III ТОМ

# КУРС ФИЗИКИ

Ф. КРАУФОРД

# ВОЛНЫ

530.1
К 78
УДК 530.145.61

WAVES
BERKELEY PHYSICS COURSE
volume 3
Frank S. CRAWFORD, Jr.
McGraw-Hill Book Company

**Волны.** Ф. Крауфорд. Перевод с англ., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974.

Книга представляет собой третий том курса общей физики, созданного преподавателями Калифорнийского университета в Беркли. Она является курсом волновых явлений, в котором основной упор делается на общие идеи и принципы, а многочисленные примеры из различных областей современной физики (звук, свет, плазма и другие явления) рассматриваются как применение и пояснение этих принципов.
Таблиц 11. Иллюстраций 142. Библ. названий 40.

© Перевод на русский язык. Издательство «Наука», 1974.

К $\frac{20402—006}{053\,(01)-74}$ 97-73

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие общего редактора русского перевода . . . . . 5
Предисловие редактора перевода III тома . . . . . 6
Из предисловия к Берклеевскому курсу физики . . . . . 8
Из предисловия к III тому . . . . . 9
Указания для преподавателей и студентов . . . . . 11

Глава 1. **Свободные колебания простых систем** . . . . . 17

1.1. Введение (17). 1.2. Свободные колебания систем с одной степенью свободы (18). 1.3. Линейность и принцип суперпозиции (28). 1.4. Свободные колебания систем с двумя степенями свободы (31). 1.5. Биения (42). Задачи и домашние опыты (49).

Глава 2. **Свободные колебания систем со многими степенями свободы**

2.1. Введение (57). 2.2. Моды поперечных колебаний непрерывной струны (59). 2.3. Общий случай движения непрерывной струны и фурье-анализ (67). 2.4. Моды дискретной системы с $N$ степенями свободы (78). Задачи и домашние опыты (94).

Глава 3. **Вынужденные колебания** . . . . . 103

3.1. Введение (103). 3.2. Вынужденные колебания одномерного гармонического затухающего осциллятора (104). 3.3. Резонансы в системе с двумя степенями свободы (117). 3.4. Фильтры (121). 3.5. Вынужденные колебания замкнутых систем со многими степенями свободы (129). Задачи и домашние опыты (142).

Глава 4. **Бегущие волны** . . . . . 149

4.1. Введение (149). 4.2. Гармонические бегущие волны в одномерном пространстве и фазовая скорость (150). 4.3. Показатель преломления и дисперсия (166). 4.4. Импеданс и поток энергии (181). Задачи и домашние опыты (202).

Глава 5. **Отражение** . . . . . 210

5.1. Введение (210). 5.2. Согласованная нагрузка (210). 5.3. Отражение и прохождение (217). 5.4. Согласование импедансов двух прозрачных сред (228). 5.5. Отражение в тонких пленках (233). Задачи и домашние опыты (235).

Глава 6. **Модулированные колебания, импульсы и волновые пакеты** . 247

6.1. Введение (247). 6.2. Групповая скорость (248). 6.3. Импульсы (257). 6.4. Фурье-анализ импульсов (270). 6.5. Фурье-анализ бегущих волновых пакетов (281). Задачи и домашние опыты (284).

Глава 7. **Волны в пространстве двух и трех измерений** . . . . . 299
7.1. Введение (299). 7.2. Гармонические плоские волны и вектор распространения (300). 7.3. Волны в воде (312). 7.4. Электромагнитные волны (318). 7.5. Излучение точечного заряда (328). Задачи и домашние опыты (342).

Глава 8. **Поляризация** . . . . . 352
8.1. Введение (352). 8.2. Описание состояний поляризации (353). 8.3. Образование поляризованных поперечных волн (364). 8.4. Двойное лучепреломление (375). 8.5. Ширина полосы, время когерентности и поляризация (383). Задачи и домашние опыты (394).

Глава 9. **Интерференция и дифракция** . . . . . 404
9.1. Введение (404). 9.2. Интерференция между двумя точечными когерентными источниками (405). 9.3. Интерференция между двумя независимыми источниками (416). 9.4. Сколь велик может быть «точечный» источник света? (420). 9.5. Угловая ширина пучка бегущих волн (423). 9.6. Дифракция и принцип Гюйгенса (427). 9.7. Геометрическая оптика (447). Задачи и домашние опыты (464).

Дополнения . . . . . 482
Д.1. Примеры микроскопических слабо связанных идентичных осцилляторов (482). Д.2. Дисперсионное соотношение для волн де Бройля (484). Д.3. Проникновение частицы в область пространства, «запрещенную» классической механикой (486). Д.4. Фазовая и групповая скорости волн де Бройля (488). Д.5. Волновое уравнение для волн де Бройля (488). Д.6. Электромагнитное излучение одномерного «атома» (489). Д.7. Время когерентности и оптические биения (490). Д.8. Почему небо голубое? (490). Д.9. Электромагнитные волны в материальной среде (493).

Приложение I . . . . . 509
П.1. Ряды Тейлора (509). П.2. Часто используемые ряды (509). П.3. Суперпозиция гармонических функций (510). П.4. Векторные тождества (512).

Приложение II. О построении электрических единиц в системе СИ 512
Таблицы . . . . . 515
Литература . . . . . 520
Предметный указатель . . . . . 521

## ПРЕДИСЛОВИЕ ОБЩЕГО РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Мы являемся свидетелями возникновения новых отраслей физики и все более глубокого проникновения ее во все области современной науки и техники. Возникает вопрос: как правильно поставить преподавание общей физики, являющейся основой мировоззрения и специальных знаний будущего ученого и инженера? Что действительно важно понять и знать и чем можно пренебречь?

Вопросы об улучшении преподавания общего курса физики часто обсуждаются, однако принимаемые решения обычно не идут дальше очередного изменения программ. Одной из попыток создания современного курса общей физики были «Фейнмановские лекции по физике», получившие у нас заслуженное признание. Другая попытка радикального решения этой проблемы была предпринята в университете Беркли (США, Калифорния), где в 1961 г. был создан специальный комитет, состоявший из ученых, поставивших своей целью создание учебника нового типа. Первые два тома этого учебника (механика, электричество и магнетизм) вышли в 1965 г., в последние годы закончено издание трех остальных томов (волны, квантовая и статистическая физика). Кроме того, три небольшие книги содержат описание тридцати шести работ Берклеевской физической лаборатории, идейно связанной с новым общим курсом.

Создатели Берклеевского курса стремились изложить в учебнике классическую физику, органически связав ее с основными идеями специальной теории относительности, квантовой физики и статистики,— именно в этом-то и заключены основные достоинства учебника.

Курс предназначен не только для физиков, но и для будущих инженеров, химиков и биологов. Объем его значительно превосходит претензии даже физиков и оставляет поэтому как преподавателю, так и студенту большую свободу в выборе материала.

Следует отметить прекрасную организацию курса. Превосходные рисунки, большое количество задач различной трудности (часто из смежных с физикой областей), описание классических опытов и выдержки из оригинальных работ увеличивают ценность и привлекательность курса.

Инициатива перевода на русский язык Берклеевского курса физики в значительной степени принадлежит проф. С. П. Капице. Настоящий том отредактирован проф. А. О. Вайсенбергом.

Мы уверены, что Берклеевский курс физики окажется интересным и полезным широкому кругу учащихся и преподавателей.

*А. И. Шальников*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА III ТОМА

Третий том Берклеевского курса физики посвящен колебаниям и волнам. Он написан профессором Калифорнийского университета Ф. С. Крауфордом, который занимается также исследованием свойств элементарных частиц, в частности нейтральных К-мезонов.

В курсе общей физики студенты обычно получают разрозненные сведения о механических колебаниях, звуке, оптике. Эти разделы курса по вечной нехватке времени кратки, но содержат повторения, более или менее произвольно выбранные детали, а основным идеям науки о колебаниях, охватывающей всю физику, часто уделяется скромное место. Недостатки такого преподавания давно осознаны, и идея о едином курсе волновых явлений не нова. Она была осуществлена в прекрасной книге Г. С. Горелика «Колебания и волны», предназначенной для студентов старших курсов и вышедшей в 1950 г.

Автор данного курса следует тому же принципу. Ему удалось создать элементарный курс, посвященный основным идеям науки о колебаниях. В то же время благодаря многочисленным примерам из различных областей классической и современной физики в книге удачно выдержано разумное соотношение между общими принципами и их конкретными проявлениями.

Особенностью третьего тома, отличающей его от других учебников, являются «домашние опыты», которыми иллюстрированы почти все основные идеи. Преподавателям физики из собственной практики известно, что интересные и поучительные опыты и демонстрации по колебаниям и волнам доступны на любом техническом уровне. Автор широко использовал эту возможность. Он приводит в книге описание большого числа опытов, которые требуют лишь самого простого, подручного или легко приобретаемого оборудования. В общем плане книги эти опыты имеют большое значение, и мы их усиленно рекомендуем. Они призваны увеличить активность студента, развить его наблюдательность и дать возможность самостоятельно создать и изучить явление. Не все опыты являются чем-то завершенным, часть из них можно считать предложением обдумать то или иное, легко воспроизводимое, явление. Мы надеемся, что постепенно студент сможет вступить в соревнование с автором и улучшить предложенные опыты или даже придумать свои. Во многих случаях предлагаемые в конце каждой главы задачи тесно связаны с опытами. Следует иметь в виду, что принесенная книгой польза будет пропорциональна числу продуманных и проделанных опытов и решенных задач.

При переводе мы столкнулись с рядом трудностей. Они объясняются главным образом широким диапазоном рассмотренных в книге вопросов, встречающимися полужаргонными и бытовыми выражениями и качественным характером изложения многих мест книги. Мы не пытались «улучшать» текст и отметили часть затруднений в примечаниях.

Еще одна трудность вызвана тем, что автор в очень многих реальных и мысленных опытах использует «slinky» — тесно навитую, идеально растягивающуюся спиральную пружину, представляющую собой неизвестную у нас игрушку (см. примечание на стр. 24). Мы нигде не пытались заменить «slinky» другим типом связи и оставили соответствующие опыты без изменения, полагаясь на изобретательность или воображение читателя.

Редактор надеется, что книга будет полезна студентам и преподавателям. Он будет благодарен за замечания о недостатках перевода и издания.

*А. О. Вайсенберг*

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К БЕРКЛЕЕВСКОМУ КУРСУ ФИЗИКИ

Предлагаемый элементарный курс физики для колледжей рассчитан на двухлетнее обучение студентов, специализирующихся в естественных и технических науках. Намерение авторов состояло в том, чтобы представить элементарную физику, насколько возможно, в таком виде, в каком она используется самими физиками, активно работающими в этой науке. Мы пытались создать такой курс, в котором особое внимание было бы уделено основам физики и последовательно изложены основные идеи специальной теории относительности, квантовой и статистической физики.

Наш курс доступен любому студенту, который знает физику в объеме средней школы. Курс математики, состоящий из дифференциального и интегрального исчисления, должен изучаться параллельно.

В настоящее время в США подготавливается к печати несколько новых курсов физики для колледжей. Идея их создания занимала многих физиков; она явилась следствием прогресса в естественных и технических науках и возрастающих требований к преподаванию естественных наук в средней и высшей школах. Наш собственный курс был задуман в обсуждениях, проходивших в 1961 г. с Ф. Моррисоном из Корнелльского университета и Ч. Киттелем. Мы получили поддержку от Дж. Мэйса и его коллег из Национального научного фонда и У. Мишеля, который был тогда председателем комиссии по преподаванию физики в колледжах. Для руководства курсом на его начальных стадиях был организован неофициальный комитет. Вначале он состоял из Л. Альвареца, У. Фреттера, Ч. Киттеля, У. Найта, Ф. Моррисона, Э. Парселла, М. Рудермана и Дж. Захариаса. Комитет собрался впервые в мае 1962 г. в Беркли и наметил предварительные основы совершенно нового курса физики. Из-за большой занятости некоторых членов комитета состав его был частично изменен, и с января 1964 г. этот комитет включал нижеподписавшихся лиц. Участие других авторов указано в предисловиях к отдельным томам.

Предварительные обсуждения оказали существенное влияние на окончательный результат нашей работы. В этих обсуждениях были детально рассмотрены проблемы, которые, как мы считали,



следует излагать начинающим студентам колледжа естественных и технических наук. Мы не задавались целью создать курс специально для выдающихся студентов, но старались объяснить основы физики со свежих и уже установившихся точек зрения. Поэтому некоторые части курса могут оказаться для преподавателей такими же новыми, как для студентов.

Курс состоит из пяти томов: I. Механика (Киттель, Найт, Рудерман). II. Электричество и магнетизм (Парселл). III. Волны (Крауфорд). IV. Квантовая физика (Вихман). V. Статистическая физика (Рейф). Авторы каждого тома могли по своему усмотрению выбирать стиль и метод изложения, наиболее соответствующие предмету.

Работа над курсом побудила А. Портиса создать новую лабораторию общей физики, известную теперь под названием Берклеевской физической лаборатории. Может показаться, что в нашем курсе, излагающем основы физики, эксперименту уделено недостаточное внимание. Дело, однако, в том, что важнейшие эксперименты выполняются в лаборатории, которая создана специально для того, чтобы дополнить курс лекций.

*Ю. Комминс, У. Найт, А. Портис, Ф. Рейф, Э. Вихман, Ф. Крауфорд, Ф. Моррисон, Э. Парселл, М. Рудерман, Ч. Киттель*, председатель. Беркли, Калифорния

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К III ТОМУ

Этот том посвящен изучению волн — чрезвычайно обширной области, включающей в себя волны в воде, сейсмические, звуковые, световые, радиоволны, волны де Бройля и многие другие. Небольшая часть каждого из этих волновых явлений, например «сверхзвуковые волны в воде», может стать специальностью, полностью поглощающей силы исследователя, а соответствующая литература заполнит не одну библиотечную полку. Тем не менее «узкие» специалисты, исследующие те или иные, на первый взгляд несвязанные, волновые явления, найдут общий язык и смогут понять друг друга. Этот язык основан на понятии волны.

Главная цель книги — познакомить студента с основными идеями, общими для всех волновых явлений, а не специальное изучение звука, волновой оптики, электромагнитных волн, упругих волн и т. д.

Вторая цель книги — иллюстрировать конкретными примерами интересных и важных явлений общие приципы и показать тем самым их широкую применимость и универсальный характер. За каждой новой идеей, обычно излагаемой на примере простейшей системы, следуют ее применения к самым различным физическим системам: струнам, пружинам, передающим линиям, музыкальным трубам, световым пучкам и т. д. и т. п.

Эти примеры должны помочь студенту в самостоятельных поисках аналогий между различными волновыми явлениями и в применении таких аналогий к новым явлениям. Хорошо известно, что аналогии и догадки рискованны и таят опасность ошибок. Но вспомним об аналогии между волнами в упругой среде и световыми волнами в «эфире». Эта аналогия привела Максвелла к его знаменитым уравнениям.

Существенной по значению и объему частью этого тома являются «домашние опыты». Они почти не требуют специального оборудования. Мы сознаем важность обычных лекционных и лабораторных опытов. Но домашние опыты, выполняемые студентом самостоятельно, должны доставить ему радость непосредственного контакта с явлением и помочь развитию наблюдательности.

Всем важным идеям, обсуждаемым в книге, соответствует по крайней мере один домашний опыт. Опыты предназначены не для лаборатории, а для дома, где в любой удобный момент читатель может их, не торопясь, проделать, заново продумать, повторить и усовершенствовать. Многие из них носят характер демонстраций, а не опытов.

Автор надеется, что домашние опыты доставят читателю удовлетворение: он сможет создать своими руками физическое явление и постичь его красоту.

*Ф. Крауфорд*

## УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ И СТУДЕНТОВ

Организация книги. Бегущие волны с точки зрения физики и математики представляют собой выдающееся по значению и красоте явление. У автора было искушение начать эту книгу с простейших волн. Все же методически кажется более удобным начать с совсем простых систем и лишь затем перейти к системам с бесконечно большим числом степеней свободы, какими являются волны.

Глава 1. Свободные колебания простых систем. Мы начинаем со свободных колебаний одномерного гармонического осциллятора, обращая особое внимание на физические проявления таких свойств системы как инерция и возвращающая сила, на физический смысл величины $\omega^2$ и на условия гармоничности колебаний реальной системы. Затем мы переходим к свободным колебаниям двух связанных осцилляторов и вводим понятие нормальной моды колебаний, рассматривая моду как простой «протяженный» гармонический осциллятор, все части которого колеблются с одинаковой частотой и фазой. Величина $\omega^2$ для определенной моды имеет тот же физический смысл, что и для одномерного осциллятора.

Что можно опустить. На протяжении всей книги мы постоянно возвращаемся к рассмотрению нескольких физических систем. Преподаватель и студент из-за недостатка времени не смогут изучить все эти системы. В примерах 2 и 8 рассмотрены продольные колебания масс и пружин для одной (пример 2) и двух (пример 8) степеней свободы. В следующих главах мы расширяем примеры продольных колебаний, переходя к системам с бóльшим числом степеней свободы и к непрерывным системам, которые используются как модели звуковых волн сжатия. Если преподаватель не предполагает рассматривать звуковые колебания, он может с самого начала отказаться от изучения продольных колебаний. То же можно сказать о примерах 4 и 10, где рассмотрены колебания в цепях $LC$ с одной или двумя степенями свободы. В следующих главах мы переходим к изучению $LC$-цепочек и непрерывных линий передач. Преподаватель, который не собирается рассматривать эти явления, может с самого начала пропустить примеры, связанные с цепями. При этом у него остается возможность подробного изучения электромагнитных волн

на базе уравнений Максвелла (глава 7). Не отказывайтесь от рассмотрения поперечных колебаний (примеры 3 и 9).

Домашние опыты. Мы усиленно рекомендуем опыт 1.24 (волны в тазу с водой) и связанную с ним задачу 1.25. В отсутствие специальной лекционной демонстрации связанных маятников домашний опыт 1.8 может заменить ее.

Глава 2. Свободные колебания систем со многими степенями свободы. В этой главе мы переходим к рассмотрению систем с очень большим числом степеней свободы и находим моды поперечных колебаний (стоячие волны) непрерывной струны, определяем волновое число $k$ и вводим понятие о дисперсионном соотношении, связывающем $\omega$ и $k$. Мы используем моды непрерывной струны, чтобы ввести фурье-анализ периодических функций (п. 2.3). В п. 2.4 дано точное дисперсионное соотношение для струны с точечными грузами.

Что можно отпустить. Для студентов, знакомых с фурье-анализом, п. 2.3 может оказаться лишним. В примере 5 (п. 2.4, ряд следующих друг за другом связанных маятников) рассмотрена простейшая система с порогом со стороны низких частот. Она используется в дальнейшем для объяснения свойств других систем, имеющих такой порог. Если преподаватель не думает рассматривать системы, подверженные действию вынуждающей силы при частотах, меньших пороговой (волноводы, ионосфера, полное отражение света в стекле, проникновение волн де Бройля через потенциальные барьеры, фильтры высокой частоты), он может пропустить пример 5.

Глава 3. Вынужденные колебания. Главы 1 и 2 начинаются со свободных колебаний гармонического осциллятора и заканчиваются свободными стоячими волнами в замкнутых системах. В главах 3 и 4 мы рассматриваем вынужденные колебания, вначале для замкнутых систем (глава 3), где мы обнаруживаем «резонансы», а затем для открытых систем (глава 4), где возникают бегущие волны. В п. 3.2. рассмотрены вынужденные колебания одномерного осциллятора с затуханием как в переходном, так и в установившемся режиме. Затем мы переходим к системам с двумя или большим числом степеней свободы и обнаруживаем у таких систем резонансы, соответствующие каждой моде свободных колебаний. Мы рассматриваем также действие вынуждающей силы на замкнутые системы при частотах, меньших частоты низшей (или больших самой высокой) моды, устанавливаем существование «экспоненциальных волн» и объясняем действие фильтров.

Что можно опустить. Можно не рассматривать переходные процессы (п. 3.2), а также действие вынуждающей силы при частотах ниже пороговой.

Домашние опыты. Для опытов 3.8 (вынужденные колебания системы из двух связанных маятников) и 3.16 (механический полосовой фильтр) нужен проигрыватель. Эти опыты могут служить прекрасной лекционной демонстрацией экспоненциальных волн,



возникающих в тех случаях, когда частота вынуждающей силы меньше пороговой частоты.

Глава 4. Бегущие волны. Бегущие волны в этой главе трактуются как результат вынужденных колебаний открытых систем (в противоположность стоячим волнам, возникающим в результате вынужденных колебаний замкнутых систем, рассмотренных в главе 3). Остальная часть этой главы посвящена понятиям фазовой скорости (включая дисперсию) и импеданса бегущей волны. Мы противопоставляем понятия, характерные для бегущей волны (фазовая скорость и импеданс), понятиям, характерным для стоячей волны (инерция и возвращающая сила), и объясняем фундаментальное различие фазовых соотношений в стоячей и бегущей волне.

Домашние опыты. Мы рекомендуем опыты 4.12 (водяная призма) и 4.18 (измерение солнечной постоянной на поверхности Земли).

Глава 5. Отражение. К концу главы 4 мы уже знакомы с одномерными стоячими и бегущими волнами и в пятой главе переходим к суперпозиции стоячих и бегущих волн. При выводе коэффициентов отражения мы исходим не из граничных условий, предпочитая «физическое» применение принципа суперпозиции (в задачах, однако, используется метод граничных условий).

Что можно опустить. Данная глава имеет иллюстративный характер: в ней много примеров из области звука, передающих линий и света, являющихся «применением» того, что мы узнали в главах 1—4. Поэтому значительная часть примеров при недостатке времени может быть пропущена.

Домашние опыты. Необходимо сделать опыт 5.3 (переходные стоячие волны в «пружине»)*). Особенно интересны опыты 5.17 и 5.18.

Глава 6. Модулированные колебания, импульсы и волновые пакеты. В главах 1—5 мы имели дело главным образом с единственной частотой (за исключением п. 2.3, посвященного фурье-анализу). В этой главе рассмотрена суперпозиция различных частот, образующая импульсы и волновые пакеты, и фурье-анализ (введенный в п. 2.3 лишь для периодических функций) распространяется и на непериодические функции. Бóльшая часть физики содержится в трех первых пунктах.

Домашние опыты. Наблюдение волновых пакетов в воде (опыт 6.11) необходимо для понимания смысла групповой скорости. Мы советуем также проделать опыты 6.12 и 6.13.

Задачи. Частотная и фазовая модуляции рассмотрены не в основном тексте, а главным образом в задачах. Здесь же обсуждаются такие проблемы как фиксация лазерных мод (задача 6.23), модуляция с помощью субчастот (задача 6.32) и интерферометрическая спектроскопия (задача 6.33).

Глава 7. Волны в пространстве двух и трех измерений. Волны, рассмотренные в главах 1—6, имели одно измерение. В этой главе

*) См. сноску на стр. 24.

мы переходим к трехмерным волнам и вводим вектор распространения k. Основой для рассмотрения электромагнитных волн являются уравнения Максвелла. (Электромагнитные волны в линиях передач, рассмотренные в предыдущих главах, имели исходным пунктом *LC*-цепи.) Рассмотрены также волны в воде.

Что можно опустить. Можно пропустить п. 7.3 (волны в воде), но мы советуем проделать соответствующие домашние опыты. Если преподаватель специально заинтересован в оптике, он может начать с п. 7.4 и продолжить изучение оптических явлений в главах 7, 8 и 9.

Глава 8. Поляризация. Эта глава посвящена изучению поляризации электромагнитных волн и волн в «пружинах». Особое внимание уделено физической связи между частичной поляризацией и когерентностью.

Домашние опыты. Мы советуем выполнить по меньшей мере опыты 8.12, 8.14, 8.16 и 8.18.

Глава 9. Интерференция и дифракция. Здесь мы рассматриваем суперпозицию волн, пробегающих различные пути от источника до детектора, и исследуем физический смысл понятия о когерентности. Геометрическая оптика рассмотрена с точки зрения волновых представлений, т. е. как оптика пучков, падающих на различные отражающие и преломляющие поверхности при условиях, когда дифракция ограничена.

Домашние опыты. Следует выполнить хотя бы один опыт по интерференции, дифракции, когерентности и геометрической оптике. Мы рекомендуем также выполнить опыт 9.50 (квадрупольное излучение камертона).

Задачи. Некоторые вопросы курса вынесены в задачи, например звездные интерферометры, включая недавно разработанный «интерферометр с большой базой» (задача 9.57). Аналогия между фазово-контрастным микроскопом и преобразованием амплитудно-модулированных радиоволн в частотно-модулированные обсуждается в задаче 9.59.

Домашние опыты. (Общие замечания). Следует делать по меньшей мере один опыт в неделю. Ниже перечислены опыты с волнами в воде, волнами в «пружинах» и со звуковыми волнами, а также дано описание набора для опытов по оптике.

*Волны в воде*

1.24. Мода «омывания» в сосуде с водой.
1.25. Сейши.
2.31. Пилообразные стоячие волны в мелкой воде.
2.33. Моды поверхностного натяжения.
3.33. Пилообразные стоячие волны в мелкой воде.
3.34. Прямоугольные двухмерные стоячие волны.
3.35. Стоячие волны в воде.
6.11. Волновые пакеты в воде.
6.12. Волновые пакеты в мелкой воде; приливные волны.
6.19. Фазовая и групповая скорости волн в глубокой воде.
6.25. Резонанс в приливных волнах.



7.11. Закон дисперсии для волн в воде.
9.29. Дифракция волн в воде.

*Волны в «пружинах»*

1.8. Связанные маятники.
2.1. Зависимость частоты колебаний «пружины» от ее длины.
2.2. «Пружина» как непрерывная система.
2.4. Тембр ноты, издаваемой «пружиной».
3.7. Резонанс в «пружине» с затуханием.
3.8. Вынужденные колебания системы двух связанных маятников.
3.16. Механический полосовой фильтр.
3.23. Экспоненциальное проникновение волн в реактивную область.
4.4. Фазовая скорость волн в «пружине».
5.3. Переходные стоячие волны в «пружине».
8.14. Поляризация в «пружине».

*Звук*

Некоторые домашние опыты по звуку требуют двух идентичных камертонов, лучше всего C523,3 или A440. Их можно купить в музыкальном магазине или в магазине наглядных пособий.

