $x_0 \in [0, T]$ такой, что

$$|f(x_0)| = \frac{1}{T} \int_0^T |f(x')| dx',$$

и пользуясь неравенством Коши—Буняковского, получим (*):

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x_0)| + \int_{x_0}^x |f'(x')| dx' \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(x')| dx' + \\ &+ \int_0^x |f'(x')| dx' \leq \frac{1}{Vl} \|f\| + V \|F\|, \quad x \in [0, T]. \end{aligned}$$

Пользуясь этой теоремой и неравенствами (13) и (14), можно усилить результаты §§ 33.2, 33.4—33.6, в частности: последовательность $u_k(x, t)$, $k \rightarrow \infty$ сходится равномерно на любом $\Pi_T = [0, T] \times [0, T]$ к обобщенному решению $u(x, t)$, непрерывному на Π_∞ .

7. Существование классического решения. Возникает задача: выяснить, при каких условиях обобщенное решение (30) задачи (1)—(2)—(3) является классическим решением. Нетрудно убедиться, что ряд (30) представляет классическое решение этой задачи, если он и ряды, полученные однократным дифференцированием по всем аргументам, сходятся равномерно в любом конечном цилиндре Π_T , а ряды, полученные двукратным дифференцированием, сходятся равномерно на любом компакте из Π_∞ . Доказательство же возможности почленного дифференцирования ряда (30) в общем случае представляет значительные трудности. Поэтому мы ограничимся рассмотрением смешанной задачи с двумя переменными (x, t) в полуполосе $\Pi_\infty = (0, T) \times (0, \infty)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) - qu, \quad (37)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq T, \quad (38)$$

$$h_1 u - h_2 u_x|_{x=0} = H_1 u + H_2 u_x|_{x=T} = 0, \quad t \geq 0. \quad (39)$$

Предполагаем все $\lambda_k > 0$. Собственные функции $\{X_k\}$ образуют полную ортонормальную систему в $\mathcal{L}_2(0, T)$ (см. § 22.3) и удовлетворяют интегральному уравнению (см. § 22.2)

$$X_k(x) = \lambda_k \int_0^T \mathfrak{G}(x, y) X_k(y) dy, \quad (40)$$

где $\mathfrak{G}(x, y)$ — функция Грина оператора L (см. § 22.1). По теореме Мерсера (см. § 20.9)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X_k(x)|^2}{\lambda_k} = \mathfrak{G}(x, x), \quad (41)$$

причем ряд (41) сходится равномерно на $[0, T]$.

Докажем равномерную на $[0, T]$ сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X_k^1(x)|^2}{\lambda_k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X_k^2(x)|^2}{\lambda_k^2}, \quad (42)$$

Равномерная сходимость первого ряда (42) вытекает из интегрального уравнения (40)

$$\frac{X'_k(x)}{\lambda_k} = \int_0^1 \varphi_x(x, y) X_k(y) dy = (\varphi_x, X_k),$$

равенства Парсеваля — Стеклова (см. § 1.8)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X'_k(x)|^2}{\lambda_k^2} = |\varphi_x|^2 = \int_0^1 |\varphi_x(x, y)|^2 dy$$

и из леммы Дини (см. § 1.3). (В силу свойств функции Грина $\varphi(x, y)$ последний интеграл есть непрерывная функция на $[0, 1]$.) Равномерная сходимость второго ряда (42) вытекает из равномерной сходимости первого ряда (42) и ряда (41) и из дифференциального уравнения

$$X'_k(x) = -\frac{p'(x)}{p(x)} X_k(x) + \frac{q(x) - \lambda_k}{p(x)} X_k(x).$$

Для задачи (37) — (38) — (39) выпишем ряд (30), представляющий обобщенное решение этой задачи (см. § 33.6):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x), \quad (43)$$

$$a_k = (u_0, X_k), \quad b_k \sqrt{\lambda_k} = (u_1, X_k). \quad (44)$$

Сначала докажем: если $u_0 \in \mathcal{H}_1$ и $u_1 \in \mathcal{L}_2(0, 1)$, то ряд (30) сходится равномерно на $\bar{D}_\infty$ (к непрерывной на $\bar{D}_\infty$ функции $u(x, t)$).