1.4. Измерение частоты колебаний.
1.7. Связанные колебания ножовочных полотен.
1.12. Биения от двух камертонов.
1.13. Нелинейность уха; комбинационные тона.
1.18. Биения от слабо связанных неидентичных струн гитары.
2.4. Тембр ноты, издаваемой «пружиной».
2.5. Рояль как анализатор Фурье; нечувствительность уха к фазе колебаний.
2.6. Гармоники рояля; равномерно темперированный строй.
3.27. Ширина резонанса для картонной трубки.
4.6. Измерение скорости звука с помощью волновых пакетов.
4.15. Резонатор из бутылки (резонатор Гельмгольца).
4.16. Скорость звука в воздухе, гелии и природном газе.
4.26. Звуковой импеданс.
5.15. Эффективная длина трубки с открытым концом для стоячих волн.
5.16. Резонанс в картонных трубках.
5.17. Является ли звукоулавливающая система человека (барабанная перепонка, нервы, мозг) фазочувствительным детектором?
5.18. Измерение относительной фазы на двух концах открытой трубки.
5.19. Обертоны камертона.
5.31. Резонансы в надувных шарах.
6.13. Музыкальные трели и полоса частот.
9.50. Диаграмма излучения камертона; квадрупольное излучение.

Оптический набор*).

Он состоит из четырех небольших полароидных пластинок (линейные поляризаторы), кругового поляризатора, пластинок $\lambda/4$ и $\lambda/2$, дифракционной решетки и четырех цветных фильтров (красный, зеленый, голубой и оранжевый). Все эти компоненты описаны в тексте книги (линейные поляризаторы — стр. 367, круговой

*) Такой набор приложен к американскому изданию. К сожалению, мы не смогли снабдить оптическим набором русское издание. Этот недостаток, однако, восполним. Полароидные и цветные фильтры можно приобрести в фотомагазине, а пластинки в 1/4 и 1/2 длины волны изготовить самим из тонких пластинок слюды или прозрачных пластиковых пленок. Способ изготовления описан в тексте книги. Реплику дифракционной решетки можно приобрести в магазине наглядных пособий, но даже долгоиграющая пластинка может служить отражательной дифракционной решеткой для некоторых из описанных в книге опытов. (*Прим. ред.*)

поляризатор — стр. 380, задерживающие пластинки $\lambda/4$ и $\lambda/2$ — стр. 376, дифракционная решетка — стр. 441). В некоторых опытах вам будут нужны предметные или покровные стекла от микроскопа и источники света: лампа с «линейной» или «точечной» нитью накаливания (см. опыт 4.12, стр. 204), неоновая лампа. Большинство оптических опытов описано в главах 8 и 9. Их слишком много, чтобы перечислять здесь.

Комплексные числа.

При сложении синусоидальных колебаний применение комплексных чисел упрощает вычисления, но иногда затемняет их физический смысл. Поэтому в первой части книги комплексные числа не используются. Они появляются в главе 6 вместе с векторными диаграммами для гармонических колебаний, а в главе 8 (поляризация) комплексные числа широко используются. В главе 9 (интерференция и дифракция) комплексные числа используются мало, но преподаватель может применить их для облегчения расчетов. Ряды Фурье (п. 2.3) и интегралы Фурье (пп. 6.4 и 6.5) излагаются без комплексных чисел.

ГЛАВА 1

# СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОСТЫХ СИСТЕМ

## 1.1. Введение

Окружающий нас мир полон движущихся объектов. Их движение, в широком смысле, можно разделить на два класса в зависимости от того, остается ли объект вблизи некоторого среднего положения или такого положения нет. Примерами движений первого класса являются колебания маятника, вибрация струны скрипки, колебания уровня воды в чашке, движение электронов в атомах, свет, многократно отражающийся от зеркал лазера. В качестве примеров движений второго класса можно указать на скольжение хоккейной шайбы, движение импульса по длинному тросу при дергании за конец троса, волны океана, катящиеся к берегу, пучок электронов в телевизионной трубке, луч света, испущенный звездой и принятый нашим глазом. Иногда одно и то же движение можно отнести к любому из этих классов в зависимости от точки зрения на явление: так, волны океана движутся к берегу, но вода (и утка, сидящая на поверхности) совершает движение вверх и вниз, а также вперед и назад относительно некоторого среднего положения. Точно так же импульс смещения бежит по канату, но вещество каната колеблется относительно среднего положения.

Мы начнем с колебаний. В главах 1 и 2 будут рассмотрены примеры свободного колебательного движения замкнутых систем, вызванного первоначальным внешним возбуждением. Такие колебания называются *свободными* или *собственными колебаниями*. Рассмотрение простых систем с одной или двумя степенями свободы (глава 1) явится основой для изучения свободных колебаний систем со многими степенями свободы (глава 2).

Мы увидим, что движение сложной системы, имеющей много движущихся элементов, может быть представлено суперпозицией более простых движений, происходящих одновременно и называемых *модами* *). Как бы ни была сложна система, мы найдем, что

*) См. сноску на стр. 31.

Научно-технический
информационно-ресурсный центр
Филиала НИТУ «МИСиС» в г. Алмалык

свойства каждой ее моды очень похожи на свойства простого гармонического осциллятора, и покажем, что для любой моды свободных колебаний системы сила, действующая на каждый движущийся элемент и отнесенная к единице смещения и единице массы, одна и та же и что все движущиеся элементы колеблются с одинаковой временной зависимостью $\cos(\omega t+\varphi)$, т. е. с одинаковой частотой $\omega$ и одинаковой фазовой постоянной $\varphi$.

Любая система, которую мы будем изучать, описывается некоторой физической величиной, чье отклонение от равновесного значения зависит от координат и времени. В случае механических примеров (пусть движущиеся элементы — точечные массы, на которые действуют возвращающие силы) такой физической величиной является смещение массы в точке с координатами $x$, $y$, $z$ от положения равновесия. Смещение описывается вектором $\boldsymbol{\psi}(x, y, z, t)$. Иногда мы будем называть эту векторную функцию *волновой функцией*. Она является непрерывной функцией $x$, $y$ и $z$ только в том случае, когда движение соседних элементов почти повторяет движение данного элемента.

В случае электрических систем такой величиной является электрический ток в катушке или заряд на пластинах конденсатора. В других примерах это может быть электрическое поле $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ или магнитное поле $\mathbf{B}(x, y, z, t)$. В последних двух случаях мы имеем дело с электромагнитными волнами.

### 1.2. Свободные колебания систем с одной степенью свободы

Мы начнем с рассмотрения колебаний относительно среднего положения. Если положение системы в любое время может быть описано единственным параметром, то система имеет одну степень

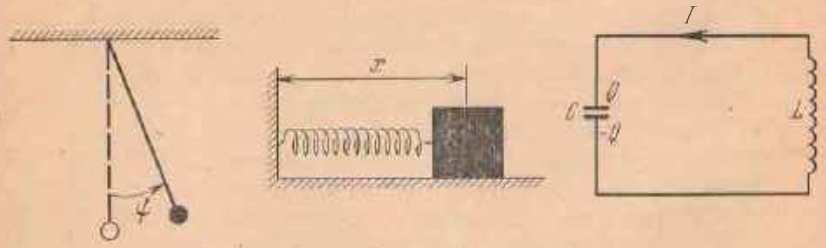



Рис. 1.1. Системы с одной степенью свободы.
Колебания маятника происходят в заданной плоскости.

свободы. Примеры таких систем: маятник, колеблющийся в заданной плоскости, масса, связанная с пружиной, $LC$-цепочка (рис. 1.1). Действительно, положение маятника может быть определено углом отклонения нити маятника от вертикали $\psi$. Для $LC$-цепочки таким параметром может служить величина заряда на емкости. (Маятник, способный колебаться в любом направлении подобно гире, подвешенной на нити, имеет две степени свободы; нужны две координаты,



чтобы задать его положение. Маятник в стенных часах закреплен так, что может качаться только в определенной плоскости и поэтому имеет одну степень свободы.)

Для всех систем с одной степенью свободы смещение «движущегося элемента» от положения равновесия определяется одной и той же временно́й зависимостью (называемой *гармоническим колебанием*):

$$\psi(t) = A\cos(\omega t+\varphi). \tag{1}$$

Для колеблющейся массы $\psi$ соответствует смещению массы от положения равновесия; для $LC$-цепи $\psi$ — это либо ток в индуктивности, либо заряд на обкладках конденсатора.

Чтобы быть более точными, мы должны сказать, что временна́я зависимость (1) не дает правильного описания колебаний с очень большой амплитудой. [Так, при больших углах отклонения маятника уравнение (1) является лишь грубым приближением; для больших растяжений реальной пружины возвращающая сила уже не будет пропорциональна смещению и движение также не будет описываться уравнением (1); достаточно большой заряд на пластинах конденсатора вызовет его пробой, произойдет проскакивание искры между пластинами, и временно́е поведение заряда не будет удовлетворять уравнению (1).]

*Терминология.* В соответствии с уравнением (1) мы будем использовать следующую терминологию: $A$ — положительная константа, называемая *амплитудой*; $\omega$ — *угловая частота*, имеющая размерность *рад/сек*; $\nu=\omega/2\pi$ — *частота*, измеряемая в герцах (*гц*) или в циклах в секунду; величина, обратная $\nu$, называется *периодом* $T$ и измеряется в секундах:

$$T = \frac{1}{\nu}; \tag{2}$$

$\varphi$ называется *фазовой постоянной* или *фазой* колебания. Часто значение фазы нас не интересует, и мы можем всегда «перевести часы» так, чтобы $\varphi$ стало равным нулю. Тогда вместо более общего уравнения (1) имеем $\psi=A\cos\omega t$ или $\psi=A\sin\omega t$.

*Возвращающая сила и инерция.* Колебания, описываемые уравнением (1), являются результатом таких свойств физической системы, как *возвращающая сила* и *инерция*. Возвращающая сила стремится вернуть «движущийся элемент» в положение равновесия ($\psi=0$), в результате он приобретает скорость $d\psi/dt$. Чем больше $\psi$, тем больше возвращающая сила. В случае $LC$-цепочки возвращающая сила возникает из-за отталкивания между электронами, которое препятствует их скапливанию на одной из пластин конденсатора и стремится распределить их на пластинах так, чтобы заряд каждой пластины был равен нулю. Инерция системы противодействует любому изменению $d\psi/dt$. Инерция $LC$-цепочки определяется индуктивностью $L$, которая препятствует изменению величины тока $d\psi/dt$ (в этом случае $\psi$ — заряд на пластинах конденсатора).

*Колебательный режим.* Если колебания начинаются при положительном смещении $\psi$ и скорости $d\psi/dt$, равной нулю, то возвращающая сила создает ускорение, которое вызывает появление скорости, обратной по знаку смещению. «Отрицательная» скорость достигает максимума к моменту возвращения $\psi$ в положение равновесия $\psi=0$. При этом возвращающая сила станет равной нулю, а наличие отрицательной скорости вызовет появление и нарастание отрицательного смещения. Возвращающая сила становится при этом положительной, но теперь она должна преодолевать инерцию, обусловленную отрицательной скоростью. Наконец, скорость станет равной нулю ($d\psi/dt=0$), а смещение — максимальным и отрицательным ($-\psi$) и процесс будет повторяться в обратной последовательности. Рассмотренный цикл повторяется: возвращающая сила пытается вернуть $\psi$ в нулевое положение, тем самым вызывая движение с некоторой скоростью; инерция в свою очередь сохраняет скорость, что является причиной «проскакивания» $\psi$ через нулевое положение. Система совершает колебания.

*Физический смысл* $\omega^2$. Угловая частота колебаний $\omega$ связана с физическими свойствами системы (мы докажем это позже) соотношением

$$\boxed{\omega^2 = \text{возвращающая сила на единицу смещения и на единицу массы.}} \qquad (3)$$

Иногда, как, например, в случае $LC$-цепи, входящая в эту формулу «масса» имеет условный смысл, являясь лишь характеристикой инерции системы (см. пример 4).

*Затухающие колебания.* Если колебания некоторой системы описываются уравнением (1) и на систему не действуют никакие внешние силы, то она может совершать колебания бесконечно долго. Однако в действительности всегда имеется трение (или другое сопротивление движению), которое вызывает затухание колебаний (говорят, что трение «демпфирует» колебания). Поэтому более реальным типом колебаний являются затухающие колебания. Если система начала колебаться в момент времени $t=0$ (в этот момент мы толкнули маятник или замкнули ключ $LC$-цепочки и т. д.), то мы имеем (см. том I, гл. 7, стр. 236)

$$\psi(t) = Ae^{-t/2\tau}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (4)$$

для $t\geqslant 0$ и $\psi=0$ для $t<0$. Для простоты в последующих примерах мы будем все же пользоваться уравнением (1) вместо уравнения (4). Это значит, что мы пренебрегаем трением (или сопротивлением в случае $LC$-цепи) и считаем время затухания $\tau$ бесконечно большим.

Пример 1. *Маятник.* Простой маятник состоит из «невесомой» нити длиной $l$, один конец которой закреплен, а ко второму прикреплен «точечный» груз с массой $M$ (рис. 1.2). Обозначим через $\psi$ угол (в *рад*) отклонения маятника от вертикали. (Маятник



колеблется в заданной плоскости, и его положение полностью определяется углом $\psi$.) Смещение груза маятника по периметру окружности равно $l\psi$; такому смещению соответствуют мгновенная тангенциальная скорость $l\,d\psi/dt$ и тангенциальное ускорение $l\,d^2\psi/dt^2$. Возвращающая сила представляет собой тангенциальную составляющую силы веса $Mg$, действующей на маятник. Эта составляющая равна $-Mg\sin\psi$. По второму закону Ньютона

$$Ml\frac{d^2\psi}{dt^2} = -Mg\sin\psi(t). \qquad (5)$$

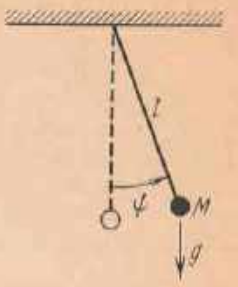


Рис. 1.2. Простой маятник.

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора [см. приложение I, уравнение (4)]:

$$\sin\psi = \psi - \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^5}{5!} - \ldots, \qquad (6)$$

где точками обозначены остальные члены ряда.

Мы видим, что для достаточно малых $\psi$ мы можем пренебречь в (6) всеми членами, за исключением $\psi$. На вопрос: что значит «при достаточно малых $\psi$»? — нет общего ответа. Все зависит от точности измерения функции $\psi(t)$ в задуманном эксперименте (мы имеем дело с физикой, и нужно помнить, что ничто не может быть измерено совершенно точно). Например, для $\psi=0{,}10$ *рад* (5,7°) $\sin\psi=0{,}0998$, и для ряда задач «0,0998=0,1000» будет грубым приближением. С другой стороны, для $\psi=1{,}0$ *рад* (57,3°) $\sin\psi=0{,}841$, но для некоторых случаев допустимо считать «0,8=1,0».

В связи с вышесказанным уравнение (6) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2\psi, \qquad (7)$$

где

$$\omega^2 = g/l. \qquad (8)$$

Общее решение уравнения (7) представляет собой гармоническое колебание

$$\psi(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Заметим, что угловая частота колебаний (8) может быть записана так:

$$\boxed{\omega^2 = \text{возвращающая сила на единицу смещения и на единицу массы.}}$$

Действительно,

$$\omega^2 = \frac{Mg\psi}{(l\psi)M} = \frac{g}{l},$$

если $\sin\psi$ можно заменить на $\psi$: $\sin\psi\approx\psi$.

Две постоянные, $A$ и $\varphi$, определяются по начальным условиям, например по смещению и скорости в момент $t=0$. (Величина $\psi$ —

угловое смещение, соответствующая «скорость» — это угловая скорость $d\psi/dt$.) Таким образом, имеем

$$\psi(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$
$$\dot{\psi}(t) = \frac{d\psi}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi),$$

так что

$$\psi(0) = A\cos\varphi,$$
$$\dot{\psi}(0) = -\omega A \sin\varphi.$$

Из этих двух уравнений можно определить положительную константу $A$ и угол $\varphi$.

Пример 2. *Масса и пружина; продольные колебания.* Пусть масса $M$ может скользить по поверхности без трения. Она соединена с неподвижными стенками при помощи двух одинаковых пружин, имеющих нулевую массу, коэффициент жесткости $K$*) и длину в нерастянутом состоянии $a_0$. В положении равновесия каждая пружина растянута на длину $a$ и, таким образом, имеет натяжение $K(a - a_0)$ (рис. 1.3, *а* и *б*). Обозначим через $z$ расстояние от левой стенки до массы $M$, тогда расстояние массы до правой стенки равно $2a - z$ (рис. 1.3, *в*). Левая пружина действует в направлении $-z$ с силой $K(z - a_0)$, правая пружина — в направлении $+z$ с силой $K(2a - z - a_0)$. Полная сила $F_z$, действующая на массу в направлении $+z$, будет равна сумме этих двух сил:

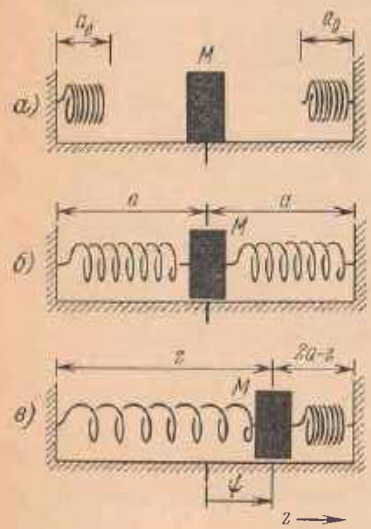



Рис. 1.3. Продольные колебания.
*а*) Пружины в нерастянутом состоянии; *б*) пружины растянуты и прикреплены к грузу $M$, который находится в положении равновесия; *в*) общий случай.

$$F_z = -K(z - a_0) + K(2a - z - a_0) = -2K(z - a).$$

По второму закону Ньютона

$$M\frac{d^2z}{dt^2} = F_z = -2K(z - a). \qquad (9)$$

Смещение массы $M$ относительно положения равновесия равно $z - a$. Обозначим его через $\psi(t)$:

$$\psi(t) = z(t) - a,$$

тогда

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

*) Его называют также силовой постоянной пружины, а иногда просто жесткостью пружины. (*Прим. ред.*)



Теперь уравнение (9) можно переписать в виде

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2\psi, \qquad (10)$$

$$\omega^2 = \frac{2K}{M}. \qquad (11)$$

Общее решение уравнения (10) опять представляет собой гармоническое колебание $\psi = A\cos(\omega t + \varphi)$. Заметим, что из уравнения (11) следует: $\omega^2$ = сила на единицу смещения и на единицу массы, так как возвращающая сила для смещения $\psi$ равна $2K\psi$.

Пример 3. *Массы и пружины; поперечные колебания.* Система показана на рис. 1.4. Масса $M$ находится между двумя одинаковыми

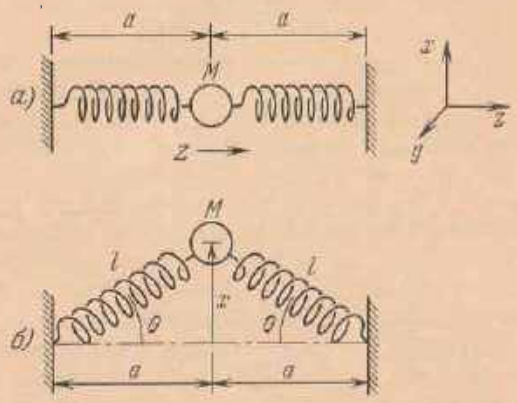



Рис. 1.4. Поперечные колебания.
*а*) Положение равновесия; *б*) общий случай движения (по оси $x$).

пружинами, концы которых закреплены в стенках. Пружины не имеют массы, их коэффициент жесткости $K$ и начальная длина $a_0$. Когда масса $M$ находится в положении равновесия, каждая пружина имеет длину $a$. Мы пренебрегаем силой тяжести. (Сила тяжести в этой задаче не образует никакой возвращающей силы. Влияние силы тяжести проявится в том, что система провиснет, но при наших приближениях это не скажется на результате.) В данном примере масса $M$ имеет три степени свободы. Она может двигаться в направлении оси $z$ (вдоль осей пружин), совершая продольные колебания. Этот случай был рассмотрен выше. Масса $M$ может перемещаться также в направлениях осей $x$ и $y$, совершая поперечные колебания. Для простоты будем рассматривать движение только вдоль оси $x$. Можно предположить, что в системе имеется какое-либо направляющее устройство (не вносящее трения), которое разрешает движение только в этом направлении и препятствует движению вдоль осей $y$ и $z$. Этим устройством может быть, например, веревка, протянутая через просверленную в массе $M$ дырку. Однако легко убедиться, что в таком приспособлении нет необходимости. Из

симметрии рис. 1.4 видно, что если в данное время система колеблется вдоль оси $x$, то нет никаких причин, которые могли бы вызвать движение вдоль оси $z$ или оси $y$. То же справедливо для каждой из двух других степеней свободы: в результате колебаний вдоль оси $z$ не возникает силы, приводящей к движению вдоль осей $x$ и $y$ (или к движению вдоль $x$ и $z$ при колебаниях вдоль $y$).

В равновесии (рис. 1.4, *а*) каждая пружина имеет длину $a$ и натяжение $T_0$, определяемое как

$$T_0 = K(a - a_0). \tag{12}$$

В более общем положении (рис. 1.4, *б*) каждая пружина имеет длину $l$ и натяжение

$$T = K(l - a_0). \tag{13}$$

Это натяжение направлено вдоль оси пружины. Возвращающая сила $T\sin\theta$, действующая на массу со стороны каждой пружины в направлении $x$, представляет собой проекцию этого натяжения на ось $x$. Используя второй закон Ньютона и равенство $\sin\theta = x/l$, найдем

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_x = -2T\sin\theta = -2K(l - a_0)\frac{x}{l} = -2Kx\left(1 - \frac{a_0}{l}\right). \tag{14}$$

Уравнение (14) верно при сделанных предположениях (включая предположение о «линейности» пружины или о справедливости для нее закона Гука (13)). Заметим, что длина пружины $l$, которая появляется в правой части уравнения (14), является функцией $x$. Из-за этого возвращающая сила, действующая на массу $M$, не будет в точности пропорциональна смещению и (14) не будет точным уравнением для гармонических колебаний.

*Приближение «пружины».* Существуют два интересных способа, которыми можно получить приближенное уравнение с линейной возвращающей силой. Первый способ — это *приближение «пружины»**), когда мы пренебрегаем членом $a_0/a$ по сравнению с единицей. Поскольку $l$ всегда больше, чем $a$, то тем более можно пренебречь и членом $a_0/l$ в уравнении (14). В этом приближении уравнение

*) Значительное число опытов по механическим колебаниям и мысленных примеров в этом томе связано с применением «slinky». Под этим жаргонным названием (оно происходит от глагола «to slink» — красться, идти крадучись) подразумевается спиральная пружина, состоящая из 100—150 витков плоской проволоки. В нерастянутом состоянии длина такой пружины 7—10 *см*. Ее можно без остаточных деформаций растянуть до 3—5 *м*. Slinky — распространенная детская игрушка, имеющая множество применений. Slinky можно «переливать» из руки в руку, подобно струе жидкости, slinky можно заставить спуститься со ступеньки на ступеньку по лестнице и т. д. Такая игрушка является удачным объектом для демонстрации волновых явлений, и автор широко этим пользуется. В книге при различных расчетах часто используется «slinky approximation». Это — приближение, при котором начальная длина пружины, подчиняющейся закону Гука, равна нулю. В дальнейшем вместо слова slinky мы будем писать «пружина» (пружина в кавычках). Фотографию «пружины» см. на стр. 87. *(Прим. ред.)*



(14) принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \tag{15}$$

где

$$\omega^2 = \frac{2K}{M} = \frac{2T_0}{Ma} \qquad (\text{для } a_0 = 0). \tag{16}$$

Решение уравнения (15) — это гармоническое колебание $x = A\cos(\omega t + \varphi)$. Заметим, что на амплитуду $A$ не наложено никаких ограничений. Она может быть очень большой, но возвращающая сила будет оставаться линейной. Заметим также, что частота поперечных колебаний, определяемая уравнением (16), совпадает с частотой продольных колебаний, определяемых уравнением (11). В общем случае это не так. Частоты совпадают лишь для приближения «пружины», где предполагается $a_0 = 0$.

*Приближение малых колебаний.* Если нельзя пренебречь $a_0$ (например, в обычных лекционных опытах с резиновым жгутом), то приближение «пружины» неприменимо. Тогда сила $F_x$ в уравнении (14) — нелинейная функция $x$. Однако мы покажем, что если $x$ мало по сравнению с длиной $a$, то $l$ отличается от $a$ только на величину порядка $a(x/a)^2$. *В приближении малых колебаний* мы пренебрегаем теми членами в формуле для $F_x$, которые нелинейны по $x/a$. Займемся теперь алгеброй.

Мы хотим выразить $l$ в уравнении (14) как $l = a +$ «что-то», исчезающее при $x = 0$. Так как $l > a$ независимо от знака $x$, это «что-то» должно быть четной функцией $x$. Из рис. 1.4 следует:

$$l^2 = a^2 + x^2 = a^2(1 + \varepsilon), \quad \text{где} \quad \varepsilon \equiv x^2/a^2.$$

Тогда

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{a}(1 + \varepsilon)^{-1/2} = \frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) + \left(\frac{3}{8}\varepsilon^2\right) - \dots\right], \tag{17}$$

где мы использовали разложение в ряд Тейлора [см. приложение I, уравнение (20)] для $(1+x)^n$ при $n = -1/2$ и $x = \varepsilon$. Приближение малых колебаний означает, что $\varepsilon \ll 1$. В этом случае

$$\frac{1}{l} \approx \frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right] = \frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right)\right]. \tag{18}$$

Подставив (17) в (14), получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2Kx}{M}\left(1 - \frac{a_0}{l}\right) = -\frac{2Kx}{M}\left\{1 - \frac{a_0}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right) + \dots\right]\right\} =$$
$$= -\frac{2K}{Ma}(a - a_0)x + \frac{K}{M}a_0\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots \tag{19}$$

Пренебрегая членами третьего и более высокого порядка малости (малые колебания), получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx -\frac{2K}{Ma}(a - a_0)x = -2\frac{T_0 x}{Ma}. \tag{20}$$

[Мы написали $T_0$ из выражения (12).]

Уравнение (20) можно переписать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

где

$$\omega^2 = \frac{2T_0}{Ma}. \qquad (21)$$

Таким образом, $x(t)$ является гармоническим колебанием:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Заметим, что квадрат частоты $\omega^2$ [формула (21)] и в этом случае равен возвращающей силе, приходящейся на единицу смещения и единицу массы. Действительно, для малых колебаний возвращающая сила равна удвоенному натяжению $T_0$ (две пружины), помноженному на $\sin\theta \approx x/a$.

Таким образом, имеем

$$\left.\begin{array}{l}\text{Возвращающая сила на единицу}\\ \text{смещения и на единицу массы}\end{array}\right\} = \frac{2T_0\,(x/a)}{xM} = \frac{2T_0}{Ma}.$$

Заметим, что частота поперечных колебаний для обоих приближений, как следует из сравнения уравнений (16) и (21), равна $\sqrt{2T_0/Ma}$. В приближении «пружины» продольные колебания имеют ту же частоту, что видно из уравнений (11) и (16).