Действительно, так как $u_0 \in \mathcal{H}_1$, то $Lu_0 \in \mathcal{L}_2(0, 1)$ и

$$\lambda_k (u_0, X_k) = (u_0, LX_k) = (Lu_0, X_k).$$

Отсюда, учитывая обозначения (44), в силу равенства Парсеваля — Стеклова (см. § 1.8), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |a_k|^2 = |Lu_0|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |b_k|^2 = |u_1|^2. \quad (45)$$

Применяя к ряду (43) неравенство Коши — Буниковского и учитывая равномерную сходимость ряда (41) и сходимость рядов (45), убедимся в регулярной сходимости

ряда (43) на $\bar{D}_\infty$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t| |X_k(x)| &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) |X_k(x)| \leq \\ &\leq \left[\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |a_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |b_k|^2} \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X_k(x)|^2}{\lambda_k} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Теперь докажем теорему о существовании классического решения задачи (37) — (38) — (39).

Теорема. Если u_0 , Lu_0 и u_1 принадлежат $\mathcal{H}_1$, то ряд (30) представляет классическое решение задачи (37) — (38) — (39), причем $u \in C^2(\bar{D}_\infty)$.

Доказательство. В силу условий теоремы, как и в (45), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |a_k|^2 = |L^2 u_0|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 |b_k|^2 = |Lu_1|^2. \quad (46)$$

Из сходимости рядов (46) и из равномерной сходимости рядов (41) и (42) следует регулярная сходимость на $\bar{D}_\infty$ ряда (43) и всех рядов, полученных почленным дифференцированием его по x и t один и два раза. Теорема доказана.

Замечание. Первое строгое обоснование метода Фурье для двух переменных было дано В. А. Стекловым [1]; для многих переменных — см. О. А. Ладыженская [1].

§ 34. Смешанная задача для уравнения параболического типа

В этом параграфе будет рассмотрена смешанная задача для уравнения параболического типа (см. § 4.5)

$$p \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) = -Lu + F(x, t), \quad (1)$$

$$(x, t) \in D_\infty = G \times (0, \infty);$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \bar{G}; \quad (2)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = v(x, t) \quad (x, t) \in S \times [0, \infty) \quad (3)$$

при условиях § 32.

1. Классическое решение. Принцип максимума. Классическим решением смешанной задачи (1)–(2)–(3) называется функция $u(x, t)$ класса $C^2(\bar{U}_T) \cap C(\bar{U}_T)$, $\text{grad}_x u \in C(\bar{U}_T)$, удовлетворяющая уравнению (1) в цилиндре U_T , начальному условию (2) и граничному условию (3).

Необходимыми условиями существования классического решения задачи (1)–(2)–(3) являются следующие условия гладкости:

$$F \in C(\bar{U}_T), \quad u_0 \in C^1(\bar{G}), \quad v \in C(S \times [0, \infty)),$$

и условие согласованности

$$\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_S = v(x, 0).$$

При изучении краевых задач для уравнения параболического типа весьма полезным является следующий

Принцип максимума. Пусть функция $u(x, t)$ класса $C^2(x \in G, 0 < t \leq T) \cap C(\bar{U}_T)$ удовлетворяет уравнению (1) в U_T . Тогда, если $F(x, t) \leq 0$ в цилиндре U_T , то либо $u \leq 0$ на $\bar{U}_T$, либо функция $u(x, t)$ принимает свой (положительный) максимум на цилиндре $\bar{U}_T$ на нижнем основании $G \times \{0\}$ или на боковой поверхности $S \times [0, T]$ его, т. е.

$$u(x, t) \leq \max \left\{ 0, \max_{x \in \bar{G}, t=0} u(x, t), \max_{x \in S, 0 < t \leq T} u(x, t) \right\}, \quad (4)$$

$$(x, t) \in \bar{U}_T.$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть функция $u(x, t)$ принимает положительные значения в некоторых точках цилиндра U_T , но не достигает своего (положительного) максимума ни на его нижнем основании $G \times \{0\}$, ни на боковой поверхности $S \times [0, T]$. Это значит, что найдется точка (x_0, t_0) , $x_0 \in G$, $0 < t_0 < T$, такая, что

$$u(x_0, t_0) > \max \left\{ 0, \max_{x \in \bar{G}, t=0} u(x, t), \max_{x \in S, 0 < t \leq T} u(x, t) \right\} = M > 0. \quad (5)$$

Обозначив

$$\varepsilon = u(x_0, t_0) - M > 0, \quad (6)$$

построим функцию

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{T-t}{T}.$$

Тогда

$$v(x, t) \leq u(x, t) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (x, t) \in \bar{U}_T$$

и, в силу (6), при всех (x, t) из $G \times \{0\}$ или $S \times [0, T]$ имеем

$$v(x_0, t_0) \geq u(x_0, t_0) = \varepsilon + M \geq \varepsilon + u(x, t) \geq \varepsilon + v(x, t) - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + v(x, t).$$

Отсюда следует, что функция v также принимает свое (положительное) максимальное значение на $\bar{U}_T$ в некоторой точке (x', t') , $x' \in G$, $0 < t' \leq T$, причем

$$v(x', t') \geq v(x_0, t_0) \geq \varepsilon + M. \quad (7)$$

Выпишем необходимые условия максимума функции v в точке (x', t') :

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq 0, \quad \text{grad } v = 0, \quad \Delta v \leq 0.$$

Из этих условий, а также из неравенства (7) вытекает, что в этой точке

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \text{div}(\rho \text{grad } v) + qv - F &= \\ &= \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \rho \Delta v - (\text{grad } \rho, \text{grad } v) + qv - F + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\rho}{T} - q \frac{T-t'}{T} \right) \geq qv + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\rho}{T} - q \frac{T-t'}{T} \right) = \\ &= qv \left(1 - \frac{T-t'}{2T} \right) + \frac{q\rho}{2T} > 0, \end{aligned}$$

что противоречит уравнению (1). Это значит, что неравенство (5) неверно и, следовательно, справедливо противоположное неравенство (4), что и требовалось установить.

Заменяя u на $-u$ и F на $-F$ из принципа максимума получим

Принцип минимума. Если функция $u(x, t)$ класса $C^2(x \in G, 0 < t \leq T) \cap C(\bar{U}_T)$ удовлетворяет урав-

нению (1) в Π_T и $F \geq 0$ в Π_T , то справедливо неравенство

$$u(x, t) \geq \min[0, \min_{x \in \bar{G}, t=0} u(x, t), \min_{x \in S, 0 < t \leq T} u(x, t)]. \quad (4')$$

2. Единственность и непрерывная зависимость классического решения. Применим принципы максимума и минимума для установления единственности и непрерывной зависимости классического решения смешанной задачи (1)–(2)–(3) I рода, т. е., когда в граничном условии (3) $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$u|_S = v(x, t), \quad (x, t) \in S \times [0, \infty) \quad (3_1)$$

(Требование $\text{grad}_x u \in (\Pi_-)$ для краевых задач I рода излишне; см. замечание § 4.5.)

Пусть $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1)–(2)–(3₁) и $F \in C(\Pi_-)$. Фиксируем $T > 0$ и обозначим

$$M = \|F\|_{C(\Pi_T)}, \quad M_1 = \|v\|_{C(S \times [0, T])}, \quad M_0 = \|u_0\|_{C(\bar{G})}.$$

Составим функцию

$$\chi(x, t) = u(x, t) - \frac{M}{\rho_0} t, \quad \rho_0 = \min_{x \in \bar{G}} \rho(x) > 0. \quad (8)$$

Функция χ является классическим решением смешанной задачи (1)–(2)–(3₁) с заменой F на $F - \frac{M}{\rho_0}$ и v на $v - \frac{M}{\rho_0} t$ соответственно. Учитывая, что

$$F - \frac{M}{\rho_0} \leq 0, \quad (x, t) \in \Pi_T;$$

$$v - \frac{M}{\rho_0} t \leq M_1, \quad (x, t) \in S \times [0, T],$$

и пользуясь неравенством (4), получаем оценку

$$\chi \leq \max(M_0, M_1),$$

т. е., в силу (8),

$$u(x, t) \leq \frac{M}{\rho_0} T + \max(M_0, M_1), \quad (x, t) \in \Pi_T.$$

Аналогично, вводя функцию

$$\chi_1(x, t) = u(x, t) + \frac{M}{\rho_0} t$$

и пользуясь неравенством (4'), получим противоположную оценку:

$$u(x, t) \geq -\frac{M}{\rho_0} T - \max(M_0, M_1), \quad (x, t) \in \Pi_T.$$

Итак, если $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1)–(2)–(3₁) и $F \in C(\Pi_-)$, то при любом $T > 0$ справедлива оценка

$$\|u\|_{C(\Pi_T)} \leq \max[\|u_0\|_{C(\bar{G})}, \|v\|_{C(S \times [0, T])}] + \frac{T}{\rho_0} \|F\|_{C(\Pi_T)}. \quad (9)$$

Пользуясь полученной оценкой, докажем следующую теорему.