Если приближение «пружины» не выполняется (т. е. если нельзя пренебречь $a_0/a$), то продольные колебания и (малые) поперечные колебания будут происходить с разной частотой, что видно из уравнений (11), (12) и (21). В этом случае

$$(\omega^2)_{\text{прод}} = \frac{2Ka}{Ma}, \qquad (22)$$

$$(\omega^2)_{\text{попер}} = \frac{2T_0}{Ma}, \quad T_0 = K(a - a_0). \qquad (23)$$

Для малых колебаний резинового жгута (когда нельзя пренебречь членом $a_0/a$) частота продольных колебаний больше, чем поперечных:

$$\frac{\omega_{\text{прод}}}{\omega_{\text{попер}}} = \frac{1}{\left[1 - \frac{a_0}{a}\right]^{1/2}}.$$

Пример 4. *LC-цепь.* (В томе II, гл. 8, колебания в цепи, состоящей из емкости и самоиндукции, изучены более подробно.) Рассмотрим цепь из последовательно соединенных самоиндукции $L$ и двух емкостей $C$ (рис. 1.5). Пусть заряды на верхних пластинах левого и правого конденсаторов равны $Q_1$ и $Q_2$ соответственно. Электродвижущая сила (э. д. с.), приложенная к индуктивности, равна «обратной э. д. с.» $L\,dI/dt$. Заряд $Q_1$ создает э. д. с. $C^{-1}Q_1$, так что положительный заряд $Q_1$ заставляет ток течь в направлении, указанном стрелкой на рис. 1.5. Таким образом, положительный заряд $Q_1$ обеспечивает положительное значение $L\,dI/dt$. Точно так же из



рис. 1.5 следует, что положительный заряд $Q_2$ создает отрицательное значение $L\,dI/dt$. Таким образом,

$$L\frac{dI}{dt} = C^{-1}Q_1 - C^{-1}Q_2. \qquad (24)$$

В положении равновесия на емкостях нет заряда. Ток $I$ увеличивает заряд $Q_2$ за счет заряда $Q_1$. Используя закон сохранения заряда и условие знаков (см. рис. 1.5), имеем

$$Q_1 = -Q_2, \qquad (25)$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = I. \qquad (26)$$

Из уравнений (25) и (26) следует, что в нашей задаче есть только одна степень свободы: мгновенное состояние системы можно описать, задавая или $Q_1$, или $Q_2$, или $I$. В дальнейшем (когда мы перейдем к системам с бо́льшим числом степеней свободы) будет удобнее работать с током $I$, поэтому воспользуемся им и сейчас:

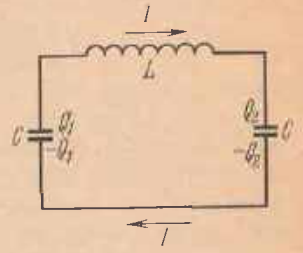



Рис. 1.5. Последовательное соединение самоиндукции $L$ и емкостей $C$.

Показано условие знаков для $Q$ и $I$. Заряд $Q_1$ (или $Q_2$) положителен, если верхняя обкладка заряжена положительно по отношению к нижней; ток $I$ положителен, если положительный заряд течет в направлении стрелок.

$$L\frac{dI}{dt} = C^{-1}Q_1 - C^{-1}Q_2 = -2C^{-1}Q_2,$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} = -2C^{-1}\frac{dQ_2}{dt} = -2C^{-1}I.$$

Ток $I(t)$ подчиняется уравнению

$$\frac{d^2I}{dt^2} = -\omega^2 I,$$

где

$$\omega^2 = \frac{2C^{-1}}{L}, \qquad (27)$$

решением которого являются гармонические колебания $I(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Уравнение (27) показывает, что и для электрических колебаний справедливо равенство

$$\omega^2 = \text{возвращающая сила на единицу «смещения» и на единицу «массы».}$$

Действительно, в данном случае роль силы играет э. д. с., равная $2C^{-1}Q$, а роль «смещения» принадлежит заряду $Q$. Индуктивность $L$ играет роль «массы». Поэтому выражение для $\omega^2$ имеет вид

$$\omega^2 = \frac{2C^{-1}Q}{LQ} = \frac{2}{LC}.$$

Легко заметить, что в примерах 2, 3 и 4 математика одинакова. Мы достигли этого тем, что специально подобрали примеры систем, обладающих пространственной симметрией («инерционная»

масса в центре, «вынуждающие» силы приложены симметрично с каждой стороны). Такой параллелизм часто полезен как мнемоническая схема.

### 1.3. Линейность и принцип суперпозиции

Примеры, рассмотренные в п. 1.2, соответствуют случаю, когда возвращающая сила пропорциональна $-\psi$ и не зависит (например) от $\psi^2$, $\psi^3$ и т. д. Дифференциальное уравнение, содержащее не более чем первую степень $\psi$ и первые степени производных $d\psi/dt$, $d^2\psi/dt^2$ и т. д., называется *линейным* относительно переменной $\psi$ и ее производных по времени. При этом уравнение называется *однородным*, если оно не содержит членов, не зависящих от $\psi$. Если в уравнении появляются степени функции $\psi$ или ее производных, то уравнение называется *нелинейным*, например, уравнение (5) нелинейно, что очевидно, если подставить в него выражение (6) для $\sin\psi$. Только пренебрегая в разложении $\sin\psi$ высокими степенями $\psi$, мы получим линейное уравнение.

Обычно нелинейные уравнения решать трудно. (Нелинейное уравнение для маятника было решено в т. I, стр. 251.)К счастью, существует много интересных физических ситуаций, для которых линейные уравнения дают очень хорошее приближение. Мы почти всегда будем иметь дело с линейными уравнениями.

*Линейные однородные уравнения.* Линейные однородные дифференциальные уравнения имеют следующее интересное и важное свойство: *сумма двух любых решений уравнения также является его решением.* Нелинейное уравнение таким свойством не обладает: сумма двух решений нелинейного уравнения не будет его решением.

Мы докажем эти положения сразу для обоих случаев (линейного и нелинейного). Предположим, что дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы имеет вид

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -C\psi + \alpha\psi^2 + \beta\psi^3 + \gamma\psi^4 + \ldots, \qquad (28)$$

как это было, например, в случае маятника [см. уравнения (5) и (6)] и в случае поперечных колебаний массы, подвешенной на пружинах [уравнение (19)]. Если константы $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ и т. д. все равны нулю или с достаточно хорошим приближением могут быть положены равными нулю, то уравнение (28) однородно и линейно. В противном случае оно нелинейно. Теперь предположим, что $\psi_1(t)$ — одно решение уравнения (28), соответствующее определенным начальным условиям (начальное смещение и начальная скорость гири маятника), а $\psi_2(t)$ — другое его решение, отвечающее другим начальным условиям. По сделанному выше предположению имеем

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -C\psi_1 + \alpha\psi_1^2 + \beta\psi_1^3 + \gamma\psi_1^4 + \ldots \qquad (29)$$

и

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -C\psi_2 + \alpha\psi_2^2 + \beta\psi_2^3 + \gamma\psi_2^4 + \ldots \qquad (30)$$



Возникает вопрос: будет ли *суперпозиция* $\psi_1$ и $\psi_2$, определенная как $\psi(t)=\psi_1(t)+\psi_2(t)$, удовлетворять уравнению (28), т. е. справедливо ли равенство

$$\frac{d^2(\psi_1+\psi_2)}{dt^2} = -C(\psi_1+\psi_2) + \alpha(\psi_1+\psi_2)^2 + \beta(\psi_1+\psi_2)^3 + \ldots ? \qquad (31)$$

На вопрос (31) можно ответить утвердительно, если коэффициенты $\alpha$, $\beta$ и т. д. равны нулю. Это легко показать. Сложим уравнения (29) и (30). Эта сумма совпадает с уравнением (31) только в том случае, если удовлетворены следующие условия:

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + \frac{d^2\psi_2}{dt^2} = \frac{d^2(\psi_1+\psi_2)}{dt^2}, \qquad (32)$$

$$-C\psi_1 - C\psi_2 = -C(\psi_1+\psi_2), \qquad (33)$$

$$\alpha\psi_1^2 + \alpha\psi_2^2 = \alpha(\psi_1+\psi_2)^2, \qquad (34)$$

$$\beta\psi_1^3 + \beta\psi_2^3 = \beta(\psi_1+\psi_2)^3 \text{ и т. д.} \qquad (35)$$

Уравнения (32) и (33) справедливы всегда. Равенства (34) и (35) неверны, если $\alpha$ и $\beta$ не нули. Таким образом, мы видим, что суперпозиция двух решений является решением тогда и только тогда, когда уравнение линейно.

То, что суперпозиция решений также представляет собой решение, является особенностью однородного линейного уравнения. Говорят, что колебания, которые описываются такими уравнениями, подчиняются *принципу суперпозиции*. Мы не будем рассматривать никаких других колебаний.

*Суперпозиция начальных условий.* В качестве примера применения понятия суперпозиции рассмотрим малые колебания простого маятника. Допустим, что есть два решения уравнения: $\psi_1$ и $\psi_2$, соответствующие двум разным начальным условиям (смещение и скорость). Предположим, что есть еще одно начальное условие, которое является суммой соответствующих *начальных условий* для $\psi_1$ и для $\psi_2$. Это значит, что начальное смещение маятника представляет собой алгебраическую сумму начальных смещений $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, а начальная скорость — алгебраическую сумму скоростей, соответствующих $\psi_1$ и $\psi_2$. Чтобы найти решение $\psi_3$, нам достаточно просто сложить $\psi_1$ и $\psi_2$: $\psi_3=\psi_1+\psi_2$. Докажите это. Указанный результат справедлив *только* для маятника, совершающего малые колебания, когда нелинейными членами в возвращающей силе можно пренебречь.

*Линейные неоднородные уравнения.* Линейные *неоднородные* уравнения (т. е. уравнения, содержащие члены не зависящие от $\psi$) также удовлетворяют принципу суперпозиции, хотя и несколько другого рода. Существует много физических явлений, аналогичных гармоническому осциллятору, подверженному воздействию внешней вынуждающей силы $F(t)$, не зависящей от $\psi(t)$.

Уравнение движения в этих случаях имеет вид

$$\frac{Md^2\psi(t)}{dt^2} = -C\psi(t) + F(t). \qquad (36)$$

Здесь $F(t)$ — «внешняя» вынуждающая сила, не зависящая явно от смещения $\psi(t)$. В этом случае принцип суперпозиции выглядит следующим образом. Предположим, что движение $\psi_1(t)$ соответствует возмущающей силе $F_1(t)$ (в том случае, когда на систему действует только сила $F_1(t)$), а движение $\psi_2(t)$ вызывается возмущающей силой $F_2(t)$ [в том случае, когда действует только сила $F_2(t)$]. Теперь, если обе возмущающие силы, $F_1(t)$ и $F_2(t)$, действуют одновременно, так что полная возмущающая сила представляет собой суперпозицию $F_1(t)+F_2(t)$, то соответствующие колебания системы [т. е. решение уравнения (36)] будут определяться суперпозицией $\psi(t)=\psi_1(t)+\psi_2(t)$. Покажите сами, что это справедливо для линейного неоднородного уравнения (36) и несправедливо для нелинейного уравнения относительно $\psi(t)$ (см. задачу 1.16).

Системы, с которыми мы имели дело в п. 1.2 и при иллюстрации принципа суперпозиции, обладают одной степенью свободы. Однако принцип суперпозиции применим для систем с любым числом степеней свободы (если уравнения линейны), и мы в дальнейшем очень часто будем им пользоваться.

Пример 5. *Сферический маятник.* Для иллюстрации применения принципа суперпозиции в случае двух степеней свободы рассмотрим движение маятника, состоящего из гири, масса которой $M$, подвешенной на нити длиной $l$. Такой маятник может свободно смещаться в любом направлении и называется *сферическим*. В положении равновесия нить вертикальна и направлена вдоль оси $z$. Пусть координаты гири маятника равны $x=y=0$. Для малых смещений вдоль осей $x$ и $y$ легко показать, что $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{Mg}{l}x, \tag{37}$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{Mg}{l}y. \tag{38}$$

Эти два уравнения «не связаны». Под этим мы подразумеваем, что $x$-компонента силы зависит только от координаты $x$, но не от $y$, а $y$-компонента зависит только от $y$. Таким образом, (37) не содержит $y$, а (38) не содержит $x$. Уравнения (37) и (38) имеют решения

$$x(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1), \tag{39}$$

$$y(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi_2), \tag{40}$$

где $\omega^2=g/l$. Константы $A_1$, $A_2$, $\varphi_1$ и $\varphi_2$ определяются из начальных условий, т. е. из смещений и составляющих скоростей по направлениям $x$ и $y$. Полное движение может быть представлено как *суперпозиция* движения $\hat{\mathbf{x}}\,x(t)$ и движения $\hat{\mathbf{y}}\,y(t)$, где $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ — единичные векторы. Возможность применения принципа суперпозиции основана на том, что мы можем определить отдельно движения по оси $x$ и $y$, а затем просто сложить оба движения, чтобы получить результирующее движение с двумя степенями свободы.



## 1.4 Свободные колебания систем с двумя степенями свободы

В природе существует множество интересных систем, имеющих две степени свободы. Наиболее красивы примеры молекул и элементарных частиц (особенно нейтральных K-мезонов). Но для изучения этих систем необходимо знание квантовой механики. Более простыми примерами являются двойной маятник (один маятник подвешен к опоре, а второй — к гире первого маятника); два маятника, связанные пружиной; горизонтальная нить с двумя шариками; две связанные $LC$-цепи (рис. 1.6) и т. п. Чтобы описать состояние таких систем, нужны две переменные, $\psi_a$ и $\psi_b$. Например,

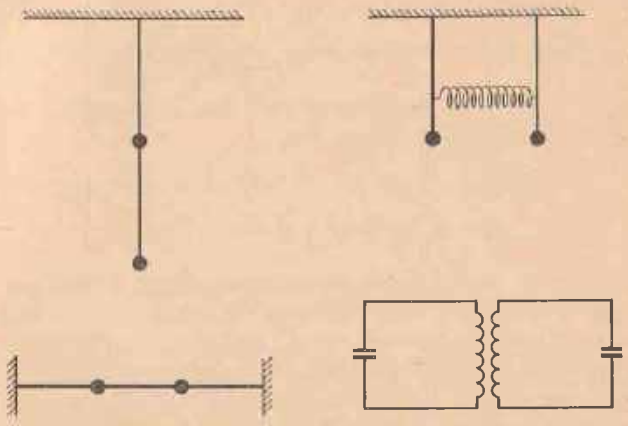


Рис. 1.6. Системы с двумя степенями свободы.
Колебания масс ограничены плоскостью чертежа.

в случае сферического маятника переменные $\psi_a$ и $\psi_b$ — это положения маятника в двух взаимно перпендикулярных направлениях. В случае связанных маятников $\psi_a$ и $\psi_b$ соответствуют положениям каждого маятника; для двух связанных $LC$-цепей $\psi_a$ и $\psi_b$ представляют собой заряды на двух емкостях или токи в обеих цепях.

В общем случае движение системы с двумя степенями свободы может иметь очень сложный вид, не похожий на простое гармоническое движение.

Мы, однако, покажем, что для двух степеней свободы и при линейных уравнениях движения наиболее общее движение является *суперпозицией* двух независимых простых гармонических движений, происходящих одновременно. Эти два простых гармонических движения (описаны ниже) называются *нормальными* или *собственными колебаниями* или *гармониками*, а также *нормальными модами* колебаний или просто *модами* *).

*) В дальнейшем наряду с термином «гармоника» мы будем употреблять термин «нормальная мода» или просто «мода». Он характеризует как собственную частоту колеблющейся системы, так и ее пространственную конфигурацию. (*Прим. ред.*)

Создавая определенные начальные условия (определенные начальные значения $\psi_a$, $\psi_b$ и $d\psi_a/dt$, $d\psi_b/dt$), можно приготовить систему, колебания которой соответствуют только одной из мод.

*Свойства мод.* Если существует лишь одна мода колебаний, то в системе совершается простое гармоническое движение. Все части системы колеблются с одной частотой, одновременно проходя через положение равновесия (для которого $\psi=0$). Например, движения $\psi_a=A\cos\omega t$ и $\psi_b=B\sin\omega t$ или $\psi_a=A\cos\omega_1 t$ и $\psi_b=B\cos\omega_2 t$ не могут соответствовать одной моде, так как в первом случае различны фазовые постоянные, а во втором — различны частоты. Пусть для одной моды (назовем ее мода 1) имеем

$$\left.\begin{aligned}\psi_a(t)&=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1),\\ \psi_b(t)&=B_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)=\frac{B_1}{A_1}\psi_a(t).\end{aligned}\right\}\qquad(41)$$

Здесь у обеих степеней свободы *одна и та же частота и фаза.*

Для моды 2 движение имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\psi_a(t)&=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2),\\ \psi_b(t)&=B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)=\frac{B_2}{A_2}\psi_a(t).\end{aligned}\right\}\qquad(42)$$

Каждая мода имеет свою собственную характерную частоту: $\omega_1$ для моды 1 и $\omega_2$ для моды 2. Для каждой моды система имеет характерную «конфигурацию», или «форму», определяемую отношением амплитуд движений по двум направлениям: $A_1/B_1$ для моды 1 и $A_2/B_2$ для моды 2. Заметим, что для данной моды отношение $\psi_a/\psi_b$ постоянно и не зависит от времени. Оно определяется в нашем примере отношениями $A_1/B_1$ или $A_2/B_2$, которые могут быть либо положительными, либо отрицательными.

Наиболее общим движением системы является (как мы покажем) суперпозиция, при которой движение содержит обе моды колебаний одновременно:

$$\left.\begin{aligned}\psi_a(t)&=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2),\\ \psi_b(t)&=B_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2).\end{aligned}\right\}\qquad(43)$$

Рассмотрим ряд примеров.

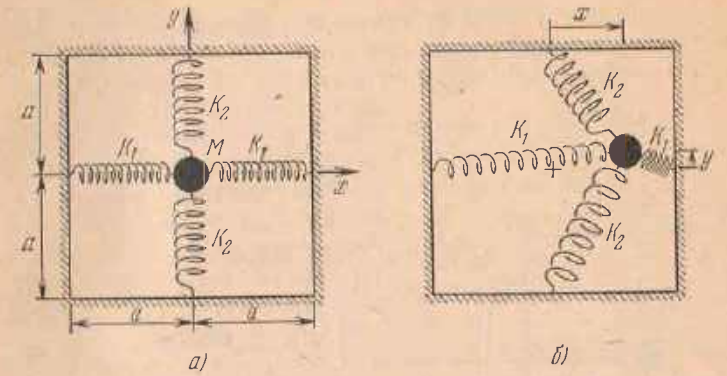
Пример 6. *Простой сферический маятник.* Этот простейший пример, к сожалению, не раскрывает всей сложности общего движения, определяемого уравнениями (43). Дело в том, что обе моды, соответствующие колебаниям относительно направлений $x$ и $y$, имеют одну и ту же частоту ($\omega^2=g/l$) и в данном случае мы получаем более простой результат, следующий из уравнений (39) и (40):

$$\left.\begin{aligned}x(t)\equiv\psi_a(t)&=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1), &\omega_1&=\omega,\\ y(t)\equiv\psi_b(t)&=B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2), &\omega_2&=\omega_1=\omega.\end{aligned}\right\}\qquad(44)$$

В таких случаях говорят, что имеет место «вырождение» мод.



Пример 7. *Двухмерный гармонический осциллятор.* На рис. 1.7 показана масса $M$, которая может свободно двигаться в плоскости $xy$. В направлении оси $x$ она соединена со стенками двумя невесомыми пружинами с коэффициентом жесткости $K_1$, а в направлении $y$ — двумя другими невесомыми пружинами с коэффициентом жесткости $K_2$. В случае малых колебаний, когда можно пренебречь членами $x^2/a^2$, $y^2/a^2$ и $xy/a^2$, мы покажем, что $x$-компонента возвращающей силы полностью обусловлена пружинами $K_1$, а $y$-составляющая




а) б)

Рис. 1.7. Двухмерный гармонический осциллятор.
а) Равновесие; б) общий случай движения.

возвращающей силы зависит только от пружин $K_2$. В этом можно убедиться, написав выражения для $F_x$ и $F_y$ и отбросив нелинейные члены. Проще всего это сделать следующим образом: начнем с положения равновесия (рис. 1.7, *а*). Представим себе мысленно, что масса $M$ получила небольшое смещение $x$ в направлении $+x$. В этом случае возвращающая сила равна

$$F_x=-2K_1x,\quad F_y=0.$$

Теперь (из этого положения) дадим массе небольшое смещение $y$ в направлении $+y$. Нужно выяснить, изменилось ли значение $F_x$. Пружины $K_1$ изменили длину на малую величину, пропорциональную $y^2$. Этим изменением мы пренебрегаем. Пружины $K_2$ изменили длину на величину, пропорциональную $y$ (одна стала длиннее, другая короче), но проекция их силы на направление $x$ также пропорциональна $x$. Итак, иксовая составляющая силы от пружины $K_2$ пропорциональна произведению двух малых величин $yx$, и этой составляющей мы пренебрегаем. Таким образом, величина $F_x$ не изменилась. То же относится и к $F_y$. Мы получили два линейных уравнения:

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=-2K_1x\quad\text{и}\quad M\frac{d^2y}{dt^2}=-2K_2y,\qquad(45)$$

решения которых

$$\left.\begin{aligned}x&=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1), &\omega_1^2&=2K_1/M,\\ y&=B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2), &\omega_2^2&=2K_2/M.\end{aligned}\right\}\qquad(46)$$

Из этих уравнений следует, что движения в направлениях $x$ и $y$ не связаны между собой и что каждое движение представляет собой гармоническое колебание с собственной частотой. Движение вдоль оси $x$ соответствует одной нормальной моде колебаний, а вдоль оси $y$ — другой моде. Колебания вдоль оси $x$ (первая мода) имеют амплитуду $A_1$ и фазу $\varphi_1$, которые зависят только от начальных условий $x(0)$ и $\dot{x}(0)$, т. е. от смещения и скорости в момент $t=0$. Аналогично для колебаний вдоль оси $y$ (вторая мода) амплитуда $B_2$ и фаза $\varphi_2$ зависят только от начальных значений $y(0)$ и $\dot{y}(0)$.

*Нормальные координаты.* Заметим, что хотя решения (46) и являются общими, они не кажутся столь же общими, как, например, решения (43). В этом смысле нам очень повезло. Естественный выбор координат $x$ и $y$ вдоль осей пружин дал нам независимые уравнения (45), каждое из которых соответствует одной из мод. С точки зрения общих решений (43) это эквивалентно тому, что в выражении для $\psi_a$ амплитуда $A_2$ равна 0, а для $\psi_b$ равна 0 амплитуда $B_1$. Столь удачно выбранные нами координаты $x$ и $y$ называются *нормальными координатами*.

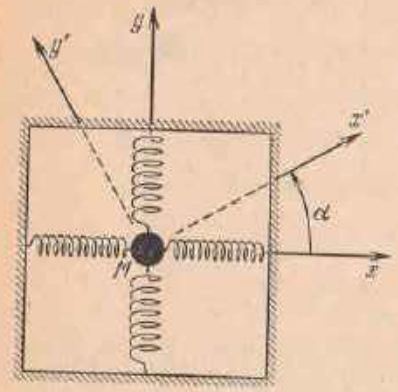


Рис. 1.8. Поворот системы координат.

Предположим теперь, что мы не так удачливы (или предусмотрительны) и работаем с системой координат $x'$ и $y'$, которая связана с системой $x$ и $y$ поворотом на угол $\alpha$ (рис. 1.8). Из рисунка видно, что нормальная координата $x$ представляет собой линейную комбинацию координат $x'$ и $y'$; то же следует сказать и о другой нормальной координате $y$. Если бы мы работали с координатами $x'$ и $y'$ вместо координат $x$ и $y$, то должны были бы получить два «связанных» дифференциальных уравнения с переменными $x'$ и $y'$ в каждом уравнении.

В большинстве задач, содержащих системы с двумя степенями свободы, не так легко «на глаз» найти нормальные координаты. Как правило, уравнения движения для систем с двумя степенями свободы — это два связанных уравнения. Одним из методов решения таких связанных дифференциальных уравнений является поиск новых переменных, которые являлись бы линейной комбинацией первоначальных, неудачно выбранных координат и которые давали бы не связанные, а разделенные уравнения движения. Такие новые координаты называются нормальными.

В настоящем примере для получения нормальных координат нам нужно повернуть оси $y'$ и $x'$ на угол $\alpha$ до совпадения их с осями $x$ и $y$. В более общей задаче мы должны были бы использовать бо-



лее общее линейное преобразование координат, чем то, которое может быть получено простым вращением. Например, более сложное преобразование следовало бы применить в случае неортогональности пружин на рис. 1.7.

*Общее решение для мод.* Не рассматривая какую-нибудь конкретную физическую систему, предположим, что мы нашли два связанных линейных уравнения первого порядка не в нормальных координатах:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a_{11}x - a_{12}y, \tag{47}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -a_{21}x - a_{22}y. \tag{48}$$

Рассмотрим колебание, соответствующее одной моде. Это значит, что обеим степеням свободы $x$ и $y$ соответствует гармоническое колебательное движение, совершаемое с одной и той же частотой и фазой. Таким образом,

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \quad y = B\cos(\omega t + \varphi), \tag{49}$$

где $\omega$ и $B/A$ пока еще неизвестны. Мы имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y. \tag{50}$$

Подставляя уравнения (50) в уравнения (47) и (48), после элементарных преобразований получим два однородных линейных уравнения относительно $x$ и $y$:

$$(a_{11} - \omega^2)x + a_{12}y = 0, \tag{51}$$

$$a_{21}x + (a_{22} - \omega^2)y = 0. \tag{52}$$

Каждое уравнение, (51) и (52), дает отношение $y/x$:

$$\frac{y}{x} = \frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}}, \tag{53}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}}. \tag{54}$$

Естественно, что должно выполняться следующее условие:

$$\frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}},$$

т. е.

$$(a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{21}a_{12} = 0. \tag{55}$$

Левая часть уравнения (55) представляет собой определитель, составленный из коэффициентов линейных однородных уравнений (51) и (52):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} \equiv (a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{21}a_{12} = 0. \tag{56}$$

Уравнение (55) или (56) является квадратным уравнением относительно переменной $\omega^2$. Оно имеет два решения: $\omega_1^2$ и $\omega_2^2$. Итак,

мы нашли, что существуют два способа, которыми могут быть реализованы колебания с единственной модой.

Частота $\omega_1$ соответствует моде 1, а $\omega_2$ — моде 2. Геометрическую конфигурацию, или форму, моды 1 мы получим, подставив в одно из уравнений (53) или (54) величину $\omega^2=\omega_1^2$. Таким образом,

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{\text{мода 1}}=\left(\frac{B}{A}\right)_{\text{мода 1}}=\frac{B_1}{A_1}=\frac{\omega_1^2-a_{11}}{a_{12}}. \qquad (57а)$$

Аналогично

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{\text{мода 2}}=\left(\frac{B}{A}\right)_{\text{мода 2}}=\frac{B_2}{A_2}=\frac{\omega_2^2-a_{11}}{a_{12}}. \qquad (57б)$$

После того, как найдены частоты мод $\omega_1$ и $\omega_2$ и отношения амплитуд $B_1/A_1$ и $B_2/A_2$, мы можем записать наиболее общие выражения для суперпозиции двух мод:

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2), \qquad (58)$$

$$y(t)=\frac{B_1}{A_1}A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+\frac{B_2}{A_2}A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)=$$

$$=B_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2). \qquad (59)$$

Заметим, что выбор постоянных $A_1$, $\varphi_1$, $A_2$ и $\varphi_2$ в уравнении (58) накладывает ограничения на возможные значения постоянных в уравнении (59), так как должны удовлетворяться уравнения (57).

Наиболее общее решение уравнений (47) и (48) состоит из комбинации двух независимых решений, которые удовлетворяют четырем начальным условиям для $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $y(0)$ и $\dot{y}(0)$. Суперпозиция двух нормальных мод, для которых четыре константы: $A_1$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $A_2$ — определяются из четырех начальных условий, представляет собой такое решение. Таким образом, общее решение может быть записано (хотя не всегда в этом возникает необходимость) как суперпозиция мод.

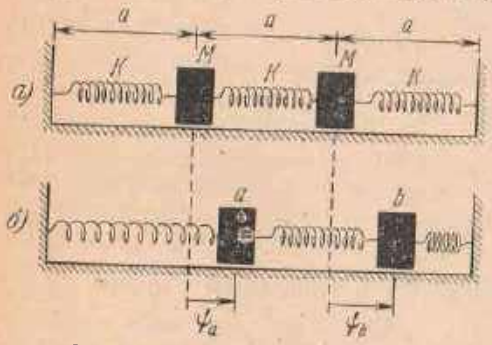



Рис. 1.9. Продольные колебания.
*а)* Равновесие; *б)* общий случай движения.

Пример 8. *Продольные колебания двух связанных масс.* Исследуемая система показана на рис. 1.9. Две массы $M$ могут скользить по поверхности стола без трения. Три одинаковые пружины невесомы, и каждая имеет коэффициент жесткости $K$. Предоставляем читателю найти общее решение для этой системы (задача 1.23), а здесь определим нормальные моды. Нам известно, что их должно быть две, так как колеблющаяся система имеет две степени свободы. Каждый движущийся элемент (каждая масса) в моде совершает гармоническое колебание. Это значит, что все движущиеся элементы колеблются с одинаковой частотой, т. е. *возвращающая сила, приходящаяся на единицу смещения и единицу массы, одинакова для обеих масс.* (В п. 1.2 мы показали, что величина $\omega^2$ равна возвращающей силе, приходящейся на единицу массы и на единицу смещения. Это справедливо для каждого движущегося элемента, вне зависимости от того, является ли он отдельной изолированной системой с одной степенью свободы или частью большой системы. При этом на движение накладывается только одно требование: оно должно быть гармоническим движением с определенной частотой.)



В рассматриваемом примере обе массы равны. Поэтому нам нужно найти такое состояние системы, для которого величина возвращающей силы на единицу смещения оставалась бы одинаковой для обеих масс. Посмотрим, приведет ли это условие к правильному результату. Допустим, что мы сместили обе массы из положения равновесия, когда пружины не растянуты, вправо на одну и ту же величину. Будет ли возвращающая сила одинаковой для каждой массы? Заметим, что при таком смещении длина центральной пружины относительно положения равновесия не изменилась, поэтому эта пружина не действует на массы. Левая масса будет стремиться к движению влево, потому что левая пружина растянута. Поскольку правая пружина сжата на ту же длину, на какую растянута левая пружина, она будет толкать правую массу с такой же силой влево. Таким образом, мы нашли одну моду!

$$\text{Мода 1:}\quad \psi_a(t)=\psi_b(t),\quad \omega_1^2=K/M. \qquad (60)$$

Из выражения для частоты колебаний $\omega_1^2=K/M$ в формулах (60) следует, что колебания совершаются так, как если бы центральной пружины не было.

Теперь попытаемся найти вторую моду. Из соображений симметрии можно предположить, что эта мода соответствует движению масс «*a*» и «*b*» в противоположные стороны. Если масса «*a*» смещена на расстояние $\psi_a$ вправо, а масса «*b*» — на такое же расстояние влево, то на каждую из масс действует одинаковая возвращающая сила. Таким образом, для второй моды $\psi_b=-\psi_a$. Чтобы найти частоту $\omega_2$, достаточно рассмотреть движение одной массы и определить для нее величину возвращающей силы, приходящуюся на единицу смещения и на единицу массы. Рассмотрим левую массу «*a*». Под действием левой пружины она будет двигаться влево, и на нее будет действовать сила $F_z=-K\psi_a$. Под действием правой пружины она также будет двигаться влево, и пружина действует на нее с силой $F_z=-2K\psi_a$. (Двойка появляется потому, что левая пружина сжата на $2\psi_a$.) Полная сила, действующая на массу «*a*» при смещении ее на $\psi_a$, равна $-3K\psi_a$, а частота равна $3K/M$.

$$\text{Мода 2:}\quad \psi_a=-\psi_b,\quad \omega_2^2=3K/M. \qquad (61)$$

Обе моды колебаний показаны на рис. 1.10.

Решим эту задачу иначе, используя метод нормальных координат. Нормальные координаты являются линейной комбинацией обычных координат. Вместо двух связанных линейных уравнений

нормальные координаты позволяют получить два независимых уравнения движения. Из рис. 1.9, *б* видно, что для общего случая уравнения движения имеют вид

$$M\frac{d^2\psi_a}{dt^2} = -K\psi_a + K(\psi_b - \psi_a), \tag{62}$$

$$M\frac{d^2\psi_b}{dt^2} = -K(\psi_b - \psi_a) - K\psi_b. \tag{63}$$

Легко заметить, что, сложив эти два уравнения, а затем вычтя

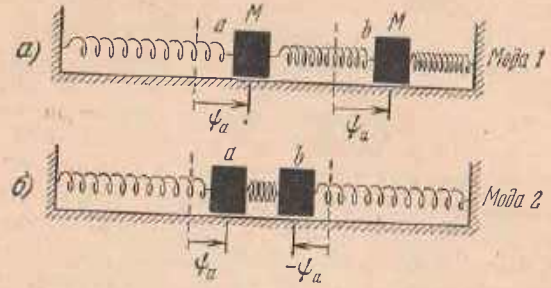



Рис. 1.10. Нормальные моды продольных колебаний.
*а)* Мода с меньшей частотой; *б)* мода с большей частотой.

одно из другого, мы получим два искомых независимых уравнения. Складывая (62) и (63), имеем

$$M\frac{d^2}{dt^2}(\psi_a + \psi_b) = -K(\psi_a + \psi_b). \tag{64}$$

Вычитая (63) из (62), получим

$$M\frac{d^2(\psi_a - \psi_b)}{dt^2} = -3K(\psi_a - \psi_b). \tag{65}$$

Уравнения (64) и (65) — независимые уравнения относительно координат $\psi_a+\psi_b$ и $\psi_a-\psi_b$. Их решения имеют вид

$$\psi_a + \psi_b \equiv \psi_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad \omega_1^2 = K/M, \tag{66}$$

$$\psi_a - \psi_b \equiv \psi_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad \omega_2^2 = 3K/M, \tag{67}$$

где $A_1$ и $\varphi_1$ — постоянные для моды 1, а $A_2$ и $\varphi_2$ — для моды 2.

Мы видим, что $\psi_1(t)$ соответствует движению центра масс, так как $^1/_2(\psi_a+\psi_b)$ определяет положение центра. (Мы могли бы разделить уравнение (64) на два и рассматривать $\psi_1$ как положение центра масс. Постоянный множитель $^1/_2$ несуществен.) Координата $\psi_2$ — это величина сжатия центральной пружины или (что то же самое) относительное смещение двух масс. При достаточной сообразительности мы сразу выбрали бы координаты $\psi_1$ и $\psi_2$, так как движение центра масс и «внутреннее движение» (относительное движение двух колеблющихся элементов) являются с физической точки зрения особенно интересными переменными. Найти простое фи-



зическое истолкование нормальных координат часто не так просто. Обычно мы будем иметь дело с нашими первоначальными координатами, даже после того, как найдем моды, потому что физический смысл этих координат может быть более понятен.

Мы нашли нормальные координаты нашей задачи $\psi_1$ и $\psi_2$. Теперь вернемся к старым координатам $\psi_a$ и $\psi_b$. Решая уравнения (66) и (67), находим

$$2\psi_a = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2), \tag{68}$$

$$2\psi_b = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2). \tag{69}$$

Заметим, что если движение соответствует моде 1, то $A_2=0$ и из уравнений (68) и (69) следует, что $\psi_b=\psi_a$. Аналогично для моды 2 имеем $A_1=0$ и $\psi_b=-\psi_a$. К этим же результатам мы пришли и раньше [см. уравнения (60) и (61)].

Пример 9. *Поперечные колебания двух связанных масс.* Система показана на рис. 1.11. Предположим, что колебания происходят в плоскости листа бумаги. У системы две степени свободы.

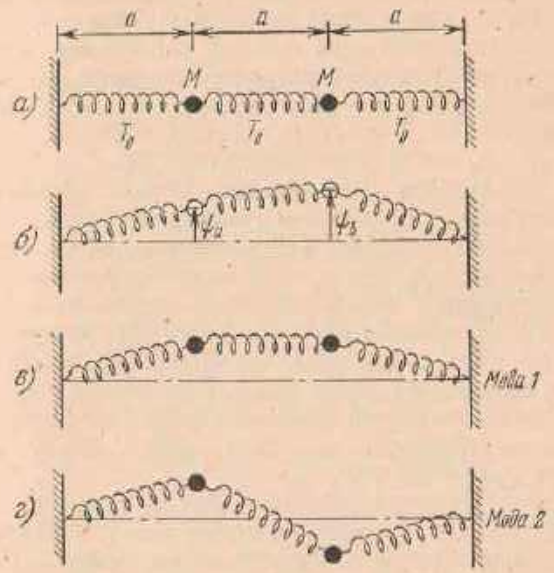



Рис. 1.11. Поперечные колебания.
*а)* Равновесие; *б)* общий случай движения; *в)* мода с меньшей частотой; *г)* мода с большей частотой.

Три невесомые одинаковые пружины имеют начальную длину (в нерастянутом состоянии) $a_0$, которая меньше, чем длина $a$, соответствующая положению равновесия масс. Когда система находится в состоянии равновесия (рис. 1.11, *а*), натяжение пружин равно $T_0$.

Симметрия системы позволяет легко догадаться о ее модах. Они показаны на рис. 1.11. Более низкая мода (мода с меньшей частотой, т. е. с меньшей величиной возвращающей силы на единицу

смещения и на единицу массы, для каждой из масс) имеет такую форму (рис. 1.11, *в*), при которой центральная пружина не меняет своей длины. В этом случае частоту можно определить, рассмотрев поведение одной из масс, если помнить, что возвращающая сила образуется только той пружиной, которая прикреплена к стене. Покажем, что как для приближения «пружины» (идеальной пружины с исчезающе малой начальной длиной), так и для приближения малых колебаний (т. е. когда смещение массы мало по сравнению с $a$) смещение $\psi_a$ левой массы приводит к появлению возвращающей силы $T_0(\psi_a/a)$ со стороны левой пружины. Поэтому для моды 1 возвращающая сила, приходящаяся на единицу массы и на единицу смещения, равна:

$$\text{мода 1:}\quad \omega_1^2=\frac{T_0}{Ma},\qquad \frac{\psi_b}{\psi_a}=+1. \tag{70}$$

Покажем, почему это так. Начнем с приближения «пружины» (п. 1.2). В этом приближении натяжение $T$ больше $T_0$ в $l/a$ раз, где $l$ — длина пружины и $a$ — длина пружины в положении равновесия (рис. 1.11, *а*). Растяжение пружины приводит к появлению поперечной возвращающей силы, равной натяжению $T$, умноженному на синус угла между осью наклонной пружины и осью пружины, находящейся в положении равновесия, т. е. возвращающая сила равна $T(\psi_a/l)$. Но $T=T_0(l/a)$. Таким образом, возвращающая сила $T=T_0(\psi_a/a)$, что и дает уравнение (70).

Теперь рассмотрим приближение малых колебаний (п. 1.2). В этом случае можно пренебречь увеличением длины пружины, так как она отличается от длины $a$ в равновесном положении лишь на величину порядка $a(\psi_a/a)^2$; по этой же причине пренебрегаем и увеличением натяжения. Таким образом, смещению $\psi_a$ соответствует натяжение $T_0$. Возвращающая сила равна натяжению $T_0$, умноженному на синус угла между осью пружины при смещении $\psi_a$ и осью пружины в положении равновесия. При малых колебаниях угол (в *рад*) и синус угла почти равны и определяются величиной $\psi_a/a$. Таким образом, возвращающая сила равна $T_0(\psi_a/a)$. Такой же результат дает уравнение (70).

Рассуждая подобным образом, можно получить частоту для моды 2 (рис. 1.11, *г*). Рассмотрим левую массу. Как было показано только что, левая пружина действует на массу с силой $T_0/Ma$. В случае моды 2 на массу будет действовать еще сила со стороны центральной пружины. Эта поперечная сила будет в два раза больше, чем сила со стороны левой пружины, так как при одном и том же натяжении $T_0$ угол, составленный центральной пружиной с осью равновесия, в два раза больше. Полная возвращающая сила, приходящаяся на единицу смещения и единицу массы, будет равна:

$$\text{мода 2:}\quad \omega_2^2=\frac{T_0}{Ma}+\frac{2T_0}{Ma}=\frac{3T_0}{Ma},\qquad \frac{\psi_b}{\psi_a}=-1. \tag{71}$$

Заметим, что в приближении «пружины», когда натяжение $T_0=K(a-a_0)$ можно считать равным $T_0=Ka$, частоты мод поперечных колебаний [уравнения (70) и (71)] совпадают с частотами мод продольных колебаний [уравнения (60) и (61)]. Таким образом, мы имеем случай вырождения. Оно не возникает при рассмотрении малых колебаний, если не пренебрегать $a_0$ по сравнению с $a$.



Если бы моды нельзя было так легко угадать, следовало бы написать уравнения движения двух масс «*a*» и «*b*» и иметь дело с этими уравнениями, а не с соображениями, основанными на визуальном рассмотрении физической системы. (См. задачу 1.20.)

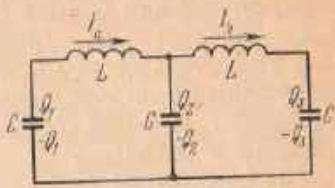


Рис. 1.12. Две связанные *LC*-цепочки.

Показано распределение зарядов и токов в общем случае. Стрелками показано положительное направление токов.

Пример 10. *Две связанные LC-цепочки.* Рассмотрим систему, показанную на рис. 1.12. Найдем уравнения «движения», в данном случае движения зарядов. Электродвижущая сила (э. д. с.) на левой индуктивности равна $L\,dI_a/dt$. Положительный заряд $Q_1$ на левой емкости образует э. д. с. $C^{-1}Q_1$, которая стремится увеличить $I_a$ (при нашем выборе знаков).

Положительный заряд $Q_2$ на средней емкости образует э. д. с. $C^{-1}Q_2$, которая стремится уменьшить $I_a$. Таким образом, имеем

$$L\frac{dI_a}{dt}=C^{-1}Q_1-C^{-1}Q_2. \tag{72}$$

Аналогично

$$L\frac{dI_b}{dt}=C^{-1}Q_2-C^{-1}Q_3. \tag{73}$$

Так же, как и в п. 1.2, будем рассматривать поведение системы, используя понятие тока, а не заряда. Поэтому продифференцируем уравнения (72) и (73) по времени:

$$L\frac{d^2I_a}{dt^2}=C^{-1}\frac{dQ_1}{dt}-C^{-1}\frac{dQ_2}{dt}, \tag{74}$$

$$L\frac{d^2I_b}{dt^2}=C^{-1}\frac{dQ_2}{dt}-C^{-1}\frac{dQ_3}{dt}. \tag{75}$$

Воспользовавшись законом сохранения заряда, получим

$$\frac{dQ_1}{dt}=-I_a,\qquad \frac{dQ_2}{dt}=I_a-I_b,\qquad \frac{dQ_3}{dt}=I_b. \tag{76}$$

Подставив уравнения (76) в (74), будем иметь связанные уравнения движения

$$L\frac{d^2I_a}{dt^2}=-C^{-1}I_a+C^{-1}(I_b-I_a), \tag{77}$$

$$L\frac{d^2I_b}{dt^2}=-C^{-1}(I_b-I_a)-C^{-1}I_b. \tag{78}$$

Имеем два уравнения движения и поэтому будем искать две нормальные моды. Мы можем попытаться угадать эти моды, но можем

также применить общий метод (см. задачу 1.21). Результат, который мы получим, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\text{мода 1:}\quad I_a = I_b,\quad \omega_1^2 = \frac{C^{-1}}{L};\\ &\text{мода 2:}\quad I_a = -I_b,\quad \omega_2^2 = \frac{3C^{-1}}{L}. \end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

Заметим, что для моды 1 центральная емкость не получает заряда и ее можно убрать. Движение зарядов при этом не изменится. Для этой моды заряды $Q_1$ и $Q_2$ всегда равны по величине и противоположны по знаку. Для моды 2 заряды $Q_1$ и $Q_2$ равны по величине и по знаку, а заряд $Q_3$ имеет противоположный знак и величину, в два раза большую.

Мы специально выбрали три примера (8—10): продольные колебания (рис. 1.9), поперечные колебания (рис. 1.11) и связанные $LC$-цепи (рис. 1.12), так как эти системы имеют одинаковую пространственную симметрию и их уравнения движения и нормальные моды имеют одну и ту же математическую форму. Эти системы рассмотрены еще и потому, что, обладая двумя степенями свободы, они являются естественным продолжением простых систем с одной степенью свободы, которые мы рассматривали в примерах 2—4 в п. 1.2 (см. рис. 1.3—1.5). Во второй главе мы обобщим эти три примера для неограниченно большого числа степеней свободы.

## 1.5. Биения

Во многих физических явлениях движение представляет собой суперпозицию двух гармонических колебаний, имеющих различные угловые частоты $\omega_1$ и $\omega_2$. Эти колебания могут, например, соответствовать двум нормальным модам системы, имеющей две степени свободы. Примером другого рода будут гармонические колебания, вызванные внешними силами. Источниками таких внешних сил могут быть, например, два камертона различной частоты. Каждый камертон издает свою собственную «ноту», которая распространяется в воздухе как звуковая волна. Движение воздуха, воспринимаемое нашей барабанной перепонкой, будет суперпозицией двух гармонических колебаний.

Во всех этих примерах математика одинакова. Для простоты допустим, что оба колебания имеют одинаковую амплитуду и одинаковую фазовую постоянную, которую положим равной нулю. Запишем суперпозицию $\psi$ двух гармонических колебаний $\psi_1$ и $\psi_2$:

$$\psi_1 = A\cos\omega_1 t,\quad \psi_2 = A\cos\omega_2 t, \qquad (80)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t. \qquad (81)$$

*Модуляция.* Перепишем уравнение (81) в несколько ином виде. Введем два понятия: «средняя» угловая частота $\omega_{ср}$ и угловая частота «модуляции» $\omega_{мод}$:

$$\omega_{ср} \equiv \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2),\quad \omega_{мод} \equiv \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2). \qquad (82)$$



Сумма и разность этих частот равны

$$\omega_1 = \omega_{ср} + \omega_{мод},\quad \omega_2 = \omega_{ср} - \omega_{мод}. \qquad (83)$$

Теперь выразим суперпозицию (81) через частоты $\omega_{ср}$ и $\omega_{мод}$:

$$\psi = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t = A\cos(\omega_{ср}t + \omega_{мод}t) + A\cos(\omega_{ср}t - \omega_{мод}t) = [2A\cos\omega_{мод}t]\cos\omega_{ср}t,$$

т. е.

$$\psi = A_{мод}(t)\cos\omega_{ср}t, \qquad (84)$$

где

$$A_{мод}(t) = 2A\cos\omega_{мод}t. \qquad (85)$$

Мы можем рассматривать уравнения (84) и (85) как колебания, происходящие с угловой частотой $\omega_{ср}$ и амплитудой $A_{мод}$, которая зависит от времени в соответствии с формулой (85). Запись суперпозиции двух колебаний (81) в виде (84) и (85) удобна, если $\omega_1$ и $\omega_2$ близки по величине. В этом случае частота модуляции мала по сравнению со средней частотой:

$$\omega_1 \approx \omega_2,\quad \omega_{мод} \ll \omega_{ср},$$

и амплитуда модуляции $A_{мод}(t)$ будет лишь незначительно меняться в течение нескольких «быстрых» колебаний $\cos\omega_{ср}t$; поэтому суперпозиции (84) будут соответствовать почти периодические колебания с частотой $\omega_{ср}$. В том случае, когда $A_{мод}$ — константа, выражение (84) точно соответствует гармоническим колебаниям с угловой частотой $\omega_{ср}$. Если $\omega_1$ мало отличается от $\omega_2$, то суперпозицию двух (точно гармонических) колебаний с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$ называют «почти гармоническим» или «почти монохроматическим» колебанием с частотой $\omega_{ср}$ и с очень медленно меняющейся амплитудой.

*Почти гармоническое колебание.* Этот первый пример приводит к важному и весьма общему результату, с которым мы будем часто встречаться: линейная суперпозиция двух или нескольких гармонических колебаний, имеющих различные амплитуды и фазовые постоянные, но принадлежащих к относительно узкому диапазону частот, дает «почти» гармоническое результирующее колебание с частотой $\omega_{ср}$, которая находится в том же частотном диапазоне. Результирующее движение не будет точно гармоническим, так как амплитуда и фазовая постоянная не являются постоянными, а лишь «почти постоянными». Они пренебрежимо мало меняются за один цикл «быстрых» колебаний, происходящих со средней частотой $\omega_{ср}$. (Это утверждение будет доказано в главе 6.) Теперь рассмотрим несколько физических примеров биений.

Пример 11. *Биения, созданные двумя камертонами.* Звуковые волны, улавливаемые ухом, создают изменения давления, действующего на барабанную перепонку. Пусть $\psi_1$ и $\psi_2$ представляют собой давления, оказываемые на ухо колебаниями двух камертонов 1 и 2. (Это давление равно давлению с внешней стороны на барабанную перепонку минус давление с внутренней стороны барабанной перепонки, которое равно атмосферному. Разность этих давлений образует силу, действующую на барабанную перепонку.)

Если по обоим камертонам ударили с одинаковой силой в один и тот же момент и они находятся на одинаковом расстоянии от уха, то амплитуды и фазовые константы для давлений $\psi_1$ и $\psi_2$ будут одинаковы, и вклад каждого из них следует из суперпозиции (80): полное давление (которое определит полную силу, действующую на перепонку) является суперпозицией $\psi = \psi_1 + \psi_2$ давлений от двух камертонов. Оно выражается равенством (81) либо равенствами (84) и (85).

Если частоты $\nu_1$ и $\nu_2$ двух камертонов отличаются от их среднего значения более чем на 6%, то ухо и мозг будут воспринимать эти колебания согласно равенству (81), т. е. как от двух отдельных источников. Вы услышите две ноты, мало отличающиеся по высоте тона. Например, если $\nu_2 = 1{,}25\nu_1$, вы будете слышать две ноты с интервалом «большая терция». Если $\nu_2 = 1{,}06\nu_1$, то $\nu_2$ будет восприниматься как нота, на полтона более высокая, чем $\nu_1$. Однако, если частоты $\nu_1$ и $\nu_2$ отличаются меньше чем на 10 *гц*, мы не в состоянии воспринять их как две разные ноты. (Правда, натренированное ухо музыканта может это сделать.) В таком случае суперпозиция колебаний с частотами $\nu_1$ и $\nu_2$ не воспринимается как «аккорд» из двух нот, а скорее, в согласии с равенствами (84) и (85), как один тон с частотой $\nu_{ср}$ и медленно меняющейся амплитудой $A_{мод}$.

*Квадратичный детектор.* Амплитуда модуляции $A_{мод}$ колеблется с угловой частотой модуляции $\omega_{мод}$. Всякий раз, когда величина $\omega_{мод}t$ возрастает на $2\pi$, амплитуда $A_{мод}$ совершает полный цикл колебаний и возвращается к первоначальному значению. Амплитуда $A_{мод}$ обращается в нуль дважды за цикл. В эти моменты времени звука нет, ухо ничего не слышит. В промежутках между паузами ухо воспринимает колебания среднего тона (соответствующие $\nu_{ср}$). Так как $\cos\omega_{мод}t$ изменяется от 0 до 1, от 1 до 0, от 0 до $-1$ и т. д., то в моменты времени, предшествующие данной паузе и после нее, амплитуда $A_{мод}$ имеет противоположные знаки. Однако наше ухо не может различить два интервала звучания с разными по знаку амплитудами $A_{мод}$. Мы можем заметить лишь изменение величины $A_{мод}$: звук станет громче или тише в зависимости от того, увеличился или уменьшился квадрат амплитуды $A_{мод}$.

Поэтому иногда говорят, что ухо является *квадратичным детектором*. Так как $A^2_{мод}$ имеет два максимума в течение каждого цикла модуляции (за цикл величина $\omega_{мод}t$ увеличивается на $2\pi$), то частота повторения последовательности: громко, тихо, громко, тихо, громко, тихо и т. д.— в два раза больше частоты модуляции. Эта частота, с которой изменяется $A^2_{мод}$, называется *частотой биений*:

$$\omega_б = 2\omega_{мод} = \omega_1 - \omega_2. \qquad (86)$$

Изменение квадрата амплитуды со временем легко вычислить:

$$A_{мод}(t) = 2A\cos\omega_{мод}t,$$

$$[A_{мод}(t)]^2 = 4A^2\cos^2\omega_{мод}t,$$



где

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}[\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta] = \frac{1}{2}[1 + \cos 2\theta].$$

Таким образом,

$$[A_{мод}(t)]^2 = 2A^2[1 + \cos 2\omega_{мод}t],$$

т. е.

$$(A_{мод})^2 = 2A^2[1 + \cos\omega_б t]. \qquad (87)$$

Из (87) видно, что колебания $A^2_{мод}$ происходят с частотой в два раза большей, чем $\omega_{мод}$. На рис. 1.13 показан пример биений.