Теорема. Классическое решение задачи (1)–(2)–(3₁) единственно и непрерывно зависит от u_0 , v и F в том смысле, что если

$$\left\{ \begin{aligned} \|F - \tilde{F}\|_{C(\Pi_T)} &\leq \varepsilon, \quad \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{C(\bar{G})} \leq \varepsilon_0, \\ \|v - \tilde{v}\|_{C(S \times [0, T])} &\leq \varepsilon_1, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

то соответствующие (классические) решения $u(x, t)$ и $\tilde{u}(x, t)$ удовлетворяют неравенству

$$\|u - \tilde{u}\|_{C(\Pi_T)} \leq \max(\varepsilon_0, \varepsilon_1) + \frac{T}{\rho_0} \varepsilon. \quad (11)$$

Доказательство. Единственность решения вытекает из того, что, в силу оценки (9), однородная задача (1)–(2)–(3₁) (при $u_0 = 0$, $v = 0$ и $F = 0$) имеет только нулевое классическое решение (см. § 1.11).

Для доказательства непрерывной зависимости составим разность $\eta = u - \tilde{u}$. Функция η является классическим решением задачи (1)–(2)–(3₁) с заменой F , u_0 и v на $F - \tilde{F}$, $u_0 - \tilde{u}_0$ и $v - \tilde{v}$ соответственно. Применяя неравенство (9) к функции η и пользуясь оценками (10), получим оценку (11). Теорема доказана.

3. Обобщенное решение. Как и для уравнения гиперболического типа, введем понятие обобщенного решения.

Пусть существуют последовательности функций $F_k \in C(\Pi_-)$, $v_k \in C(S \times [0, \infty))$ и $u_{k0} \in C(\bar{G})$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что 1) при $k \rightarrow \infty$

$$\left. \begin{aligned} F_k &\rightarrow F \text{ в } C(\Pi_T), \quad v_k \rightarrow v \text{ в } C(S \times [0, T]) \\ \text{при любом } T > 0; \quad u_{k0} &\rightarrow u_0 \text{ в } C(\bar{G}); \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

2) при каждом $k=1, 2, \dots$ существует классическое решение смешанной задачи

$$\rho \frac{\partial u_k}{\partial t} = -L u_k + F_k(x, t), \quad (1')$$

$$u_k|_{t=0} = u_{k0}(x), \quad (2')$$

$$\alpha u_k + \beta \frac{\partial u_k}{\partial n} \Big|_S = v_k(x, t). \quad (3')$$

Предположим, что существует функция $u(x, t)$, непрерывная на цилиндре $\bar{U}_\infty$ и такая, что при любом $T > 0$

$$u_k \rightarrow u, \quad k \rightarrow \infty \quad \text{в } C(\bar{U}_T). \quad (13)$$

Функцию $u(x, t)$ назовем *обобщенным решением* задачи (1)–(2)–(3).

Из определения обобщенного решения задачи (1)–(2)–(3) вытекает (ср. § 33.4): всякое классическое решение этой задачи является обобщенным решением ее; для существования обобщенного решения необходимо выполнение условий: $F \in C(\bar{U}_\infty)$, $v \in C(S \times [0, \infty))$, $u_0 \in C(\bar{G})$; обобщенное решение удовлетворяет начальному условию (2); обобщенное решение удовлетворяет уравнению (1) в обобщенном смысле, т. е. для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{U}_\infty)$ выполнено интегральное соотношение

$$\int u(x, t) \left(-\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + L \varphi \right) dx dt = \int F(x, t) \varphi dx dt, \quad (14)$$

Докажем, что для краевой задачи (1)–(2)–(3) последовательность $\{u_k\}$ равномерно сходится на любом $\bar{U}_T$.

Действительно, применяя неравенство (9) к разности $u_k - u_r$, при всех $T > 0$ получаем

$$\|u_k - u_r\|_{C(\bar{U}_T)} \leq \max \{ \|u_{k0} - u_{r0}\|_{C(\bar{G})}, \|v_k - v_r\|_{C(S \times [0, T])} \} + \frac{T}{\rho_0} \|F_k - F_r\|_{C(\bar{U}_T)},$$

откуда, в силу (12), следует, что последовательность $\{u_k\}$ сходится в себе в $C(\bar{U}_T)$. Поэтому существует функция $u(x, t)$, непрерывная на $\bar{U}_\infty$ и такая, что последовательность $\{u_k\}$ сходится к u в $C(\bar{U}_T)$ при любом $T > 0$ (см. § 1.3).