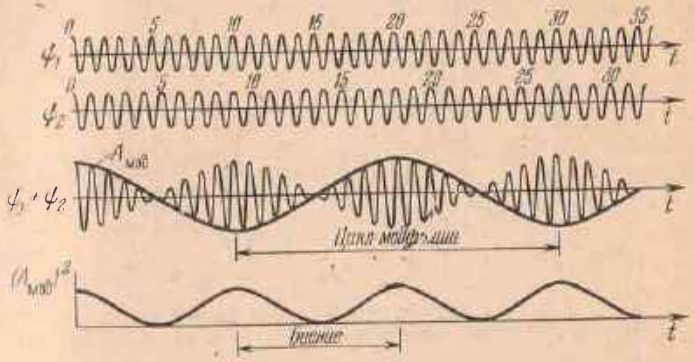



Рис. 1.13. Биения $\psi_1$ и $\psi_2$ описывают изменение давления на барабанную перепонку уха, создаваемое двумя камертонами с отношением частот 10/9. Полное давление будет суперпозицией $\psi_1 + \psi_2$, представляющей собой «почти гармоническое» колебание с частотой $\nu_{ср}$ и медленно меняющейся амплитудой $A_{мод}(t)$. Громкость звука пропорциональна $(A_{мод})^2$ и имеет постоянную составляющую (среднее значение) и составляющую, меняющуюся по синусоиде с частотой биений. Частота биений равна удвоенной частоте модуляции.

Пример 12. *Биения от двух источников видимого света.* В 1955 г. Форрестер, Гудмундсен и Джонсон осуществили блестящий эксперимент, зарегистрировав биения между двумя независимыми источниками видимого света примерно одинаковой частоты *). Источниками света служили газоразрядные ртутные трубки. Возбужденные атомы ртути испускают свет с частотой $\nu_{ср} = 5{,}49 \cdot 10^{14}$ *гц*, что соответствует яркой зеленой линии спектра. Трубки были помещены в магнитное поле, и поэтому частота, соответствующая зеленой линии спектра, «расщеплялась» на две близкие частоты, разность которых пропорциональна магнитному полю. Частота биений была $\nu_1 - \nu_2 \approx 10^{10}$ *гц*. Это — типичная «радарная», или «микроволновая», частота. Используемый авторами детектор в виде фотоэлемента давал электрический ток, пропорциональный квадрату амплитуды модуляции результирующего электрического поля в световой волне. Таким образом, это был квадратичный детектор.

*) A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen, P. O. Johnson, Photoelectric mixing of incoherent light (Фотоэлектрическое смешение некогерентного света), Phys. Rev. 99, 1691 (1955).

Изменение во времени выходной величины тока этого детектора аналогично изменению «громкости» $A^2_{\text{мод}}$ на рис. 1.13.

Пример 13. *Биения между двумя нормальными модами колебаний двух слабо связанных одинаковых осцилляторов.* Рассмотрим систему из двух одинаковых маятников, соединенных пружиной (рис. 1.14). Нормальные моды колебаний такой системы угадываются по аналогии со случаем продольных колебаний двух масс, рассмотренным в п. 1.4. Для моды 1 имеем $\psi_a = \psi_b$. В этом случае пружину можно не учитывать, так как возвращающая сила образуется

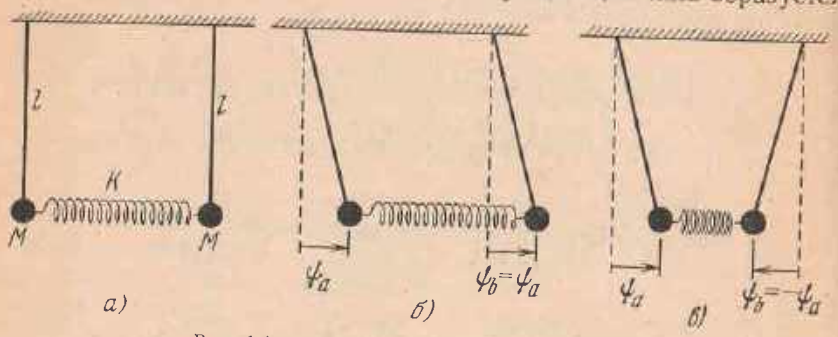



Рис. 1.14. Связанные одинаковые маятники.
*а)* Равновесие; *б)* мода с меньшей частотой; *в)* мода с большей частотой.

только силой тяжести. Возвращающая сила на единицу смещения и на единицу массы (для случая малых колебаний, когда возвращающая сила линейна) будет равна $Mg\theta/l\theta M = g/l$:

$$\text{мода 1:}\quad \omega_1^2 = g/l, \quad \psi_a = \psi_b. \tag{88}$$

Для моды 2 колебаний $\psi_a = -\psi_b$. Рассмотрим левый маятник. Возвращающая сила, вызванная пружиной, равна $2K\psi_a$. (Двойка появляется потому, что пружина сжата на величину $2\psi_a$.) Возвращающая сила, обусловленная силой тяжести, равна $Mg\theta = Mg\psi_a/l$. Обе эти силы имеют одинаковый знак, поэтому полная возвращающая сила на единицу массы и на единицу смещения будет:

$$\text{мода 2:}\quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{M}, \quad \psi_a = -\psi_b. \tag{89}$$

Мы хотим рассмотреть «биения между двумя модами колебаний» нашей системы. Что это значит? Каждая мода — это гармоническое колебание заданной частоты. В общем случае движение маятника $a$ будет суперпозицией двух мод:

$$\psi_a(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t).$$

Например, $\psi_a$ будет иметь вид, показанный на рис. 1.13, если частоты и амплитуды обеих мод примерно одинаковы. В этом случае движение маятника $a$ будет представлять собой биения. (Как мы увидим, то же следует сказать и о маятнике $b$.)



В любой системе с двумя степенями свободы можно создать биения. Наша система удобна тем, что подбором пружины или массы M легко добиться, чтобы разность $\nu_1 - \nu_2$ была мала по сравнению со средней частотой. [Это видно из формул (88) и (89).]

Как будут выглядеть биения? В соответствии с тем, что говорилось в п. 1.4, смещения маятников $\psi_a$ и $\psi_b$ могут быть выражены в нормальных координатах $\psi_1$ и $\psi_2$:

$$\left.\begin{aligned} \psi_a &= \psi_1 + \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \psi_b &= \psi_1 - \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Эффект биений будет наибольшим, если амплитуды двух мод равны. (Если одна из амплитуд $A_1$ или $A_2$ мала по сравнению с другой, биений не будет, так как практически есть только одно гармоническое колебание.) Поэтому положим $A_1 = A_2 = A$. Фазовые константы $\varphi_1$ и $\varphi_2$ связаны выбором начальных условий; мы положим их равными нулю: $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Тогда равенства (90) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \psi_a(t) &= A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t, \\ \psi_b(t) &= A\cos\omega_1 t - A\cos\omega_2 t. \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Скорости маятников равны

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi}_a(t) &\equiv \frac{d\psi_a}{dt} = -\omega_1 A \sin\omega_1 t - \omega_2 A \sin\omega_2 t, \\ \dot{\psi}_b(t) &\equiv \frac{d\psi_b}{dt} = -\omega_1 A \sin\omega_1 t + \omega_2 A \sin\omega_2 t. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Чтобы понять, как возбудить обе моды, чтобы получить биения, описываемые выражениями (91), рассмотрим *начальные условия* в момент времени $t = 0$. В соответствии с формулами (91) и (92) начальные смещения и скорости маятников равны

$$\psi_a(0) = 2A, \quad \psi_b(0) = 0; \quad \dot{\psi}_a(0) = 0, \quad \dot{\psi}_b(0) = 0.$$

Сместим маятник $a$ в положение $2A$, а маятник $b$ будем удерживать в нулевой точке, затем отпустим одновременно оба маятника и примем этот момент за начало отсчета времени $t = 0$. Наблюдая за маятниками, мы увидим красивое явление биений. (Обязательно сделайте этот опыт. Две банки консервов могут служить грузами $M$, а вместо «пружины» можно взять резиновый жгут. См. домашний опыт 1.8.) Амплитуда колебаний маятника $a$ уменьшается, а амплитуда колебаний маятника $b$ возрастает. В конце концов маятник $a$ остановится, а маятник $b$ будет иметь амплитуду и энергию колебаний, равные тем, с которыми начинал колебания маятник $a$. (Мы пренебрегаем трением.) При этом энергия колебаний полностью переходит от одного маятника к другому. Описанный процесс будет повторяться, и энергия колебаний будет медленно переходить от $b$ к $a$ и обратно. Один полный оборот энергии от $a$ к $b$ и опять к $a$ представляет собой биение. Период биений — время, за которое совершается этот оборот. Обратная величина представляет собой частоту биений.

Все эти результаты можно получить из выражений (91) и (92). Имея в виду, что в (91) $\omega_1 = \omega_{ср} + \omega_{мод}$ и $\omega_2 = \omega_{ср} - \omega_{мод}$, получим «почти гармонические» колебания

$$\psi_a(t) = A\cos(\omega_{ср} + \omega_{мод})t + A\cos(\omega_{ср} - \omega_{мод})t = \\ = (2A\cos\omega_{мод}t)\cos\omega_{ср}t \equiv A_{мод}(t)\cos\omega_{ср}t, \quad (93)$$

$$\psi_b(t) = A\cos(\omega_{ср} + \omega_{мод})t - A\cos(\omega_{ср} - \omega_{мод})t = \\ = (2A\sin\omega_{мод}t)\sin\omega_{ср}t \equiv B_{мод}(t)\sin\omega_{ср}t. \quad (94)$$

Найдем выражение для полной энергии (кинетическая плюс потенциальная) каждого маятника. Будем считать амплитуду $A_{мод}(t)$ практически постоянной в течение одного цикла «быстрых» колебаний и пренебрежем энергией, передаваемой пружиной маятнику. (Если пружина очень слабая, в ней никогда не будет запасено значительное количество энергии.) Мы считаем, что в течение одного цикла «быстрых» колебаний маятник $a$ — гармонический осциллятор с частотой $\omega_{ср}$ и постоянной амплитудой $A_{мод}$. Кинетическая энергия маятника $a$ будет равна

$$E_a = \frac{1}{2}M\omega_{ср}^2 A_{мод}^2 = 2MA^2\omega_{ср}^2\cos^2\omega_{мод}t. \quad (95)$$

Аналогично

$$E_b = \frac{1}{2}M\omega_{ср}^2 B_{мод}^2 = 2MA^2\omega_{ср}^2\sin^2\omega_{мод}t. \quad (96)$$

Полная энергия двух маятников — величина постоянная. Действительно, сложив (95) и (96), мы получаем

$$E_a + E_b = (2MA^2\omega_{ср}^2) = E. \quad (97)$$

Разность энергий двух маятников равна

$$E_a - E_b = E(\cos^2\omega_{мод}t - \sin^2\omega_{мод}t) = E\cos 2\omega_{мод}t = E\cos(\omega_1 - \omega_2)t. \quad (98)$$

Равенства (97) и (98) дают

$$E_a = \frac{1}{2}E[1 + \cos(\omega_1 - \omega_2)t], \quad (99а)$$

$$E_b = \frac{1}{2}E[1 - \cos(\omega_1 - \omega_2)t]. \quad (99б)$$

Из формул (99) следует, что полная энергия остается постоянной и что она переходит от одного маятника к другому с частотой биений. На рис. 1.15 показаны зависимости $\psi_a$, $\psi_b$, $E_a$ и $E_b$ от времени.

Примеры из квантовой физики. При изучении микроскопических систем (молекулы, элементарные частицы) можно встретить ряд красивых примеров — математических аналогов нашей системы из двух слабо связанных маятников. Для понимания этих систем необходимо знание квантовой механики. В этом случае «вещество», которое «течет» туда и обратно в микроскопической системе с двумя степенями свободы, представляет собой вероятность, а не энергию, как в случае двух слабо связанных



маятников. Дело в том, что здесь энергия «квантуется» и не может «дробиться», чтобы образовать поток. Поэтому либо один движущийся элемент, либо другой имеет сразу всю энергию, а то, что «течет»,

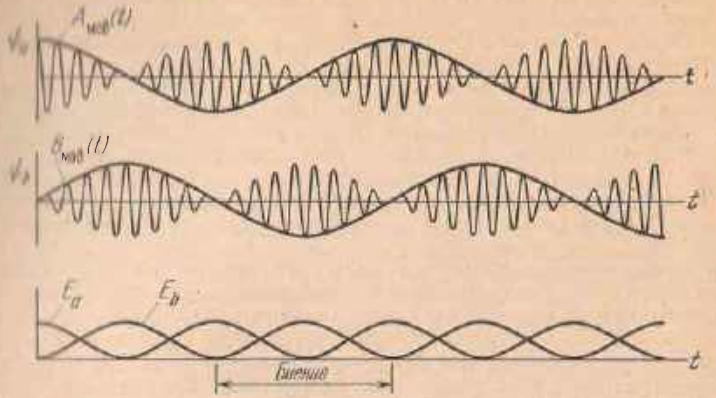



Рис. 1.15. Перемещение энергии между двумя слабо связанными одинаковыми маятниками. Энергия переходит от $a$ к $b$ и от $b$ к $a$ с частотой $|\nu_1 - \nu_2|$ биений обеих мод.

является вероятностью иметь данную энергию возбуждения. Два примера, с молекулами аммиака с нейтральными К-мезонами, рассмотрены в дополнении 1.

### Задачи и домашние опыты

1.1. Найдите частоты двух мод (в *гц*) для $LC$-цепи, показанной на рис. 1.12, если $L = 10$ *гн* и $C = 6$ *мкф*. Нарисуйте графики токов для каждой моды.

Ответ. $\nu_1 \approx 20$ *гц*, $\nu_2 \approx 35$ *гц*.

1.2. Если положить небольшой деревянный брусок на диск проигрывателя и наблюдать за ним одним глазом (чтобы избавиться от глубинного восприятия изображения), то движение, совершаемое по линии, перпендикулярной линии взгляда, будет гармоническим, т. е. будет иметь вид $x = x_0\cos\omega t$.

а) Докажите это утверждение.

б) Сделайте небольшой маятник, подвесив на веревке, например, болт или гайку. Длину маятника подберите такой, чтобы его движение было синхронизировано с движением деревянного бруска, лежащего на проигрывателе, при скорости 45 *об/мин*. Это будет прекрасной демонстрацией того факта, что проекция равномерного движения по окружности является гармоническим колебанием. Это также хороший способ определения ускорения силы тяжести $g$. Зная, чему оно равно, покажите, что $L \approx 45$ *см* при $\nu = 45$ *об/мин*.

1.3. Опыт. *Экран телевизора как стробоскоп*. Светящийся экран телевизора представляет собой хороший стробоскоп. Данная точка экрана в действительности бо́льшую часть времени является темной. Она светится в небольшие интервалы времени с постоянной частотой повторения. (Вы убедитесь в этом, быстро покачивая пальцем перед экраном.) Обозначим постоянную частоту повторения через $\nu_{гв}$. Целью опыта является измерение $\nu_{гв}$. Эта величина равна 50 *гц*. (Чтобы измерить $\nu_{гв}$, следует иметь стабильное, не мигающее и не ползущее, изображение.)

а) В качестве очень грубого опыта сделайте следующее. Покачивайте палец перед экраном с частотой, например, равной 4 *гц*. Наблюдайте стробоскопический эффект. Измерьте амплитуду колебаний пальца. Измерьте расстояние между соседними изображениями пальца в области максимальной скорости. Предположим,

что движение синусоидально. Вычислите максимальную скорость пальца, зная амплитуду и частоту. Используйте эти данные для определения $\nu_{тв}$.

б) Используя в качестве непрозрачного экрана газету или что-либо другое, оставьте открытой в экране телевизора горизонтальную полосу шириной в несколько сантиметров. Сядьте спиной к телевизору и смотрите на экран в зеркало, которое вы держите в руках. Начните колебать зеркало, вращая его около горизонтальной оси. Объясните, что вы наблюдаете. Теперь закройте экран телевизора, оставив незакрытой лишь вертикальную полосу, и покачайте зеркало относительно вертикальной оси. Какие выводы можно сделать в этом случае? (Один из выводов заключается в том, что телевизор будет лучшим стробоскопом, когда закрыт весь экран, за исключением горизонтальной полосы.) Теперь уберите газету и покачайте зеркало относительно горизонтальной оси. Вы увидите в зеркало много телевизионных экранов. Сможете ли вы заметить, что отраженные в колеблющемся зеркале экраны телевизоров имеют только половину горизонтальных линий на единицу вертикальной длины по сравнению с покоящимся экраном, видимым в неподвижном зеркале?

в) Рассмотрим точный способ измерения $\nu_{тв}$ с помощью проигрывателя и стробоскопического диска, который можно сделать следующим образом. Нарисуйте круг на листе белой бумаги. Сделайте карандашом метки через угловые интервалы, которые будут определять стробоскопическую суперпозицию последовательных меток. Одну треть круга предназначьте для стробоскопирования на 100 *гц*, другую треть — на 50 *гц* и последнюю треть — на 25 *гц*. Сделайте отверстие в центре и положите круг, как пластинку, на проигрыватель. Затем осветите его светом от экрана телевизора и наблюдайте, в каком секторе круга сделанные вами метки «остановились».

**1.4.** Опыт. *Измерение частоты колебаний.*

а) *Струна рояля.* Теперь, зная $\nu_{тв}$ (опыт 1.3), используйте экран телевизора для определения частоты колебаний струны пианино или рояля. Осветите две самые нижние октавы светом от экрана телевизора (все это делайте вечером, когда все другие огни погашены). Опустите демпфирующую педаль и побренчите по всем струнам, проводя рукой примерно по середине струн. (Если использовать ударные молоточки рояля, то амплитуда колебаний будет слишком мала.) Вы быстро обнаружите струну, которая «стоит спокойно». Запомните ее. Затем побренчите по струнам на октаву ниже. Если вы все сделали правильно, то более низкая струна будет казаться «стоящей спокойной», но будет «двоиться». (Почему?) Вы нашли струну рояля (и соответствующую клавишу) с частотой $\nu_{тв}$. Частоту этой ноты в каждой последующей октаве можно получать умножением на два. Чтобы проверить, правильно ли настроен ваш рояль, посмотрите ответ в справочнике по физике (музыкальная шкала).

б) *Струна гитары.* Аналогичный опыт можно проделать с гитарой. Предположим, что самая низкая струна (струна E) настроена*). Осветите ее с помощью телевизора. Она не будет «стоять спокойно». Ослабьте ее. После того, как вы спуститесь примерно на кварту, т. е. перейдете от E к более низкому тону B, струна будет «стоять спокойно». Спуститесь на октаву ниже и посмотрите, будет ли струна «двоиться». (В самой низкой ноте струна ослаблена очень сильно, но все равно пригодна для опыта.) Наконец, используйте ваши результаты для определения тона E нижней струны гитары. Равен ли он E82 или E164?

**1.5.** Рассмотрим передачу энергии между двумя слабо связанными гармоническими осцилляторами (п. 1.5). В момент $t=0$ осциллятор $a$ имеет всю энергию колебаний, а энергия колебаний осциллятора $b$ равна нулю. Легко видеть, какой осциллятор находится под внешним воздействием (это осциллятор $b$) и какой осциллятор выполняет роль «вынуждающей силы» (осциллятор $a$). Теперь рассмотрим момент времени $t={}^1/_4T_6$, отстоящий от $t=0$ на четверть цикла биений. К этому моменту маятник $a$ потерял половину своей энергии, а маятник $b$ приобрел эту энергию; амплитуда их колебаний одинакова. Как маятники могут теперь «знать», кто из них воздействует и кто находится под воздействием, и в каком направлении

*) В Америке для основных ступеней музыкального строя (см. стр. 96) приняты следующие обозначения: A — ля, B — си, C — до, D — ре, E — ми, F — фа, G — соль. Следующая за буквой цифра означает частоту в *гц*. (*Прим. ред.*)



[illegible] энергия? Предположим, что вы можете наблюдать за системой и следить за ней в течение одного колебания («быстрого» колебания с частотой $\omega_1$ или $\omega_2$) в то время, когда оба маятника имеют одинаковую энергию. Предскажите, каким будет распределение энергии: а) останется таким же; б) изменится так, что энергия осциллятора $b$ будет возрастать; в) изменится иначе. Попытайтесь не пользоваться формулами, а получить ответ, наблюдая за системой. (У к а з а н и е. Важное значение имеют фазовые соотношения.)

**1.6.** Придумайте демпфирующий механизм («трение»), который будет демпфировать только моду 1 связанных маятников (рис. 1.14). Придумайте другой механизм, который будет демпфировать только моду 2. Обратите внимание на то, что [illegible] в подвесе демпфирует *обе* моды. То же можно сказать про сопротивление воздуха. (См. дополнение 1.)

**1.7.** Опыт. *Связанные колебания ножовочных полотен.* Зажмите два ножовочных полотна в тиски, оставив свободными концы длиной около 10 *см*. Одним из способов настройки их на одну частоту является укорачивание высовывающейся части одного полотна до тех пор, пока оно не будет колебаться с нужной частотой, и затем настройка другого полотна на эту частоту. Другим способом является «стробирование» каждого полотна светом от экрана телевизора как удобного стробоскопа (см. опыт 1.3). Когда колебания обоих полотен будут достаточно близки по частоте, свяжите полотна резиновым жгутом. Возбудите колебания одного из полотен и наблюдайте биения между модами. Меняйте степень связи полотен, меняя положение резинового жгута вдоль полотен. Возникнут ли биения, если полотна не настроены (примерно) на одну частоту?

Приведем несколько других примеров, дающих возможность наблюдать пространственные биения: 1) два одинаковых магнита, подвешенных над бруском железа так, что они могут колебаться (т. е. магниты связаны своими полями); 2) две бельевые веревки или струны, привязанные одним концом к одной и той же упругой стойке и независимо закрепленные другими концами; 3) две струны гитары, настроенные на один тон.

**1.8.** Опыт. *Связанные маятники.* Достаньте «пружину» и две банки консервов. Используйте банки как грузы маятников, подвесив их на веревках длиной 50 *см*. Соедините банки с помощью «пружины». Измерьте частоты двух продольных мод и частоту обмена энергией. (Начните наблюдение из положения, когда один маятник отклонен, а другой находится в положении равновесия.) Равна ли эта частота, измеренная вами, частоте биений $\nu_1 - \nu_2$? Зная частоту самой низкой моды, частоту биений и число используемых витков, вычислите величину, обратную жесткости «пружины» на один виток, т. е. величину $K^{-1}/a$.

В действительности наша система имеет четыре степени свободы. Кроме двух продольных степеней свободы, соответствующих модам, изученным выше, существуют две поперечные моды, и им соответствуют колебания маятников, перпендикулярные оси «пружины». Возбудите эти моды и измерьте их частоты. Сравните частоты продольных и поперечных мод. Объясните результат.

**1.9.** Предположим, что длина нити одного маятника равна 1 *м*, а сам маятник представляет собой алюминиевую сферу диаметром 5 *см*. Второй маятник имеет такую же длину подвеса, но сделан из медной сферы диаметром 5 *см*. Оба маятника начинают колебаться одновременно и с одинаковой амплитудой $A$. После пяти минут свободных колебаний амплитуда колебаний алюминиевого маятника равна половине начальной. Чему равна амплитуда медного маятника? Считайте, что трение определяется величиной скорости маятника и что мгновенная скорость потерь энергии пропорциональна квадрату скорости маятника. Покажите, что энергия рассеивается экспоненциально. (Покажите, что для любой другой скоростной зависимости, скажем $v^4$, экспоненциальный закон несправедлив.) Покажите, что для экспоненциального затухания среднее время затухания пропорционально массе маятника. Окончательный ответ для амплитуды колебаний медного маятника: $0{,}81\ A$.

**1.10.** Невесомая пружина подвешена к потолку. Длина пружины 20 *см*. К нижнему концу пружины прикреплена масса $M$. Будем поддерживать массу руками, так чтобы пружина оставалась расслабленной. Затем внезапно уберем руки. Масса и пружина будут совершать колебания. Пусть самое нижнее положение массы во время этих колебаний на 10 *см* ниже равновесного.

а) Чему равна частота колебаний? б) Чему равна скорость, когда масса находится на 5 *см* ниже первоначального положения равновесия?

Ответ. а) 2,2 *гц* б) 70 *см/сек*.

К первой массе добавляется вторая масса в 300 *г*. Таким образом, полная масса равна $M+300$ *г*. Когда такая система колеблется, частота ее колебаний равна половине частоты колебаний системы с массой $M$.

в) Чему равно $M$? г) Где будет новое положение равновесия?

Ответ. в) 100 *г*; г) на 15 *см* ниже старого положения.

**1.11.** Найдите моды и их частоты для системы из масс, связанных пружинами (см. рисунок). Массы скользят по поверхности без трения. В равновесии все пружины расслаблены. Считайте, что $M_1=M_2=M$.

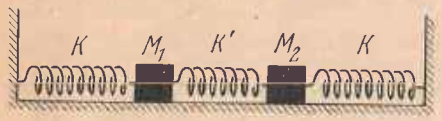



Рис. к задаче 1.11.

**1.12.** Опыт. *Биения от двух камертонов.* Возьмите два камертона с одинаковыми номинальными частотами, например камертоны С523,3 или А440. Ударьте камертоны один о другой на равном расстоянии от концов ножек. Расположите камертоны около одного уха, выбрав такие положения, при которых вы слышите биения. «Нагрузите» ножку одного камертона, надев на нее резиновое кольцо. Изменяя положение резинового кольца на ножке камертона, можно менять частоту биений.

Простые обеденные вилки могут быть хорошими камертонами. Постарайтесь найти две вилки, дающие примерно один и тот же тон и соответственно биения. Бокалы для вина иногда также дают чистые тона (обычно их колебания соответствуют сразу нескольким модам). Прислушиваясь к биениям, которые создаются колокольчиками (или двумя крышками от котелков), вы обнаружите, что отдельный колокольчик также является источником биений. Объяснение — в том, что он имеет две моды с близкими частотами. Ударяя по краю колокольчика, вы возбуждаете обе моды.