Докажем, что оценка (9) остается справедливой и для обобщенного решения $u(x, t)$ задачи (1)–(2)–(3).

Действительно, пусть $u_k(x, t)$, $k=1, 2, \dots$, — последовательность классических решений задачи (1)–(2)–(3), равномерно сходящаяся к обобщенному решению $u(x, t)$ на любом цилиндре $\bar{U}_T$. Применяя к решениям u_k оценку (9), при всех $T > 0$ получаем

$$\|u_k\|_{C(\bar{U}_T)} \leq \max \{ \|u_{k0}\|_{C(\bar{G})}, \|v_k\|_{C(S \times [0, T])} \} + \frac{T}{\rho_0} \|F_k\|_{C(\bar{U}_T)}. \quad (15)$$

Учитывая предельные соотношения (12) и (13) и переходя к пределу в неравенстве (15) при $k \rightarrow \infty$, убедимся в справедливости оценки (9).

Из оценки (9) вытекают единственность обобщенного решения задачи (1)–(2)–(3) и его непрерывная зависимость от u_0 , v и F в смысле теоремы § 34.2.

4. **Существование обобщенного решения.** Существование обобщенного решения докажем для смешанной задачи (1)–(2)–(3) при $F=0$ и $v=0$:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -L u, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0. \quad (16)$$

В § 32.3 было построено формальное решение задачи (16) в виде ряда Фурье по собственным функциям $\{X_j\}$ оператора L ,

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-\lambda_j t} X_j(x), \quad a_j = (u_0, X_j)_0. \quad (17)$$

Предположим, что $u_0 \in \mathcal{H}_1$. Докажем, что при этом условии ряд (17), представляющий формальное решение задачи (16), сходится равномерно на $\bar{U}_\infty$ и определяет обобщенное решение $u(x, t)$ этой задачи.

Действительно, пользуясь теоремой разложения 1 § 21.4 (см. замечание), представим функцию u_0 в виде регулярно сходящегося на $\bar{G}$ ряда Фурье по собственным функциям оператора L ,

$$u_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_j(x). \quad (18)$$

Обозначим через u_k и u_{k0} частные суммы рядов (17) и (18) соответственно. Функции u_k , $k=1, 2, \dots$, являются классическими решениями задачи (16) с заменой u_0 на u_{k0} .

причем $u_{k0} \rightarrow u_0$, $k \rightarrow \infty$ в $C(\bar{G})$. Поскольку все $\lambda_j > 0$, то ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (17), мажорируется на $\bar{G}_\infty$ равномерно сходящимся рядом на $\bar{G}$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j e^{-\lambda_j t} X_j(x)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j X_j(x)|.$$

Поэтому последовательность $\{u_k\}$ сходится равномерно на $\bar{G}_\infty$ к обобщенному решению $u(x, t)$ задачи (16). Итак, установлена

Теорема. Если $u_0 \in \mathcal{H}_L$, то обобщенное решение задачи (16) существует и представляется регулярно сходящимся на $\bar{G}_\infty$ рядом (17) — формальным решением этой задачи.

5. Существование классического решения. Как и в § 33.7, ограничимся рассмотрением смешанной задачи с двумя переменными (x, t) в полуполосе $\bar{G}_\infty = (0, t) \times (0, \infty)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) - qu, \quad (19)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (20)$$

$$h_1 u - h_2 u_x|_{x=0} = H_1 u + H_2 u_x|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0. \quad (21)$$

Теорема. Если $u_0 \in \mathcal{H}_L$, то ряд (17) дает классическое решение $u(x, t)$ задачи (19) — (20) — (21), бесконечно дифференцируемое по t при $t > 0$, $0 \leq x \leq l$.