**1.13.** Опыт. *Нелинейность уха; комбинационные тона.* Для этого опыта нужны камертоны А440 и С523 (можно взять и другую пару) и тишина. Ударьте одним камертоном о другой. Поднесите их к уху поочередно. Затем, держа камертон А440 около уха, поднесите С523, но не фиксируйте внимание только на А440 или только на С523. Слушайте ноту примерно на большую терцию ниже А440. (При таком способе слушания — сперва С, затем А, затем оба камертона вместе — нужно сосредоточиться на низких тонах.) После некоторых попыток вы услышите ноту F, которая ниже А440. (Много людей не слышат этой ноты. Музыканты услышат ее сразу.) Чтобы облегчить задачу, попробуйте найти эти ноты на рояле. В результате вы услышите приятное F-мажорное трезвучие, т. е. F, A, C. Чтобы доказать, что за это явление ответственно ухо, а не мозг (т. е. доказать, что этот аккорд слышится не потому, что мозг воспринимает только мажорные трезвучия, вводя отсутствующую ноту аккорда F), поместите один камертон у одного уха и другой камертон — у другого. Если бы это явление было психологическим мы должны были бы слышать аккорд и в этом случае. Так ли это? Приведем по крайней мере часть объяснения.

Пусть $p(t)$ — звуковое давление снаружи барабанной перепонки, $q(t)$ — реакция барабанной перепонки (т. е. ее смещение); $q(t)$ может быть реакцией мембраны во внутреннем ухе — в этом мы точно не уверены. Мы хотим понять, почему реакция $q(t)$ нашего слухового аппарата *не подчиняется принципу суперпозиции*, т. е. почему реакция $q(t)$ содержит не только частоты $\nu_1$ (А440) и $\nu_2$ (С523), но также и третью частоту $\nu_3$ ($\approx$F349). Объяснение заключается в нелинейности. (Мы уже знаем, что принцип суперпозиции справедлив для линейных систем, и ниже мы опять убедимся в этом.) Предположим, что реакция уха $q(t)$ является нелинейной функцией звукового давления $p(t)$:

$$q(t)=\alpha p(t)+\beta p^2(t)+\gamma p^3(t).$$

Пусть $p(t)$ — суперпозиция двух различных гармонических колебаний (образованных двумя камертонами). Для простоты мы считаем, что амплитуды колебаний одинаковы, а фазы равны нулю. Будем также считать, что в выбранной системе



равны амплитуды равны единице. Имеем

$$p(t)=\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t.$$

Реакция $q(t)$ барабанной перепонки равна

$$q(t)=\alpha[\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t]+\beta[\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t]^2+\gamma[\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t]^3.$$

Если $\beta$ и $\gamma$ равны нулю, то говорят, что реакция $q$ линейна. (Она подчиняется в этом случае совершенно линейному закону Гука для пружины.) Линейная реакция $q(t)=\alpha(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t)$ является суперпозицией гармонических колебаний с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$. (В этом случае вы не слышите F!) Член с коэффициентом $\beta$ определяет квадратичную нелинейность, а следующий член — кубическую.

Мы хотим представить реакцию $q(t)$ в виде суперпозиции гармонических колебаний. Для этого нужно несколько тригонометрических тождеств, которые мы сейчас выведем. Пусть $f(x)\equiv\cos x$. Очевидно, что $\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$, т. е.

$$f(x)f(y)=\frac{1}{2}f(x+y)+\frac{1}{2}f(x-y).$$

Используем этот результат для вывода равенства (необходимого для анализа кубической нелинейности)

$$[f(x)f(y)]f(z)=\left[\frac{1}{2}f(x+y)+\frac{1}{2}f(x-y)\right]f(z)=$$
$$=\frac{1}{2}f(x+y)f(z)+\frac{1}{2}f(x-y)f(z)=$$
$$=\frac{1}{4}f(x+y+z)+\frac{1}{4}f(x+y-z)+\frac{1}{4}f(x-y+z)+\frac{1}{4}f(x-y-z).$$

Теперь займемся квадратичным членом реакции $q(t)$. Полагая $\theta_1\equiv\omega_1 t$, $\theta_2\equiv\omega_2 t$, имеем (для квадратичной нелинейности)

$$(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t)^2\equiv[f(\theta_1)+f(\theta_2)]^2=$$
$$=[f(\theta_1)f(\theta_1)]+[2f(\theta_1)f(\theta_2)]+[f(\theta_2)f(\theta_2)]=\left[\frac{1}{2}f(\theta_1+\theta_1)+\frac{1}{2}f(\theta_1-\theta_1)\right]+$$
$$+[f(\theta_1+\theta_2)+f(\theta_1-\theta_2)]+\left[\frac{1}{2}f(\theta_2+\theta_2)+\frac{1}{2}f(\theta_2-\theta_2)\right].$$

Таким образом, в квадратичный член реакции входят частоты $2\omega_1$, 0, $\omega_1+\omega_2$, $\omega_1-\omega_2$ и $2\omega_2$, которые называются *комбинационными тонами* или *комбинационными частотами*.

Кубический нелинейный член реакции имеет вид

$$(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t)^3=[f(\theta_1)+f(\theta_2)]^3=f^3(\theta_1)+3f^2(\theta_1)f(\theta_2)+$$
$$+3f(\theta_1)f^2(\theta_2)+f^3(\theta_2).$$

Используя равенство для $f(x)f(y)f(z)$, мы видим, что член $f^3(\theta_1)$ является суперпозицией гармонических колебаний с частотами $3\omega_1$ и $\omega_1$; член $f^2(\theta_1)f(\theta_2)$ определяется суперпозицией частот $2\omega_1+\omega_2$, $2\omega_1-\omega_2$ и $\omega_2$; член $f(\theta_1)f^2(\theta_2)$ является суперпозицией частот $2\omega_2+\omega_1$, $2\omega_2-\omega_1$ и $\omega_1$; член $f^3(\theta_2)$ является суперпозицией частот $3\omega_2$ и $\omega_2$. Таким образом, кубический член реакции является суперпозицией гармонических колебаний с частотами $3\omega_1$, $\omega_1$, $2\omega_1\pm\omega_2$, $2\omega_2\pm\omega_1$, $\omega_2$ и $3\omega_2$.

Вернемся теперь к нашему опыту. Простые арифметические выкладки показали нам, что F не связано с квадратичным нелинейным членом, а определяется вкладом кубического нелинейного члена, а именно частотой $2\omega_1-\omega_2$:

$$\nu_1=\text{A440},\quad \nu_2=\text{C523},\quad 2\nu_1-\nu_2=880-523=357.$$

Для равномерно темперированного строя частота ноты F равна 349 *гц*. Таким образом, $2\nu_1-\nu_2$ достаточно близко к F.

Теперь рассмотрим интересный вопрос. Связана ли причина кубической нелинейности с барабанной перепонкой или же с резонирующей основной перепонкой?

Автору кажется, что кубическая нелинейность не связана с барабанной перепонкой, и вот по каким соображениям: отодвигая два камертона от уха, так что интенсивность, получаемая от каждого камертона, уменьшается, я все равно слышу ноту F. Если бы это происходило из-за нелинейной реакции барабанной перепонки, то громкость этой ноты падала бы с расстоянием значительно быстрее, чем громкость нот $\nu_1$ и $\nu_2$. Кроме того, должен был бы присутствовать нелинейный вклад с частотой $2\nu_2-\nu_1=1046-440=606\approx$ половина расстояния между $D$ и $D_\#$, но эта нота не слышна. Все это еще не доказывает, что за явление ответственна основная перепонка, однако ставит под сомнение влияние барабанной перепонки. Могут ли здесь играть какую-либо роль нервные окончания основной перепонки, автору неизвестно. (Он обнаружил этот эффект случайно, работая над домашними опытами. Возможно, этот эффект хорошо известен и понятен.)

*Оптические гармоники.* Возможно образование оптических гармоник (а также сумм и разности частот, т. е. комбинационных частот). Для этого нужен незначительный нелинейный вклад в диэлектрическую постоянную прозрачного вещества. На обложке журнала «Scientific American» за июль 1963 г. помещена красивая фотография, на которой показан пучок красного света (с длиной волны 6940 Å), падающий на кристалл. С противоположной стороны кристалла выходит пучок синего света (с длиной волны 3470 Å). Уменьшение длины волны в два раза соответствует удвоению частоты. Причиной такого удвоения является квадратичная нелинейность. Посмотрите статью «Взаимодействие света со светом» [The Interaction of Light with Light, J. A. Giordmaine, Scientific American (April 1964).]

**1.14.** *Суперпозиция начальных условий дает суперпозицию соответствующих движений.* Предположим, что $a$ и $b$ — два связанных осциллятора. Рассмотрим три различных начальных условия:

1. $a$ и $b$ начинают движение с амплитудами 1 и $-1$ соответственно.
2. $a$ и $b$ начинают движение с амплитудами 1 и 1.
3. $a$ и $b$ начинают движение с амплитудами 2 и 0 соответственно.

Таким образом, начальные условия 3 являются суперпозицией начальных условий 1 и 2. Покажите, что движение в случае 3 является суперпозицией движений 1 и 2.

**1.15.** Докажите задачу 1.14 в общем случае, когда в начальные условия наряду со смещением входят скорости.

**1.16.** Докажите справедливость принципа суперпозиции для неоднородных линейных уравнений, приведенных после уравнения (36). Докажите, что принцип суперпозиции неприменим к нелинейным неоднородным уравнениям.

**1.17.** Напишите три уравнения для системы с тремя степенями свободы, аналогичные уравнениям (47) и (48). Покажите, что для определенной моды колебаний имеет место уравнение типа «определитель $=0$». Оно аналогично уравнению (56), но получается из определителя третьего порядка. Покажите, что это дает уравнение третьей степени относительно переменной $\omega^2$. Поскольку кубическое уравнение имеет три решения, то существуют три моды. Рассмотрите случай $N$ степеней свободы и докажите, что для такой системы существует $N$ мод.

**1.18.** Опыт. *Биения от слабо связанных неидентичных струн гитары.* Настройте две самые низкие струны гитары на одинаковую частоту. Щипните одну струну и наблюдайте за второй. (Струны должны быть настроены на одну и ту же частоту как можно точнее. Показателем наиболее точной настройки является получение максимальных биений в этом опыте.) Теперь щипните другую струну. Передается ли энергия полностью от одной струны к другой в процессе биений? Можно ли добиться полной передачи энергии, улучшив настройку? Опишите, что вы наблюдаете. Как это объяснить? См. задачу 1.19.

**1.19.** *Неидентичные связанные маятники.* Рассмотрим два маятника, $a$ и $b$, с одинаковой длиной нитей подвеса $l$, но с различными массами грузов $M_a$ и $M_b$. Маятники связаны пружиной, прикрепленной к массам и имеющей коэффициент жесткости $K$. Покажите, что уравнения движения для малых колебаний имеют вид

$$M_a\frac{d^2\psi_a}{dt^2}=-M_a\frac{g}{l}\psi_a+K(\psi_b-\psi_a),\qquad M_b\frac{d^2\psi_b}{dt^2}=-M_b\frac{g}{l}\psi_b-K(\psi_b-\psi_a).$$



Решите эти уравнения для двух мод способом нормальных координат. Покажите, что $\psi_1=(M_a\psi_a+M_b\psi_b)/(M_a+M_b)$ и $\psi_2=\psi_a-\psi_b$ являются нормальными координатами. Найдите частоты и конфигурации мод. Каков физический смысл координат $\psi_1$ и $\psi_2$? Найдите суперпозицию двух мод со следующими начальными условиями при $t=0$: оба маятника имеют нулевую скорость; маятник $a$ имеет амплитуду $A$, а амплитуда маятника $b$ равна нулю. Пусть $E$ равно полной энергии, которую имеет маятник $a$ в момент $t=0$. Найдите выражения для $E_a(t)$ и $E_b(t)$. Предположим, что связь слабая. Будет ли энергия маятника $a$ полностью передаваться маятнику $b$ в течение цикла биений? Возможно ли, что энергия передается полностью, если первоначально вся энергия была у легкого маятника, и не передается полностью в противоположном случае?

Ответ.

$$\omega_1^2=\frac{g}{l},\qquad \omega_2^2=\frac{g}{l}+K\left(\frac{1}{M_a}+\frac{1}{M_b}\right);$$

$$\psi_a=A\left(\frac{M_a}{M}\cos\omega_1 t+\frac{M_b}{M}\cos\omega_2 t\right),\qquad \psi_b=A\,\frac{M_a}{M}(\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t),$$

где $M=M_a+M_b$.

Вводя частоты $\omega_{\text{мод}}=\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)$ и $\omega_{\text{ср}}=\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_1)$, можно написать

$$\psi_a=(A\cos\omega_{\text{мод}}t)\cos\omega_{\text{ср}}t+\left(A\,\frac{M_a-M_b}{M}\sin\omega_{\text{мод}}t\right)\sin\omega_{\text{ср}}t,$$

$$\psi_b=\left(2A\,\frac{M_a}{M}\sin\omega_{\text{мод}}t\right)\sin\omega_{\text{ср}}t.$$

Энергию каждого маятника легко найти, если связь между маятниками невелика. В этом случае можно пренебречь изменениями $\sin\omega_{\text{мод}}t$ или $\cos\omega_{\text{мод}}t$ за один цикл быстрых колебаний, происходящих с частотой $\omega_{\text{ср}}$, так как $\omega_{\text{мод}}\ll\omega_{\text{ср}}$. Мы также пренебрегаем энергией, запасенной в любой момент времени в пружине. Таким образом,

$$E_b=E\left(\frac{2M_aM_b}{M^2}\right)[1-\cos(\omega_2-\omega_1)t],$$

$$E_a=E\left[\frac{M_a^2+M_b^2+2M_aM_b\cos(\omega_2-\omega_1)t}{M^2}\right].$$

Итак, энергия маятника $a$ (т. е. маятника, у которого в момент времени $t=0$ была вся энергия) изменяется синусоидально с частотой биений, колеблясь между максимальным значением $E$ и минимальным значением $[(M_a-M_b)/M]^2E$.

Энергия маятника $b$ колеблется с частотой биений между минимальным нулевым значением и максимальным значением $(4M_aM_b/M^2)E$. Полная энергия $E_a+E_b$ постоянна (так как мы пренебрегли затуханием). Теперь вспомните домашний опыт 1.18. Объясните, почему при неравных массах не происходит полной передачи энергии. (Указание. Рассмотрите два предельных случая: 1. $M_a\gg M_b$. 2. $M_a\ll M_b$.)

**1.20.** *Поперечные колебания двух связанных масс.* Используя либо приближение «пружины», либо приближение малых колебаний, найдите два связанных уравнения движения для поперечных смещений $\psi_a$ и $\psi_b$ (см. рис. 1.11).

а) Используйте описанный в тексте главы аналитический метод нахождения частот и отношений амплитуд для обеих нормальных мод.

б) Найдите линейную комбинацию координат $\psi_a$ и $\psi_b$, которая дает несвязанные уравнения, т. е. найдите нормальные координаты. Найдите частоты и отношения амплитуд для обеих мод.

Ответ. См. уравнения (70) и (71).

**1.21.** *Колебания в двух связанных LC-цепях.* Найдите две нормальные моды колебаний для связанных цепей, показанных на рис. 1.12, когда уравнения движения имеют вид (77) и (78).

а) Воспользуйтесь аналитическим методом.

б) Используйте метод нахождения нормальных координат.

Ответ. См. уравнение (79).

**1.22.** Тяжелый предмет лежит на резиновой подушке (которая применяется как амортизатор), сжимая ее на 1 *см*. Если ударить по предмету в вертикальном направлении, он начнет колебаться. (Колебания будут затухать; мы пренебрегаем затуханием.) Оцените частоту колебаний. (У к а з а н и е. Считайте, что подушка ведет себя как пружина, подчиняющаяся закону Гука.)

О т в е т. Около 5 *гц*.

**1.23.** *Продольные колебания двух связанных масс.* Система показана на рис. 1.9. Уравнения (62) и (63) являются уравнениями движения системы. Используйте аналитический метод, выраженный уравнениями (47)—(59), для нахождения мод. Вы должны не просто подставить ваши данные в эти уравнения, а выполнить, «не подглядывая», всю последовательность действий.

О т в е т. См. уравнения (60) и (61).

**1.24.** Опыт. *Мода «омывания» в сосуде с водой.* Первая мода колебаний в замкнутом объеме жидкости может быть названа модой «омывания»*). Каждый, кто когда-либо пытался нести полный сосуд с водой без расплескивания, знает, что эту моду легко возбудить.

Наполните прямоугольный сосуд водой и слегка толкните его. Еще лучше поместить сосуд на горизонтальную поверхность, наполнить его до краев и затем долить так, чтобы вода «вздулась» (поднялась) над краями. Слегка толкните сосуд. После того, как более высокие моды затухнут, можно наблюдать моду «омывания», которая затухает очень медленно. (Это — гравитационная мода, несмотря на то что мы используем поверхностное натяжение, чтобы удержать воду «над стенками»; этим затухание сводится к минимуму.) Поверхность воды остается практически плоской (после того как более высокие моды затухнут). Предположим, что мода все время плоская: горизонтальная — в положении равновесия и наклонная — в крайних положениях. Пусть ось $x$ совпадает с горизонтальным направлением, а ось $y$ направлена вверх. Пусть $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — горизонтальная и вертикальная координаты центра тяжести воды в сосуде с равновесными значениями $\bar{x}_0$ и $\bar{y}_0$. Найдите зависимость $(\bar{y}-\bar{y}_0)$ от $(\bar{x}-\bar{x}_0)$. (Удобной переменной может служить уровень воды на одном конце сосуда, отсчитанный от равновесного уровня.) Увеличение потенциальной энергии всего объема воды равно $mg\,(\bar{y}-y_0)$. Вы обнаружите, что $(\bar{y}-\bar{y}_0)$ пропорционально $(\bar{x}-\bar{x}_0)^2$. Таким образом, потенциальная энергия центра тяжести, подобно потенциальной энергии гармонического осциллятора, пропорциональна квадрату смещения от равновесного положения. Используйте второй закон Ньютона, предполагая, что вся масса воды $m$ сосредоточена в центре тяжести. Найдите формулу для частоты.

О т в е т. $\omega^2=3gh_0/L^2$, где $h_0$ — равновесная глубина воды, $g=980$ *см/сек*$^2$ и $L$ равно половине длины сосуда вдоль направления движения волны, т. е. вдоль $x$. Проверьте эту формулу, т. е. измерьте $\omega$, $h_0$ и $L$ для вашего сосуда и сравните полученные значения с формулой.

**1.25.** *Сейши.* Как известно, средняя глубина Женевского озера около 150 *м*, а длина порядка 60 *км* (включая узкую западную часть озера). Аппроксимируя озеро прямоугольным сосудом, мы можем использовать формулу для $\omega^2$, полученную в домашнем опыте 1.24. Какой период сейш (т. е. мод «омывания») дает эта формула при условии, что сейши распространяются вдоль длинной стороны озера? (Наблюдаемый период — порядка часа.) Вероятной причиной образования сейш является резкое различие атмосферного давления над разными участками озера. Наблюдаемые амплитуды достигают полутора метров.

В июне 1954 г. сейша с амплитудой около 3 *м*, возникшая на озере Мичиган, смыла рыболовов, ловивших рыбу на пирсе.

В соответствии с сообщением в «Time» (17 ноября 1967 г.), ударные волны от сильного землетрясения на Аляске в «страстную» пятницу 1964 г. вызвали образование сейш на реках, озерах и в гаванях вдоль береговой линии США, а также привели к выплескиванию воды из плавательных бассейнов.

*) Здесь и дальше этим условным термином переведено выражение «sloshing mode in a pan of water». (*Прим. ред.*)

ГЛАВА 2

# СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

## § 1. Введение

В главе 1 мы рассмотрели поведение систем с одной или двумя степенями свободы. Здесь мы будем изучать системы, имеющие $N$ степеней свободы, причем $N$ может быть очень большим и даже «бесконечно большим» числом.

У системы с $N$ степенями свободы имеется только $N$ мод (см. задачу 1.17). Каждая мода обладает своей собственной частотой и «формой», определяемой отношением амплитуд $A$: $B$: $C$: $D$: и т. д. Эти амплитуды соответствуют степеням свободы $a$, $b$, $c$, $d$ и т. д.). Все движущиеся элементы при данной моде колебаний одновременно проходят положение равновесия, т. е. движение, соответствующее каждой степени свободы, происходит с одинаковой фазовой постоянной. Таким образом, у каждой моды имеется своя фазовая постоянная, которая определяется начальными условиями. Так как для данной моды колебания всех степеней свободы происходят с одинаковой частотой $\omega$, то каждому движущемуся элементу соответствует одинаковая величина восстанавливающей силы, приходящейся на единицу смещения и единицу массы, равная $\omega^2$.

Предположим, что мы имеем систему с четырьмя степенями свободы $a$, $b$, $c$, $d$. У нее существуют четыре моды колебаний. Предположим, что для моды 1 отношения амплитуд равны

$$A:B:C:D=1:0:-2:7.$$

Тогда смещения по степеням свободы $a$, $b$, $c$ и $d$ (если возбуждена только мода 1) имеют вид

$$\psi_a=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1),\quad \psi_b=0,\ \psi_c=-2\psi_a,\ \psi_d=7\psi_a,$$

где $A_1$ и $\varphi_1$ определяются начальными условиями.

Если система состоит из очень большого числа движущихся элементов, заключенных в ограниченном объеме, то среднее расстояние между соседними элементами становится очень малым. В пределе число элементов можно считать бесконечно большим, при этом

расстояние между соседними элементами будет стремиться к нулю. В этом случае система ведет себя так, как если бы она была «непрерывной». Такое утверждение подразумевает, что движение соседних элементов системы почти одинаково, т. е. что смещение всех движущихся элементов в окрестности точки $x$ может быть описано вектором смещения $\psi(x, y, z, t)$, где $\psi$ — непрерывная функция координат $x$, $y$, $z$ и времени $t$. Эта функция заменяет описание, задающее смещение $\psi_a(t)$, $\psi_b(t)$ и т. д. отдельных элементов. Мы говорим в этом случае, что имеем дело с *волнами*.

*Стоячие волны являются нормальными модами.* Моды непрерывных систем называются *стоячими волнами*, или *нормальными модами*, или просто *модами*. В соответствии с тем, что было сказано выше, непрерывная система имеет бесконечное число независимых движущихся элементов, несмотря на то что занимает конечный объем. Поэтому она обладает бесконечно большим числом степеней свободы и соответственно бесконечным числом мод. Это не может быть абсолютно верным для реальных материальных систем. Один литр воздуха имеет не бесконечно большое число движущихся элементов, а только $2{,}7 \cdot 10^{22}$ молекул, у каждой из которых три степени свободы (движения вдоль $x$-, $y$- и $z$-направлений). Поэтому 1 *л* воздуха, заключенный в бутылку, не имеет бесконечно большого числа мод колебаний: это число не может быть больше, чем $\sim 8{,}1 \cdot 10^{22}$. Каждый, кто пытался дуть в бутылку или играть на флейте, заметил, что легко возбудить лишь несколько первых мод. (В дальнейшем мы будем нумеровать моды в порядке возрастания частоты. Таким образом, моде 1 соответствует самая низкая частота, моде 2 — следующая, более высокая, частота и т. д.) На практике мы будем иметь дело с небольшим числом первых мод (или в крайнем случае с несколькими десятками или тысячами мод). Мы увидим, что первые моды ведут себя так, как если бы система была непрерывной.

Общее движение системы может быть описано как суперпозиция всех ее мод с амплитудами и фазовыми константами, определяемыми из начальных условий. В этом общем случае поведение колеблющейся системы будет казаться очень сложным, так как в сложном движении, являющемся суперпозицией многих мод, очень трудно различать отдельно каждую моду.

*Моды колебаний струны с грузами.* Начнем с изучения поперечных колебаний струны с грузами. Под «струной» мы подразумеваем пружину. Предположим, что мы имеем линейные (т. е. подчиняющиеся закону Гука) невесомые пружины, на которых расположены точечные массы $M$ (грузы). (На рисунках будем изображать пружины прямой, а не винтовой линией.)

На рис. 2.1 представлена последовательность таких струн с грузами. Для первой системы $N = 1$ (одна степень свободы), для следующей $N = 2$ и т. д. Для каждой системы на рис. 2.1 показаны конфигурации, соответствующие нормальным модам. Позже мы получим выражения, характеризующие конфигурацию и частоту каждой моды.



Уже сейчас легко понять (поверив, что показанные конфигурации совпадают с конфигурациями мод), что мы правильно расположили конфигурации в порядке возрастания частоты мод. Действительно, при заданном смещении данного груза с увеличением номера моды возрастает величина угла между струной и горизонтальной осью, отвечающей состоянию равновесия. Увеличение угла означает

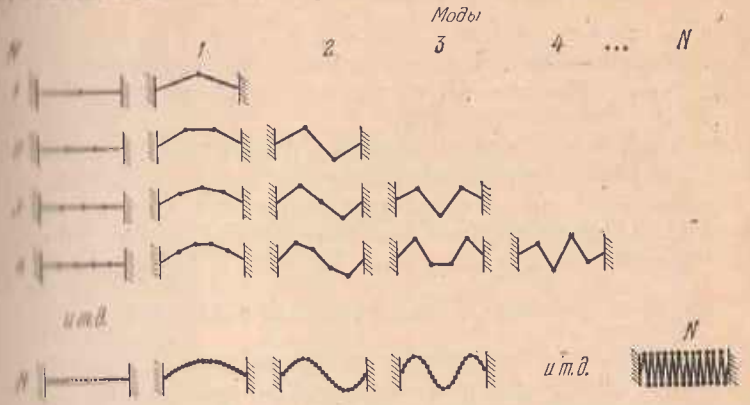



Рис. 2.1. Моды поперечных колебаний нагруженной струны.
Струна с $N$ грузами имеет $N$ мод. В $m$-й моде положение равновесия пересекается струной $m - 1$ раз, и мода состоит из $m$ полуволн. Мода с самой большой частотой соответствует показанной на рисунке кривой с «зигзагами».

увеличение возвращающей силы, приходящейся на единицу смещения и единицу массы для каждого заданного груза, а следовательно, возрастание частоты моды.

Другим очевидным фактом является то, что последовательность предполагаемых мод образует именно $N$ конфигураций: число узловых точек (точки, в которых пружина пересекает горизонтальную ось, включая концевые точки) равно нулю в первой моде, вторая мода имеет одну узловую точку и т. д. Самая высокая мода имеет максимально возможное число узловых точек, равное $N-1$.

## 2.3. Моды поперечных колебаний непрерывной струны

Обсудим случай, когда $N$ велико, например $N = 10^6$ или такого порядка. Тогда для первых мод (скажем, первых нескольких тысяч) между двумя соседними узлами окажется очень много грузов. Смещение будет медленно меняться от одного груза к другому. (Мы не будем рассматривать самые высокие моды, так как в этих модах между соседними узловыми точками окажется всего лишь несколько грузов. В этом случае струна имеет большое число «зигзагов» и описание смещения с помощью непрерывной функции $\psi(x, y, z, t)$ перестает быть хорошим приближением.) В соответствии со сказанным выше мы не будем описывать мгновенную конфигурацию перечнем смещений $\psi_a(t)$, $\psi_b(t)$, $\psi_c(t)$, $\psi_d(t)$ и т. д. каждого

груза. Вместо этого будем считать, что все частицы в окрестности точки $(x, y, z)$, отвечающей положению равновесия (окрестность может быть бесконечно малым кубом с ребрами $\Delta x$, $\Delta y$ и $\Delta z$), имеют один и тот же мгновенный вектор смещения $\psi(x, y, z, t)$:

$$\psi(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{x}}\psi_x(x, y, z, t) + \hat{\mathbf{y}}\psi_y(x, y, z, t) + \hat{\mathbf{z}}\psi_z(x, y, z, t). \quad (1)$$

Здесь $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ и $\hat{\mathbf{z}}$ — единичные векторы, а $\psi_x$, $\psi_y$ и $\psi_z$ — компоненты вектора смещения $\psi$. Важно понимать, что координаты $x$, $y$, $z$ представляют собой *равновесное* положение частиц. Таким образом, $x$, $y$ и $z$ не зависят от времени.

*Продольное и поперечное смещения.* Выражение (1) имеет значительно более общую форму, чем нужно для изучения колебаний струны. Предположим, что в состоянии равновесия струна растянута вдоль оси $z$. Тогда координата $z$ дает положение равновесия каждого груза и выражение (1) может быть записано в более простом виде:

$$\psi(z, t) = \hat{\mathbf{x}}\psi_x(z, t) + \hat{\mathbf{y}}\psi_y(z, t) + \hat{\mathbf{z}}\psi_z(z, t). \quad (2)$$

Смещения вдоль оси $z$ называются *продольными*, а вдоль осей $x$ и $y$ — *поперечными*. Здесь мы рассмотрим только поперечные колебания струны. Поэтому мы положим функцию $\psi_z$ равной нулю:

$$\psi(z, t) = \hat{\boldsymbol{x}}\psi_x(z, t) + \hat{\boldsymbol{y}}\psi_y(z, t). \quad (3)$$

*Линейная поляризация.* Для большей простоты положим, что колебания происходят только вдоль оси $\hat{\mathbf{x}}$ (т. е. $\psi_y = 0$). В этом случае говорят, что колебания *линейно-поляризованы* вдоль $\hat{\mathbf{x}}$. (В главе 8 мы будем изучать общий случай поляризации.) Опустив единичный вектор $\hat{\mathbf{x}}$ и индекс в $\psi_x$, мы можем написать:

$$\psi(z, t) = \text{мгновенное поперечное смещение частиц, имеющих равновесное положение } z. \quad (4)$$

Теперь рассмотрим очень малый элемент непрерывной струны. В равновесном состоянии он занимает интервал длиной $\Delta z$ с центром в $z$. Масса единицы длины, т. е. отношение $\Delta M/\Delta z$, называется *линейной* (или *погонной*) *плотностью* $\rho_0$:

$$\Delta M = \rho_0 \Delta z. \quad (5)$$

Предположим, что линейная плотность не меняется вдоль всей струны. Предположим также, что натяжение струны в положении равновесия $T_0$ также одинаково по всей ее длине.

В общем случае, когда струна не находится в состоянии равновесия, среднее смещение нашего сегмента равно $\psi(z, t)$ (рис. 2.2). Сегмент будет обладать некоторой кривизной, так как углы $\theta_1$ и $\theta_2$ не равны (см. рис. 2.2). При этом длина сегмента уже не равна $\Delta z$, поэтому и натяжение не равно больше $T_0$. Найдем силу $F_x$, действующую на сегмент. На левом конце на сегмент действует сила $T_1 \sin\theta_1$,



направленная вниз. Сила $T_2 \sin\theta_2$, действующая на правый конец сегмента, направлена вверх. Полная сила, действующая на сегмент, равна

$$F_x(t) = T_2 \sin\theta_2 - T_1 \sin\theta_1. \quad (6)$$

Мы хотим выразить $F_x(t)$ через $\psi(z, t)$ и ее пространственную производную:

$$\frac{\partial\psi(z, t)}{\partial z} = \text{наклон кривой в точке } z \text{ в момент времени } t. \quad (7)$$

В соответствии с рис. 2.2 наклон струны в точке $z_1$ равен $\operatorname{tg}\theta_1$, а наклон в точке $z_2$ равен $\operatorname{tg}\theta_2$. Горизонтальные компоненты натяжения струны в точках $z_1$ и $z_2$ равны соответственно $T_1\cos\theta_1$ и $T_2\cos\theta_2$. Наша цель — получить *линейное* дифференциальное уравнение движения. Мы будем работать либо с приближением «пружины», либо с приближением малых колебаний. В случае приближения «пружины» $T$ больше $T_0$ в $1/\cos\theta$ раз, потому что сегмент больше $\Delta z$ во столько же раз: $T\cos\theta = T_0$. В случае малых колебаний мы пренебрегаем возрастанием длины сегмента и принимаем $\cos\theta = 1$. Таким образом, и в этом случае мы имеем $T\cos\theta = T_0$. Уравнение (6) принимает вид

$$\begin{aligned} F_x(t) &= T_2\sin\theta_2 - T_1\sin\theta_1 = \\ &= T_2\cos\theta_2\operatorname{tg}\theta_2 - T_1\cos\theta_1\operatorname{tg}\theta_1 = \\ &= T_0\operatorname{tg}\theta_2 - T_0\operatorname{tg}\theta_1 = \\ &= T_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_2 - T_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_1. \end{aligned} \quad (8)$$

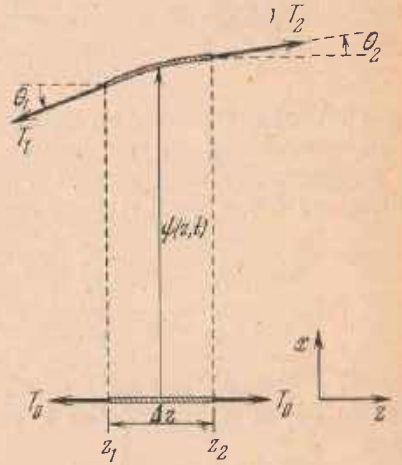



Рис. 2.2. Поперечные колебания непрерывной струны.

Внизу показано равновесное положение бесконечно малого отрезка струны длиной $\Delta z$. Наверху показано положение этого отрезка и его конфигурация в общем случае.

Теперь рассмотрим функцию $f(x)$, которую определим так:

$$f(z) = \frac{\partial\psi(z, t)}{\partial z}. \quad (9)$$

Мы не внесли время $t$ в аргумент формулы, так как считаем $t$ константой. Разложим $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_1$, а затем положим $z = z_2$ [см. приложение I, уравнение (3)]:

$$f(z_2) = f(z_1) + (z_2 - z_1)\left(\frac{df}{dz}\right)_1 + \frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)_1 + \ldots, \quad (10)$$

где $z_2 - z_1 = \Delta z$ в соответствии с рис. 2.2. Теперь перейдем к пределу, когда $\Delta z$ настолько мало, что в уравнении (10) можно пренебречь квадратичным членом и всеми членами более высокого порядка.

Получим

$$f(z_2)-f(z_1)=\Delta z\left(\frac{df}{dz}\right)_1=\Delta z\,\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\psi(z,\,t)}{\partial z}\right)=\Delta z\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi(z,\,t)}{\partial z}\right)=$$
$$=\Delta z\,\frac{\partial^2\psi(z,\,t)}{\partial z^2}. \qquad (11)$$

Заметим, что начиная со второго равенства в (11) мы опускали индекс 1. Это справедливо, потому что мы пренебрегли производными более высокого порядка в разложении Тейлора (10), и поэтому производная может вычисляться в любом месте интервала $\Delta z$. Заметим также, что поскольку мы пишем $\psi(z,\,t)$, то следует вновь ввести символ частной производной.

Используем теперь уравнения (9), (11) и (8), чтобы получить выражение для полной силы, действующей на сегмент:

$$F_x(t)=T_0\,\Delta z\,\frac{\partial^2\psi(z,\,t)}{\partial z^2}. \qquad (12)$$

По второму закону Ньютона эта сила равна произведению массы сегмента $\Delta M$ на его ускорение. Скорость и ускорение сегмента с равновесным положением в точке $z$ можно следующим образом выразить через $\psi(z,\,t)$ и ее производные:

$$\left.\begin{aligned}&\psi(z,\,t)=\text{смещение},\\&\frac{\partial\psi(z,\,t)}{\partial t}=\text{скорость},\\&\frac{\partial^2\psi(z,\,t)}{\partial t^2}=\text{ускорение}.\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Таким образом, второй закон Ньютона (вспомним, что $\Delta M=\rho_0\Delta z$) дает

$$\rho_0\,\Delta z\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=F_x=T_0\,\Delta z\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

т. е.

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi(z,\,t)}{\partial t^2}=\frac{T_0}{\rho_0}\,\frac{\partial^2\psi(z,\,t)}{\partial z^2}}. \qquad (14)$$

*Классическое волновое уравнение.* Уравнение (14) — весьма знаменитое уравнение второго порядка в частных производных. Оно называется *классическим волновым уравнением*. Мы будем часто с ним встречаться и познакомимся со многими свойствами его решений и с физическими ситуациями, которые описываются этим уравнением. (Конечно, положительная константа $T_0/\rho_0$ характерна для задачи о струне. В других физических задачах, которые приводят к волновому уравнению, появляются другие положительные константы.)

*Стоячие волны.* Попытаемся найти нормальные моды непрерывной струны, которые представляют собой стоячие волны. *Предположим*, что мы возбудили какую-то моду и, следовательно, все части



струны совершают гармоническое движение с одинаковой угловой частотой $\omega$ и с одинаковой фазовой постоянной $\varphi$. Тогда функция $\psi(z,\,t)$, представляющая собой смещение частиц, которые в равновесии находятся в $z$, должна иметь одну и ту же временну́ю зависимость вида $\cos(\omega t+\varphi)$ для всех «движущихся элементов», т. е. для любых $z$. Как обычно, фазовая постоянная соответствует «моменту включения» моды. «Геометрия» моды зависит от числа степеней свободы $a$, $b$, $c$ и т. д. и определяется отношением амплитуд колебаний $A$, $B$, $C$ и т. д., соответствующих этим степеням.

В случае непрерывной струны, когда степеней свободы бесконечно много и они определяются параметром $z$, амплитуда колебаний для различных степеней свободы (т. е. «геометрия» моды) может быть представлена в виде непрерывной функции от $z$, которую мы обозначим $A(z)$. Функция $A(z)$ характеризует моду; каждой моде соответствует определенная функция $A(z)$. Теперь мы можем написать *общее выражение для стоячей волны*:

$$\psi(z,\,t)=A(z)\cos(\omega t+\varphi). \qquad (15)$$

Из уравнения (15) получим выражение для ускорения:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\omega^2\psi=-\omega^2A(z)\cos(\omega t+\varphi). \qquad (16)$$

Вторая частная производная по $z$ для уравнения (15) равна

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2[A(z)\cos(\omega t+\varphi)]}{\partial z^2}=\cos(\omega t+\varphi)\,\frac{d^2A(z)}{dz^2}. \qquad (17)$$

В правой части стоит знак обычной производной, так как $A(z)$ не зависит от времени. Подставляя (16) и (17) в (14) и сокращая на $\cos(\omega t+\psi)$, получим

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2}=-\omega^2\,\frac{\rho_0}{T_0}\,A(z). \qquad (18)$$

Уравнение (18) определяет геометрическую форму моды. Поскольку каждой моде соответствует своя частота $\omega$, а в уравнение (18) входит $\omega^2$, то, как и ожидалось, каждая мода имеет свою форму.

Уравнение (18) совпадает с уравнением гармонического осциллятора, если в последнем заменить время на координату. В общем случае решение уравнения для такого «гармонического осциллятора в пространстве» можно записать в виде

$$A(z)=A\sin\left(2\pi\,\frac{z}{\lambda}\right)+B\cos\left(2\pi\,\frac{z}{\lambda}\right), \qquad (19)$$

где $\lambda$ представляет собой расстояние, на котором совершается одно полное колебание. Величина $\lambda$ называется *длиной волны*. Этот параметр для колебаний в пространстве имеет такой же смысл, что и период $T$ для колебаний во времени. Длина волны $\lambda$ измеряется в сантиметрах на цикл (т. е. на цикл пространственных колебаний по $z$) или просто в сантиметрах.

Продифференцируем (19) по $z$ дважды, получим

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A(z). \tag{20}$$

Сравнивая (18) и (20), находим

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \omega^2 \left(\frac{\rho_0}{T_0}\right) = (2\pi\nu)^2 \frac{\rho_0}{T_0}, \tag{21}$$

т. е.

$$\boxed{\lambda\nu = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} = v_0 = \text{const}.} \tag{22}$$

*Скорость волн в струне.* Уравнение (22) связывает между собой длину волны и частоту для поперечных стоячих волн в непрерывной однородной струне. Постоянная $(T_0/\rho_0)^{1/2}$ имеет размерность скорости, поскольку $\lambda\nu$ имеет размерность [длина/время]. Скорость $v_0=(T_0/\rho_0)^{1/2}$ носит название «фазовой скорости бегущих волн» для этой системы. (Мы будем изучать бегущие волны в главе 4.) При изучении стоячих волн мы не нуждаемся в понятии фазовой скорости, так как стоячие волны никуда не «бегут». Они «стоят и колеблются», как большой «размазанный» гармонический осциллятор. В этой главе мы не будем называть отношение $(T_0/\rho_0)^{1/2}$ скоростью, так как хотим, чтобы читатель привык к представлению о стоячих волнах.

Общее решение для смещения $\psi(z, t)$ получим, объединив уравнения (15) и (19):

$$\psi(z, t) = \cos(\omega t + \varphi)\,[A\sin(2\pi z/\lambda) + B\cos(2\pi z/\lambda)]. \tag{23}$$

*Граничные условия.* Уравнение (23) имеет *слишком* общий вид. В нем никак не отражены граничные условия. Наша струна закреплена на концах, а в решении нет информации, которая указывала бы на это. Посмотрим, как ввести такую информацию. Пусть длина струны $L$. Выберем систему координат таким образом, чтобы левый конец струны находился в точке $z=0$, тогда правому концу соответствует $z=L$. Рассмотрим координату $z=0$. Струна здесь закреплена, и $\psi(0, t)$ должно равняться нулю для всех $t$. Отсюда следует, что $B=0$, так как для любого момента времени $t$

$$\psi(0, t) = \cos(\omega t + \varphi)\,[0 + B] = 0. \tag{24}$$

Таким образом, имеем

$$\psi(z, t) = A\cos(\omega t + \varphi)\sin\frac{2\pi z}{\lambda}. \tag{25}$$

Другое граничное условие заключается в том, что струна фиксирована в точке $z=L$, так что $\psi(L, t)$ равно нулю для всех $t$. Этому граничному условию можно удовлетворить, положив в уравнении (25) $A=0$, но такое решение не представляет интереса, так как соответствует покоящейся струне. Единственная возможность удовлетворить граничному условию в точке $z=L$ заключается в том,



чтобы положить

$$\sin\frac{2\pi L}{\lambda} = 0. \tag{26}$$

Длины волн $\lambda$, для которых это справедливо, должны удовлетворять уравнению

$$\frac{2\pi L}{\lambda} = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi,\ \ldots \tag{27}$$

(Почему мы исключили случай $2\pi L/\lambda=0$)? Написанная последовательность возможных длин волн, удовлетворяющих граничным условиям, дает все возможные моды струны. Пронумеруем эту последовательность, начиная с первого члена, которому присвоим номер 1. В соответствии с (27) получаем следующие длины волн возможных мод:

$$\lambda_1 = 2L,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1,\ \lambda_3 = \frac{1}{3}\lambda_1,\ \lambda_4 = \frac{1}{4}\lambda_1, \ldots \tag{28}$$

*Гармонические отношения частот.* Чтобы найти соответствующие частоты, мы должны использовать уравнение (22). Получаем

$$\nu_1 = v_0/\lambda_1,\ \nu_2 = 2\nu_1,\ \nu_3 = 3\nu_1,\ \nu_4 = 4\nu_1, \ldots \tag{29}$$

Частоты $2\nu_1$, $3\nu_1$ и т. д. называются второй, третьей и т. д. *гармониками основной* частоты $\nu_1$. Утверждение, что частоты $\nu_2$, $\nu_3$ и т. д. являются *гармониками* частоты $\nu_1$, соответствующей первой моде, следует из нашего предположения о совершенно однородной и упругой струне. Частоты мод большинства реальных физических систем не образуют такой гармонической последовательности. Например, для струны с неоднородной плотностью частоты мод не являются гармониками основной частоты и могут принимать такие значения, как, например, $\nu_2=2{,}78\nu_1$, $\nu_3=4{,}62\nu_1$ и т. д. У струны пианино или скрипки частоты мод образуют лишь приближенно гармоническую последовательность. Причина в том, что струны не абсолютно упруги. (В задаче 2.7 рассмотрено влияние неоднородной плотности струны на «гармонические» отношения частот.)

Моды нашей струны показаны на рис. 2.3. Равновесная конфигурация отвечает отсутствующему первому члену, $2\pi L/\lambda=0$, в последовательности (27). Соответствующая частота равна нулю. Здесь нет никакого движения, и это равновесное состояние не называется модой.

*Волновое число.* Величина, обратная длине волны, называется *волновым числом* $\sigma$. Оно измеряется в *циклах на сантиметр* или, чаще, в «обратных сантиметрах». Этот параметр характеризует колебания в пространстве, аналогично тому как частота $\nu$ характеризует колебания во времени.

$$\sigma = 1/\lambda = \text{волновое число}\ (\text{см}^{-1}). \tag{30}$$

Волновое число, умноженное на $2\pi$, можно назвать *угловым волновым числом* $k$. Его измеряют в *рад/см*. Величина $k$ характеризует колебания в пространстве, как угловая частота $\omega$ — колебания

во времени

$$k = 2\pi/\lambda = \text{угловое волновое число} \quad (\textit{рад/см}). \tag{31}$$

Покажем, как использовать эти величины для записи уравнений стоячих волн:

$$\psi(z, t) = A \sin 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{z}{\lambda} = A \sin 2\pi\nu t \sin 2\pi\sigma z =$$

$$= A \sin \omega t \sin kz. \tag{32}$$

В качестве другого примера перепишем следующим образом

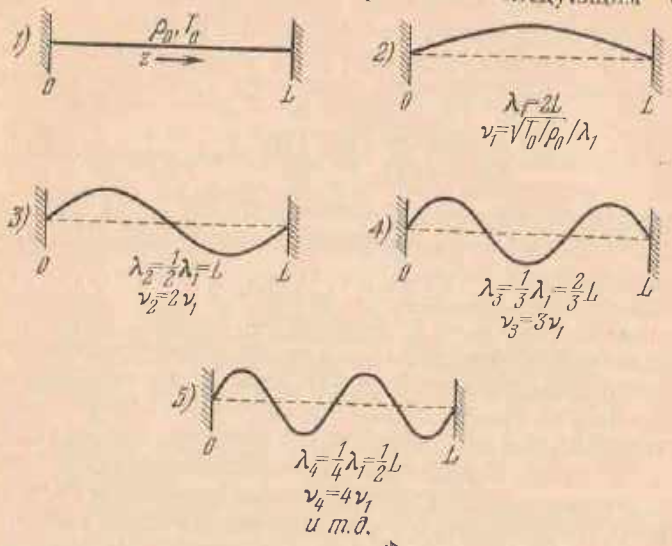



Рис. 2.3. Моды колебаний непрерывной однородной струны с фиксированными концами.

последовательность нормальных мод, определяемую уравнениями (27) — (29):

$$k_1 L = \pi \textit{ рад}, \quad k_2 L = 2\pi \textit{ рад}, \quad k_3 L = 3\pi \textit{ рад} \text{ и т. д.} \tag{33}$$

или

$$\sigma_1 L = \frac{1}{2} \text{ цикла}, \quad \sigma_2 L = 1 \text{ цикл}, \quad \sigma_3 L = \frac{3}{2} \text{ цикла и т. д.} \tag{34}$$

*Дисперсионное соотношение.* Равенство (22) связывает частоту и длину волны для нормальных мод однородной упругой струны:

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\,\sigma.$$

Умножая его на $2\pi$, получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\,k. \tag{35}$$

Равенство (35) дает соотношение между частотой и волновым числом нормальных мод струны. (Заметьте, что мы опустили прилагательное «угловой». Так обычно и поступают, если обозначения и размерность



позволяют избежать неясности.) Выражение (35), определяющее $\omega$ как функцию $k$, называется *дисперсионным соотношением* *). Это удобный способ описания волновых свойств системы.

*Закон дисперсии для реальной струны пианино.* Дисперсионное соотношение (35) очень просто. Позже мы увидим примеры более сложных дисперсионных соотношений, когда величина $\lambda\nu = \omega/k$ уже не константа, а зависит от длины волны. Например, для струны пианино дисперсионное соотношение может быть приближенно выражено формулой

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{T_0}{\rho_0} + \alpha k^2, \tag{36}$$

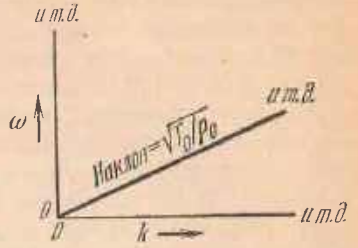



Рис. 2.4. Дисперсионное соотношение для непрерывной однородной струны.

где $\alpha$ — небольшая положительная константа, которая равна нулю для совершенно упругой струны. [В этом случае соотношение (36) переходит в (35).] Пространственная конфигурация мод реальной струны совпадает с конфигурацией мод совершенно упругой струны, т. е. $\lambda_1 = 2L$, $\lambda_2 = {}^1/_2\lambda_1$, $\lambda_3 = {}^1/_3\lambda_1$ и т. д., так как граничные условия в обоих случаях одни и те же. Но частоты колебаний для этих мод не будут удовлетворять «гармонической» последовательности $\nu_2 = 2\nu_1$, $\nu_3 = 3\nu_1$ и т. д. Дисперсионное соотношение (36) не создает такой последовательности. Гармоническая последовательность частот получается только в случае $\alpha = 0$, т. е. когда $\lambda\nu = \text{const}$. У струны пианино или рояля частоты более высоких мод слегка отличаются (т. е. имеют чуть-чуть большее значение) от частот гармонической последовательности.

*Недиспергирующие и диспергирующие волны* **). Волны, удовлетворяющие простому дисперсионному соотношению $\omega/k = \text{const}$, называют недиспергирующими волнами. Если отношение $\omega/k$ зависит от длины волны (а значит, и от частоты), волны называют диспергирующими. Обычно можно построить график зависимости $\omega$ от $k$. В случае упругой струны этот график представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат $\omega = k = 0$ и имеющую наклон $(T_0/\rho_0)^{1/2}$ (рис. 2.4).

## 2.3. Общий случай движения непрерывной струны и фурье-анализ

Наиболее общее движение непрерывной струны (с закрепленными концами, совершающей поперечные колебания вдоль оси $x$) будет суперпозицией всех мод 1, 2, 3,... с амплитудами $A_1$, $A_2$, $A_3$,...

*) В книге наряду с термином «дисперсионное соотношение» для обозначения зависимости $\omega$ от $k$ употребляется равнозначный термин «закон дисперсии». (*Прим. ред.*)

**) Этими терминами мы переводим термины «nondispersive vawes» и «dispersive vawes». (*Прим. ред.*)

и фазовыми константами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$:

$$\psi(z, t) = A_1 \sin k_1 z \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin k_2 z \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \ldots, \quad (37)$$

где $k_n$ выбраны так, чтобы удовлетворять граничным условиям при $z=0$ и $z=L$, а частота $\omega_n$ связана с волновым числом $k_n$ дисперсионным соотношением $\omega(k)$. Амплитуды $A_n$ и фазы $\varphi_n$, которые определяют движение для всех положений $z$ и моментов времени $t$, вычисляются из *начальных условий*, т. е. по смещению $\psi(z, t)$ и скорости $v(z, t) = \partial\psi(z,t)/\partial t$ каждой точки в момент времени $t=0$.

*Движение струны, закрепленной на концах.* Допустим, что в момент времени $t<0$ при помощи шаблона струне была придана определенная форма $f(z)$. Затем в момент времени $t=0$ убираем шаблон, позволяя струне двигаться. При $t=0$ каждый элемент струны имеет свое смещение $\psi(z, 0)$, равное $f(z)$, и скорость, равную нулю; $n$-й член в выражении для скорости [т. е. в производной по времени от (37)] пропорционален $\sin(\omega_n t + \varphi_n)$ или $\sin\varphi_n$ для $t = 0$. Таким образом, мы можем удовлетворить равенству $v(z, 0)=0$ для всех $z$, положив каждую фазовую константу $\varphi_n$ равной либо 0, либо $\pi$. Однако выбор фазовой константы $\varphi_1=\pi$ (например) равносилен перемене знака перед $A_1$. Поэтому мы удовлетворим этим начальным условиям, положив все фазовые константы равными нулю, но допуская, что амплитуды $A_1$, $A_2$ и т. д. могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Тогда для нулевой начальной скорости $v(z, 0)=0$ имеем

$$\psi(z, t) = A_1 \sin k_1 z \cos \omega_1 t + A_2 \sin k_2 z \cos \omega_2 t + \ldots \quad (38)$$

и при $t=0$

$$\psi(z, 0) = f(z) = A_1 \sin k_1 z + A_2 \sin k_2 z + \ldots \quad (39)$$

Как мы увидим ниже, уравнение (39) определяет амплитуды $A_1, A_2, \ldots$

*Ряды Фурье для функции с нулями на концах.* Функция $f(z)$ может быть очень общей функцией от $z$. Единственное ограничение, которое накладывается на $f(z)$,— это обращение в нуль на концах, т. е. $f(z)=0$ при $z=0$ и $z=L$. Потребуем также, чтобы $f(z)$ не была «ломаной» функцией в «малом» масштабе. Это необходимо потому, что волновая функция $\psi(z, t)$ — медленно меняющаяся функция от $z$. Функция $f(z)$ должна быть достаточно гладкой, для того чтобы мы смогли придать ее форму струне и для того чтобы струна подчинялась дифференциальному уравнению, полученному с помощью «непрерывного» приближения. Таким образом, мы нашли, что любая разумная функция $f(z)$, которая обращается в нуль в точках $z=0$ и $z=L$, может быть представлена рядом (39), т. е. суммой синусоидальных колебаний. Выражение (39) называется *рядом Фурье* или *разложением Фурье*. В данном случае мы имеем дело с разложением Фурье для функции, равной нулю на концах. В общем случае разложение в ряд Фурье применимо и к более широкому классу функций. Теперь мы найдем этот более широкий класс функций.