Доказательство. По теореме § 34.4 $u \in C(\bar{G}_\infty)$. Далее, пользуясь равномерной сходимостью рядов (41) и (42) § 33.7 и сходимостью первого ряда (45) § 33.7, как и в § 33.7, устанавливаем регулярную сходимость рядов

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-\lambda_j t} X_j^{(k)}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad k = 1, 2,$$

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (-\lambda_j)^k e^{-\lambda_j t} X_j(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$0 \leq x \leq l, \quad t \geq \varepsilon$$

(при любом $\varepsilon > 0$). При этом нужно учесть, что величины $\lambda_j^k e^{-\lambda_j t}$ равномерно ограничены при $j = 1, 2, \dots, t \geq \varepsilon$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- Ж. Адамар
1. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. — М.: Наука, 1978.
- А. Антоси, Я. Микусинский, Р. Сикорский
1. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. — М.: Мир, 1976.
- В. Я. Арсенин
1. Методы математической физики и специальные функции. — М.: Наука, 1974.
- Д. В. Беклемышев
1. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1960.
- А. В. Бицадзе
1. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976.
- Д. И. Блохинцев
1. Основы квантовой механики. — М.: Наука, 1976.
- Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов и И. Т. Тодоров
1. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука, 1969.
- Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков
1. Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1976.
- Г. Бремерман
1. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. — М.: Мир, 1968.
- Ю. А. Бричков и А. П. Прудников
1. Интегральные преобразования обобщенных функций. — М.: Наука, 1977.
- Б. М. Будак, А. А. Самарский и А. Н. Тихонов
1. Сборник задач по математической физике. — М.: Наука, 1972.
- Н. Н. Векун
1. Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959.
2. О метагармонических функциях. — Труды Тбилисского матем. ин-та, 1943, XII, 105—174.
- В. С. Владимиров
1. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. — Труды матем. ин-та АН СССР, 1961, 61, 3—156.
2. Методы теории функций многих комплексных переменных. — М.: Наука, 1964.
3. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.

- В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вахари, Х. К. Каримова, Ю. В. Сидоров и М. И. Шабунин
1. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1974.
- И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилор
1. Обобщенные функции, вып. 1, 1959, вып. 2, 3, 1968. — М.: Физматгиз.
- И. С. Градштейн и И. М. Рыжик
1. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
- П. Дирак
1. Основы квантовой механики. — М.: Гостехиздат, 1932.
- В. А. Диткин и А. П. Прудников
1. Операционное исчисление. — М.: Высшая школа, 1975.
- М. А. Елсграфов
1. Аналитические функции. — М.: Наука, 1968.
- А. Земаин
1. Интегральные преобразования обобщенных функций. — М.: Наука, 1974.
- В. А. Ильин
1. О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений. УМН, 1960, XV, вып. 2, 97—154.
- Р. Вост
1. Основы теории квантованных полей. — М.: Мир, 1967.
- А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин
1. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
- Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер и М. М. Смирнов
1. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1973.
- Л. Д. Кудрявцев
1. Основы математического анализа, тт. I—II. — М.: Высшая школа, 1981.
- Р. Курант и Д. Гильберт
1. Методы математической физики, тт. I—II. — М.: Гостехиздат, 1951.
- М. М. Лаврентьев
1. О некоторых некорректных задачах математической физики. — М.: Изд-во СОАН, 1962.
- М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат
1. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.
- О. А. Ладыженская
1. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
- Ж.-Л. Лионс
1. Support dans la transformation de Laplace. — J. Analyse Math., 1952—1953, 2, 369—380.
- А. М. Ляпунов
1. Собрание сочинений. — М.: изд-во АН СССР, 1954, т. I.
- А. И. Мальцев
1. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1975.

- Г. И. Марчук
1. Методы расчета ядерных реакторов. — М.: Госатомиздат, 1961.
- А. Мессия
1. Квантовая механика, т. I. — М.: Наука, 1978.
- В. П. Михайлов
1. Дифференциальные уравнения и частных производных. — М.: Наука, 1976.
- С. Г. Михлин
1. Курс математической физики. — М.: Наука, 1968.
- А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров
1. Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1978.
- С. М. Никольский
1. Курс математического анализа, тт. I—II. — М.: Наука, 1975.
- Н. Г. Петровский
1. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Наука, 1970.
2. Лекции по теории интегральных уравнений. — М.: Наука, 1965.
- Г. Н. Положий
1. Уравнения математической физики. — М.: Высшая школа, 1964.
- Л. С. Понтрягин
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974.
- Ф. Рисси и Б. Секефальви-Надь
1. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1972.
- Ю. В. Сидоров, М. В. Федорук и М. И. Шабунин
1. Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1976.
- В. И. Смирнов
1. Курс высшей математики, т. II. — М.: Наука, 1967.
2. Курс высшей математики, т. IV, ч. I. — М.: Наука, 1974.
3. Курс высшей математики, т. III, ч. 2. — М.: Наука, 1974.
- М. М. Смирнов
1. Задачи по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1975.
- С. Л. Соболев
1. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
2. Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales. — Matem. сб., 1936, 1 (43), 39—72.
- Ю. В. Сохоцкий
1. Об определенных интегралах, употребляемых при разложении в ряды. — С.-Петербург, 1873.
- В. А. Стеклов
1. Основные задачи математической физики, ч. I—II. — Петроград, 1922—1923.
- В. В. Степанов
1. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959.
- Р. Стратер и А. Вайтман
1. РСТ, спин и статистика и все такое. — М.: Наука, 1966.
- А. Н. Тихонов
1. О методах решения некорректно поставленных задач. Труды международного конгресса математиков (Москва—1966). — М.: Мир, 1968, 720—722.

2. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur. *Matem. сб.*, 1935, 42, 199—216.
- А. Н. Тихонов и В. Я. Арсенин
1. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974.
- А. Н. Тихонов, В. К. Иванов и М. М. Лаврентьев
1. Некорректно поставленные задачи, сб. «Дифференциальные уравнения с частными производными». — М.: Наука, 1970, 224—231.
- А. Н. Тихонов и А. А. Самарский
1. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
- Г. М. Фиктегольд
1. Курс дифференциального и интегрального исчисления, тт. I—III. — М.: Наука, 1970.
- Дж. Уизем
1. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
- Л. Хёрмандер
1. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — М.: Мир, 1965.
2. О делении обобщенных функций на полиномы. — *Сб. Математика*, 1969, 3, 5, 117—130.
- Л. Шварц
1. Математические методы для физических наук. — М.: Мир, 1965.
2. *Théorie des distributions*, v. I—II. — Paris, 1950—1951.
3. *Transformation de Laplace des distributions*. — *Medd. Lunds Univ. mat. Semin. (Supplementband)*, 1952, 196—206.
- Г. Е. Шилов
1. Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Наука, 1965.

- Адлера пример 20
Адмитанс 187
Алгебра 141
— — — — — $\mathcal{A}'$ 142
— — — — — $\mathcal{A}''$ 176
— — — — — $\mathcal{A}'''$ 188
— — — — — $\mathcal{A}^{(4)}$ 181
Альтернатива Фредгольма 295, 298
Арцела — Асколи лемма 303
- Бесконечные неравенства 32
— — — — — уравнение 345
— — — — — функции 346
Бета-функция 123
Билинейное разложение ядер 312, 313
Биргерса уравнение 305
- Волновое уравнение 45—47
Волновой оператор (Даламбера) 47
— — — — — потенциал 213, 216
Вольтерра уравнение 278
— — — — — ядро 276
Вырожденное ядро 286
- Гамма-функция 119
Гермитическая функция 359
Гермитическое соотношение 467
Гарнака неравенство 426
Галлигольда уравнение 56, 435
Гидродинамические уравнения 59
Гильберта — Шмидта теорема 310, 318
Грина формула 232, 240
— — — — — вторая 329
— — — — — первая 328
— — — — — функции задачи Дирака 423, 459
— — — — — Штурма — Лиувилля 338, 339
Гурса задача 75, 247
Губинского принцип 231
- Даламбера оператор 47
— — — — — формула 227, 240
Данные Коши 70
Двойной слой 119
Дирака уравнение 64
— — — — — δ -функции 64, 87
Дирака задача 73, 412
Диффузии уравнение 47, 49
Диффузии волны 233, 234
- Дробного дифференцирования оператор 143
— — — — — интегрированный оператор 143
Дли Пуа-Рейноса лемма 95
Дюамеля интеграл 186
- Ентца теорема 320
- Задача Гурса 75, 247
— — — — — Дирака 73, 412
— — — — — корректно поставленная 77
— — — — — Коши 69, 70
— — — — — обобщенная 224, 266
— — — — — краевая 49, 78, 73
— — — — — Неймана 73, 412
— — — — — смешанная 70, 74, 404
— — — — — Тракоты 76
— — — — — Штурма — Лиувилля 338
Запаздывающий потенциал 216
Зоннерфельда условия излучения 50, 470
- Изображение 178
Импеданс 187
Интеграл Гаусса 309
— — — — — Дирака 186
— — — — — Лебега 20
— — — — — Пуассона 420
— — — — — типа потенциала 24
— — — — — Френеля 167
— — — — — энергии 331, 480
Интегральное уравнение 270
— — — — — Вольтерра 278
— — — — — Милна 285
— — — — — Пайерля 286
— — — — — с вырожденным ядром 288
— — — — — с ядром 285
— — — — — с ядром 301
— — — — — Фредгольма 270
— — — — — однородное 270
— — — — — со ядром 270
Истинное изображение представимости 310
Измеримая функция 273
- Квантовое число магнитное 477
— — — — — орбитальное 477
Келлога метод 322
Келлиана преобразование 372
Кирхгофа формула 226
Классические решение 50, 479
Клейна — Гординга — Фока уравнение 54

- Уравнение параболического типа 37,
62, 63
— переноса (кINETические) 51
— Пуассона 49
— смешанного типа 58
— состояния 52
— Шре — Гордон 240
— телеграфное 53
— теплопроводности 48
— Трикоми 67
— Чаплыгина 76
— Шрёдингера 54, 470
— электростатика 53
— эллиптического типа 57, 67, 68
— эллиптического 470
Условия граничные 46, 68
— начальные Эммерфельда 60, 439
— начальные 46, 69
- Финитная функция 14, 54
Формула Грина 252, 300
— — — — — вторая 320
— — — — — первая 328
— Даламбера 227, 240
— Кирхгофа 236
— Коши 402
— Коши — Грина 403
— Лапласа 327
— Лебнана 106
— Шварца 122
— Пуассона 170, 430
— Родрига 377
— сложения для полиномов Лежандра 386
— суммирования Пуассона 170
— Шмидта 315
Формулы Сохоцкого 99
Фредгольма альтернатива 295, 338
— интегральные уравнения 270
— теоремы 291, 295, 306
Френкеля интеграл 167
Фундаментальное решение 192
— — волнового оператора 199
— — линейного дифференциального оператора 198
— — оператора Гельмгольца 200
— — — Дирака 207
— — — Клебша — Гордона — Фока 206
— — — Коши — Римана 205
— — — Лапласа 192
— — — переноса 205
— — — теплопроводности 198
— — — Шрёдингера 207
— — — спектрального оператора 142
Фундаментальная теорема 388
Функция Лежандра присоединенные 387
— — — — — орфические 374, 383
— — — — — ортогональность 375, 384
— — — — — полнота 381, 384
— Ханкеля 357
— шаровые 387
Функционал линейный 36
Функция Бесселя 348
— — — — — корня 350
— — — — — ортогональность 347
- Функции Бесселя, полнота 356
— — — — — рекуррентные соотношения 349
— — — — — алгебра 192
— — — — — гармонические 359
— Грина задача Дирихле 423, 459
— — — — — Штурма — Лиувилля 333, 339
— — — — — измерения 17
— — — — — минимума аргумента 358
— — — — — Неймана 357
— — — — — аппроксимация 30
— — — — — обобщенно-гармоническая 369
— Римана 352
— суммируемая 19, 30
— финитная 14, 54
— цилиндрическая 343, 357
Фурье коэффициенты 31
— метод 355, 464
— преобразование 158, 160, 162, 164, 165
— ряд 31
- Ханкеля преобразование 359
— — — — — функция 357
Характеристическая длина 59
— — — — — поверхности (характеристика) 59
Характеристический импульс 60
Характеристическое уравнение 59
— — — — — члены 271
- Цилиндрические функции 343, 357
- Чаплыгина уравнение 76
- Шаровые функции 367
Шварца теорема 121
Шмидта процесс ортогонализации 30
— — — — — формула 315
Шрёдингера уравнение 54, 470
Штурма — Лиувилля задача 330
- Эйлера уравнения движения 62
Эйлера интеграл 119, 123
Электромагнитный потенциал 53
Электростатика уравнение 53
Эллиптическое уравнение 470
Эрмита ядро 301
Эрмита сопряженное ядро 279
- Ядра исторические 276
— — — — — симметричные 320
Ядро Вольтерра 278
— — — — — ядренное 286
— — — — — интегрального оператора 57
— — — — — уравнения 276
— — — — — непрерывное 271
— — — — — положительное определенное 317
— — — — — полнота 280
— — — — — слабо полнота 280
— — — — — тривиальное 361
— — — — — сопряженное 279