Наша функция $f(z)$ должна описывать форму струны, и поэтому она была определена между $z=0$ и $L$. Однако функции $\sin k_1 z$, $\sin 2k_1 z$, $\sin 3k_1 z$ и т. д., которые составляют ряд (39), определены для всех $z$ от $-\infty$ до $+\infty$. Заметим также, что $\sin k_1 z$ *периодичен* относительно $z$ с периодом $\lambda_1$. Это значит, что значения $\sin k_1 z$ при любом заданном $z$ и при $z+\lambda_1$ совпадают. (В нашем примере величина периода $\lambda_1$ равна $2L$.) Легко видеть, что функция $\sin 2k_1 z$ также периодична по $z$ с периодом $\lambda_1$. (Она делает два цикла на длине $\lambda_1$, поэтому она периодична и с вдвое меньшим периодом $^1/_2\lambda_1$.) Более того, все синусоидальные функции в (39) периодичны по $z$ с периодом $\lambda_1$. Поэтому и все выражение периодично с периодом $\lambda_1$. Теперь можно расширить класс функций, для которых справедливо разложение Фурье в виде уравнения (39): все периодические функции $F(z)$

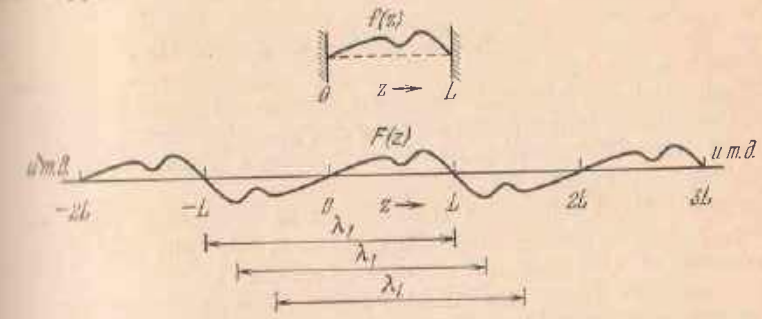



Рис. 2.5. Образование периодической функции $F(z)$ с периодом $\lambda_1=2L$ из функции $f(z)$, исчезающей на концах отрезка $z=0$ и $z=L$.

с периодом $\lambda_1$, которые равны нулю при $z=0$ и $z=\lambda_1/2$, могут быть разложены в ряд Фурье, имеющий вид (39). Данная функция $f(z)$ определена только между точками $z=0$ и $L$ и равна нулю в этих точках. Мы можем образовать периодическую функцию, которая будет иметь такое же разложение Фурье, что и $f(z)$, по следующему правилу: между точками $z=0$ и $L$ функция $F(z)$ совпадает с $f(z)$. Между $L$ и $2L$ функция $F(z)$ является «перевернутым (вокруг оси $z$) изображением» $f(z)$ в «зеркале», расположенном в точке $z=L$. Теперь то, что мы определяем как $F(z)$ на интервале от $z=0$ до $2L$, продолжим на последовательные интервалы длиной $2L$, чтобы определить $F(z)$ для всех $z$. Результат этих операций показан на рис. 2.5.

*Фурье-анализ периодической функции от $z$.* Здесь мы еще больше расширим класс функций, для которых можно написать разложение Фурье. Уравнение (39) соответствует функциям, которые периодичны с периодом $\lambda_1$ и равны нулю в $z=0$ и $\lambda_1/2$. Однако обращение в нуль функции в этих точках есть результат выбора граничных условий, которые заключаются в том, что струна закреплена на обоих концах. Без таких граничных условий мы получили бы решение для колебаний струны, которое включало бы в себя не только члены $\sin nk_1 z$, но также члены $\cos nk_1 z$. Эти функции также периодичны

на $z$ с периодом $\lambda_1$, но не равны нулю при $z=0$ и $\lambda_1/2$. (Они соответствуют колебаниям струны с одним или двумя свободными концами). Включая в ряд Фурье и эти функции, мы приходим к очень общему классу функций, для которых может быть написан ряд Фурье: все периодические функции $F(z)$ с периодом $\lambda_1$, т. е. функции, удовлетворяющие условию $F(z+\lambda_1)=F(z)$ для всех $z$, могут быть разложены в ряд Фурье, имеющий вид

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\sin n\frac{2\pi}{\lambda_1}z+B_n\cos n\frac{2\pi}{\lambda_1}z\right]=$$

$$=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\sin n\frac{2\pi}{\lambda_1}z+B_n\cos n\frac{2\pi}{\lambda_1}z\right]=$$

$$=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin nk_1z+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos nk_1z. \qquad (40)$$

*Вычисление коэффициентов ряда Фурье.* Процесс нахождения амплитуд, или *коэффициентов Фурье* $B_0$, $A_n$ и $B_n$ (для всех $n$), для заданной периодической функции называется *фурье-анализом*. Покажем, как найти эти коэффициенты.

Начнем с $B_0$. Проинтегрируем обе части уравнения (40) от $z=z_1$ до $z=z_2$, где $z_1$ — любое значение $z$, а $z_2=z_1+\lambda_1$. Мы предполагаем, что функция $F(z)$ известна, поэтому интеграл от $z_1$ до $z_2$ для левой части уравнения (40) может быть найден. Теперь рассмотрим интеграл от правой части (40). У нас бесконечное число членов, и поэтому нужно рассмотреть бесконечное число интегралов.

Первый член справа равен $B_0$; при интегрировании от $z_1$ до $z_2$ получаем

$$\int_{z_1}^{z_2}B_0\,dz=B_0(z_2-z_1)=B_0\lambda_1. \qquad (41)$$

Все остальные члены при интегрировании по периоду дадут нуль. Действительно, на протяжении периода функции $\sin nk_1z$ и $\cos nk_1z$ одинаковое число раз отрицательны и положительны, поэтому

$$\int_{z_1}^{z_2}\sin nk_1z\,dz=0,\quad \int_{z_1}^{z_2}\cos nk_1z\,dz=0.$$

Таким образом, мы нашли коэффициент $B_0$. Он равен

$$B_0=\frac{1}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_2}F(z)\,dz. \qquad (42)$$

Теперь покажем, как найти коэффициент $A_m$, где $m$ — некоторое частное значение коэффициента $n$. Умножим обе части уравнения (40) на $\sin mk_1z$ и проинтегрируем правую и левую части по периоду функции $F(z)$. Интеграл в левой части может быть вычислен, так как функция $F(z)$ известна. Рассмотрим интеграл в правой части.



Первый член — это интеграл от произведения $B_0$ на $\sin mk_1z$. Он равен нулю, так как включает $m$ полных периодов $\sin mk_1z$. Осталось вычислить интегралы от произведений $\sin nk_1z\sin mk_1z$ и $\cos nk_1z\times\sin mk_1z$ для $n=1, 2, \ldots$

Рассмотрим член, для которого $n=m$. Среднее значение квадрата $\sin^2 mk_1z$ на одном периоде длиной $\lambda_1$ равно $^1/_2$ ($\lambda_1$ содержит $m$ полных периодов функции $\sin mk_1z$). Таким образом, при интегрировании правой части (40) появляется член $^1/_2 A_m\lambda_1$. Все остальные члены при этом равны нулю. Это видно, например, из следующего. Рассмотрим интеграл от $\sin nk_1z\sin mk_1z$, когда $m\neq n$. Подынтегральная функция может быть записана в виде

$$\sin nk_1z\sin mk_1z=\frac{1}{2}\cos(n-m)k_1z-\frac{1}{2}\cos(n+m)k_1z. \qquad (43)$$

Так как $(n-m)$ и $(n+m)$ — целые числа, то каждый из двух членов столько же раз положителен на периоде $\lambda_1$, сколько и отрицателен. Поэтому интеграл от этого произведения равен нулю (за исключением случая $n=m$, который мы уже рассмотрели). Аналогично, интеграл от произведения $\cos nk_1z\sin mk_1z$ будет равен нулю, так как

$$\cos nk_1z\sin mk_1z=\frac{1}{2}\sin(m+n)k_1z+\frac{1}{2}\sin(m-n)k_1z.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}A_m\lambda_1=\int_{z_1}^{z_2}\sin mk_1z\,F(z)\,dz. \qquad (44)$$

Умножив обе части выражения (40) на $\cos mk_1z$ и проинтегрировав по периоду $\lambda_1$, получим выражение для $B_m$:

$$\frac{1}{2}B_m\lambda_1=\int_{z_1}^{z_2}\cos mk_1z\,F(z)\,dz. \qquad (45)$$

*Коэффициенты Фурье.* Выпишем теперь полученные результаты, выражаемые равенствами (40), (42), (44) и (45):

$$F(z)=B_0+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin mk_1z+\sum_{m=1}^{\infty}B_m\cos mk_1z,$$

$$B_0=\frac{1}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1}F(z)\,dz,$$

$$A_m=\frac{2}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1}F(z)\sin mk_1z\,dz, \qquad (46)$$

$$B_m=\frac{2}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1}F(z)\cos mk_1z\,dz.$$

Здесь $z_1$ — любое значение $z$. Равенства (46) показывают, как любую периодическую функцию от $z$ с периодом $\lambda_1$ представить в виде ряда Фурье.

*Прямоугольные волны.* В качестве примера разложим прямоугольную волну в ряд Фурье. Пусть функция $f(z)$ обращается в нуль в точках $z=0$ и $z=L$ и равна $+1$ для $0<z<L$. (В точках $z=0$ и $z=L$ функция перестает быть непрерывной, т. е. не удовлетворяет сделанному выше предположению, что функция «гладкая» во всех точках. Поэтому нельзя ожидать, что ряд Фурье совершенно точно воспроизведет эту функцию. При конечном числе членов ряда в точках $z=0$ и $z=L$ будут сильные выбросы. Увеличение числа членов ряда делает выбросы острее, но их высота не стремится к нулю.)

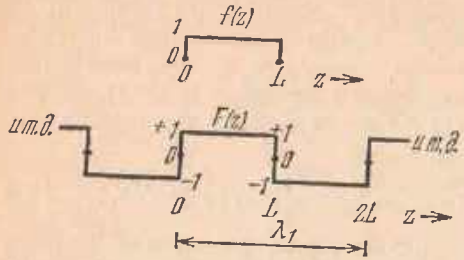


Рис. 2.6. Прямоугольная волна $f(z)$. Периодическая прямоугольная волна $F(z)$.

Периодическая функция $F(z)$, образованная в соответствии с установленными ранее предписаниями (см. рис. 2.5), обладает следующими свойствами: $F(z)=0$ для $z=0$; $+1$ для $0<z<L$; 0 для $L$; $-1$ для $L<z<2L$ и т. д., как показано на рис. 2.6.

Воспользовавшись формулами (46), легко получить следующие значения коэффициентов Фурье (задача 2.11): $B_0=0$; $B_m=0$ для всех $m$; $A_m=0$ для всех четных $m=2, 4, 6, 8,\ldots$; $A_m\approx 4/m\pi$ для нечетных $m=1, 3, 5, 7, \ldots$ Таким образом, имеем

$$F(z)=B_0+\sum_{m=1}^{\infty}B_m\cos mk_1z+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin mk_1z=$$
$$=\frac{4}{\pi}\left\{\sin k_1z+\frac{1}{3}\sin 3k_1z+\frac{1}{5}\sin 5k_1z+\ldots\right\}=$$
$$=1{,}273\sin\frac{\pi z}{L}+0{,}424\sin\frac{3\pi z}{L}+0{,}255\sin\frac{5\pi z}{L}+\ldots \quad (47)$$

На рис. 2.7 показана прямоугольная волна $f(z)$, первые три члена разложения (47) и их сумма.

Предположим, что в момент времени $t=0$ мы придали струне форму, определяемую выражением

$$g(z)=1{,}273\sin\frac{\pi z}{L}+0{,}424\sin\frac{3\pi z}{L}+0{,}255\sin\frac{5\pi z}{L}. \quad (48)$$

Она соответствует первым трем членам ряда (47) и показана на рис. 2.7, *б*. Отпустим струну в момент времени $t=0$. Какой будет функция $\psi(z,t)$? Будет ли сохраняться форма рис. 2.7, *б* с течением времени? (См. задачу 2.16.)

*Фурье-анализ для периодической функции времени.* Рассмотрим функцию $F(t)$, определенную для всех $t$ и имеющую период $T_1$:

$$F(t+T_1)=F(t) \quad \text{для любых } t. \quad (49)$$



Мы предполагаем, что функция $F(t)$ может быть разложена в ряд Фурье:

$$F(t)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\omega_1t+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos n\omega_1t, \quad (50)$$

где

$$\omega_1=2\pi\nu_1=\frac{2\pi}{T_1}. \quad (51)$$

Коэффициенты Фурье могут быть получены непосредственно из приведенных выше результатов фурье-анализа пространственной периодической функции $f(z)$, так как математика для переменных $\theta=\omega_1t$ и $\theta=k_1z$ одна и та же. Таким образом, для коэффициентов ряда (50) имеем на основании (46)

$$B_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_1}^{t_1+T_1}F(t)\,dt,$$
$$B_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_1}^{t_1+T_1}F(t)\cos n\omega_1t\,dt,$$
$$A_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_1}^{t_1+T_1}F(t)\sin n\omega_1t\,dt, \quad (52)$$

где $t_1$ — любой подходящий момент времени.

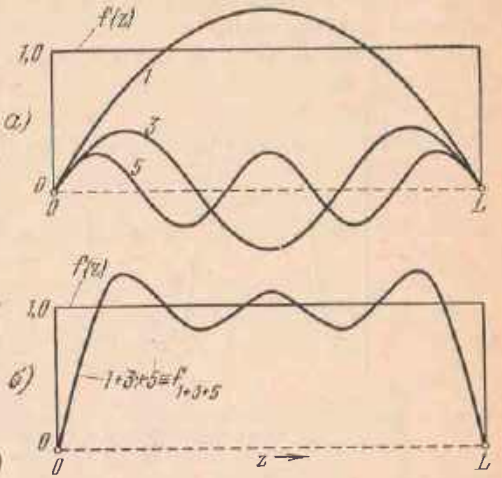


Рис. 2.7. Фурье-анализ прямоугольной волны $f(z)$. *а)* Прямоугольная волна и три первые составляющие разложения Фурье. Цифры *1*, *3* и *5* относятся к нормальным модам 1, 3 и 5; *б)* прямоугольная волна и суперпозиция $f_{1+3+5}$ первых трех составляющих разложения Фурье.

*Звучание аккорда рояля**). В качестве иллюстрации к сказанному, вместо фурье-анализа известной функции $F(t)$, рассмотрим суперпозицию известных компонент. Предположим, что в нашем распоряжении рояль, настроенный так, что он имеет «научный строй» (о музыкальных строях см. домашний опыт 2.6). Положим $\nu_1=128$ *гц*. Эта нота С на одну октаву ниже ноты С256. Теперь положим $\nu_3=3\nu_1=384$ *гц*. Это G выше С256. Положим $\nu_5=5\nu_1=640$ *гц*. Это Е выше G и выше С256. Ударим по этим трем струнам. Если вы ударили одновременно и с такой силой, что величина давления воздуха на ухо (в соответствующих единицах) от струны С128 — $1{,}273\sin 2\pi\nu_1t$, от струны G384 — $0{,}424\sin 2\pi\nu_3t$ и от струны Е640 — $0{,}255\sin 2\pi\nu_5t$, то полное давление $p(t)$ равно

$$p(t)=1{,}273\sin 2\pi\nu_1t+0{,}424\sin 2\pi\nu_3t+0{,}255\sin 2\pi\nu_5t. \quad (53)$$

Суперпозиция (53) очень похожа на суперпозицию (48), изобра-

*) См. примечание на стр. 50.

женную на рис. 2.7,*б*. Для того чтобы получить график $p(t)$, нам нужно заменить $k_1 z$ на $\omega_1 t$. После замены получим график, показанный на рис. 2.8. Если по этим струнам ударить не одновременно (т. е. с разбросом во времени много меньшим, чем 1/128 *сек*), то относительные фазы трех нот не будут такими, как в (53) и их суперпозиция не будет иметь вид, показанный на рис. 2.8. Но наше ухо этого не заметит! Мы распознаем отдельные ноты аккорда, а информация об относительных фазах нами не воспринимается.

Орган в ухе, реагирующий на тон, называется *основной перепонкой*. Она расположена в находящемся во внутреннем ухе органе спиральной формы, заполненном жидкостью. Этот орган называется *ушной улиткой*. Ушная улитка механически связана с барабанной

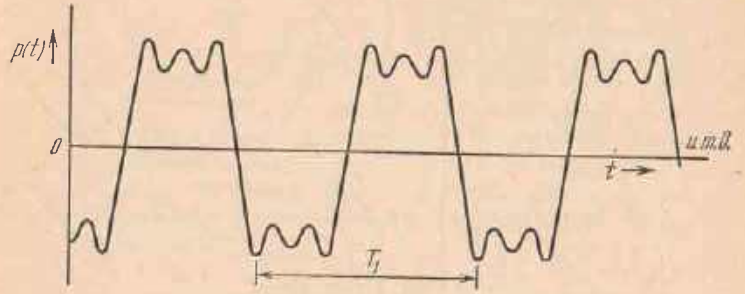



Рис. 2.8. Звуковое давление, создаваемое суперпозицией нот C128, G 384 и E640 с относительными амплитудами и фазами равенства (53).
Период $T_1 = 1/128$ *сек*.

перепонкой. Конец основной перепонки вблизи барабанной перепонки резонирует при частоте около $20 \cdot 10^3$ *гц*, а самый дальний ее конец резонирует при частоте 20 *гц*. Таким образом, интервал воспринимаемых ухом частот лежит между 20 *гц* и $20 \cdot 10^3$ *гц*. Нерв ушной улитки имеет чувствительные окончания в основной перепонке и «преобразует» механические колебания в электрические сигналы, которые поступают в мозг, где воспринимаются нами как звуковые ощущения. Беря несколько раз один и тот же аккорд, мы видим, что наши звуковые ощущения одни и те же (даже если формы $p(t)$ из-за различных фазовых констант сильно различаются). Отсюда следует, что информация об относительных фазах колебаний различных участков основной перепонки где-то теряется. Возможно, что мы и не получаем подобной информации из-за того, что «преобразователь» представляет собой *квадратичный детектор*, электрический сигнал на выходе которого пропорционален квадрату амплитуды колебаний перепонки. Возможно также, что сигнал нерва несет информацию о фазе [т. е. сигнал пропорционален $\psi(x,t)$, а не $\psi^2(x,t)$], но мозг не воспринимает эту информацию, т. е. не реагирует на некоторые сигналы нерва. По-видимому, в фазовой информации нет особой ценности, так как в противном случае (в нашем эволюционном раз-



витии) мы должны были бы оказаться обладателями механизма для распознавания фазы.

*Другие граничные условия*. В общем случае поперечных колебаний непрерывной струны нет необходимости, чтобы оба ее конца были закреплены. Один или оба конца могут быть свободны, по крайней мере в случае поперечных колебаний. Натяжение струны и равновесную конфигурацию можно создать при помощи невесомого кольца, скользящего без трения по стержню, который направлен вдоль оси $x$ и перпендикулярен оси равновесной конфигурации (эта ось совпадает с осью $z$). Нормальные моды при этом будут иметь другую конфигурацию, чем в случае двух закрепленных концов. Они по-прежнему будут синусоидальными функциями от $z$, описываемыми выражением (19), а дисперсионное соотношение между частотой и длиной волны будет иметь вид (22). Действительно, все рассуждения, предшествовавшие решению (23), которое представляет собой общее решение для смещения струны в отдельной моде, не зависят от начальных условий. Мы перешли к решению для струны, закрепленной в точках $z=0$ и $z=L$, после рассмотрения решения (23).

Если трение между стержнем и кольцом отсутствует, то на свободном конце колеблющейся струны нет поперечной силы, действующей на струну. Это значит, что *наклон струны на свободном*

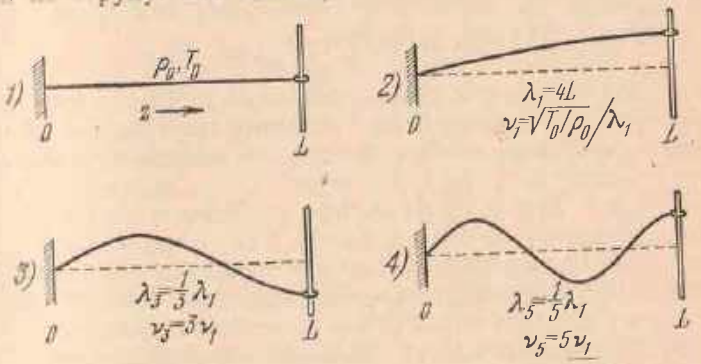



Рис. 2.9. Моды колебаний непрерывной струны, один конец которой свободен, а другой закреплен.

*конце должен равняться нулю в любой момент времени*. При попытке воздействовать поперечной силой на свободный конец струны она будет двигаться таким образом, чтобы уменьшить эту силу до нуля, и конец струны останется горизонтальным, хотя, конечно, не будет неподвижным. (Смысл всего этого следующий: невозможно давить на объект, который не давит на вас, но можно смещать его по своему желанию).

На рис. 2.9 показаны моды для струны с одним закрепленным концом. Мы пронумеровали их в соответствии с числом четвертей длины волны, укладывающихся на полной длине струны $L$.

Заметим, что гармоники с частотами $2\nu_1$, $4\nu_1$ и т. д. выпадают. Применение фурье-анализа к функции $f(z)$, равной нулю при $z=0$ и имеющей нулевой наклон в точке $z=L$, рассмотрено в задаче 2.29.

*Зависимость «качества тона» (тембра) от метода возбуждения.* Когда молоточек бьет по струне рояля, то вместе с основной ($\nu_1$) гармоникой возбуждаются в некоторой степени и вторая гармоника или октава ($2\nu_1$), октава плюс квинта ($3\nu_1$), вторая октава ($4\nu_1$), вторая октава плюс большая терция ($5\nu_1$), вторая октава плюс квинта ($6\nu_1$) и т. д., как более высокие гармоники основного тона $\nu_1$. Величина и фаза каждой фурье-компоненты (каждой гармоники) зависят от начальной конфигурации и скорости всех частиц струны в момент после удара. Результат в большой степени зависит от расположения молоточка, т. е. его расстояния от конца струны. Нельзя, например, ожидать возбуждения моды с узлом в точке удара, так как молоточек сообщает при ударе начальную скорость той части струны, по которой он бьет. Например, если струну ударяют посередине, то моды с узлом в центре струны не будут возбуждены. Рассмотрение рис. 2.3 показывает, что в этом случае пропадут все четные гармоники. Так, ущипнув за середину струны C128, мы можем ожидать суперпозиции колебаний C128, G384, E640 и т. д. Тембр в этом случае будет заметно отличаться от того, который будет в случае удара по струне недалеко от конца, когда возникает суперпозиция C128, C256, G384, C512, E640, G768 и т. д.

*Моды однородной струны образуют полный набор функций.* Начав с изучения струны, закрепленной на концах, мы нашли, что *любая* разумная функция $f(z)$, определенная между $z=0$ и $z=L$ и равная нулю в этих точках, может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nk_1 z, \qquad k_1 L=\pi. \tag{54}$$

Поэтому говорят, что функции $\sin nk_1 z$, где $n=1, 2, 3,\ldots$, образуют *полный набор* функций (по отношению к функции $f(z)$, равной нулю в точках $z=0$ и $L$). Полный набор функций определяется как последовательность функций, с помощью которых любая функция $f(z)$ при соответствующем значении коэффициентов может быть записана в виде суперпозиции функций набора.

*Неоднородная струна.* Существуют ли другие полные наборы функций, кроме синусоидальных функций, образующих ряд Фурье? Да, существует бесконечно много полных наборов. Мы можем убедиться в этом на следующем примере. Предположим, что струна неоднородна, т. е. либо плотность струны, либо ее натяжение (либо обе эти величины) являются непрерывными функциями от $z$. (Примером «струны» с изменяющейся плотностью и натяжением может служить вертикально подвешенная «пружина» с закрепленными нижним и верхним концами. Натяжение внизу меньше, чем наверху, на величину $Mg$, где $M$ — масса «пружины».) Теперь уравнение движения небольшого сегмента струны не будет больше подчиняться



классическому волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial t^2}=\frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial z^2}.$$

Действительно, в этом случае равновесное натяжение $T_0(z)$ и плотность $\rho_0(z)$ зависят от $z$ и колебания будут (см. задачу 2.10) удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial t^2}=\frac{1}{\rho_0(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left[T_0(z)\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial t}\right]. \tag{55}$$

Это уравнение переходит в классическое волновое уравнение, только если $T_0(z)$ и $\rho_0(z)$ превращаются в константы, не зависящие от $z$. В нормальной моде *неоднородной струны*, так же как и в моде однородной струны, каждая часть струны совершает гармоническое колебательное движение с одинаковой частотой и фазовой константой:

$$\psi(z,t)=A(z)\cos(\omega t+\varphi). \tag{56}$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\omega^2 A(z)\cos(\omega t+\varphi), \tag{57}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=\cos(\omega t+\varphi)\frac{dA(z)}{dz}. \tag{58}$$

Подставляя это в уравнение (55) и сокращая на общий множитель $\cos(\omega t+\varphi)$, получим уравнение для моды

$$\frac{1}{\rho_0(z)}\frac{d}{dz}\left[T_0(z)\frac{dA(z)}{dz}\right]=-\omega^2 A(z). \tag{59}$$

*Синусоидальная форма стоячих волн — свойство однородной струны.* Геометрическая форма моды определяется функцией $A(z)$, которая является решением уравнения (59) с соответствующими граничными условиями: $A(z)=0$ при $z=0$ и $z=L$. Функция $A(z)$ будет синусоидальной только при постоянных $T_0$ и $\rho_0$. Таким образом, синусоидальные колебания в пространстве характерны только для нормальных мод *однородных* систем.

*Моды неоднородной струны образуют полный набор функций.* Приведем без доказательства свойства нормальных мод неоднородной струны с закрепленными в точках $z=0$ и $z=L$ концами. Первая мода соответствует решению $A_1(z)$ уравнения (59), которое обращается в нуль только в точках $z=0$ и $z=L$ (оно похоже на одну полуволну «искаженной синусоиды», у которой нет узлов между нулем и $L$). Этой моде соответствует частота $\omega_1$. Следующая мода имеет *один узел* между $z=0$ и $z=L$ и, таким образом, представляет полную длину волны искаженной синусоиды. Ей отвечает частота $\omega_2$; $m$-я мода имеет $m-1$ узлов между $z=0$ и $z=L$ и соответствует $m$ полуволнам искаженной синусоиды. Существует бесконечное число мод (для непрерывной струны). Функции $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z),\ldots$, которые определяют пространственную часть моды, образуют полный набор для любой «подходящей» функции $f(z)$, равной нулю на концах. «Подходящая» функция $f(z)$ должна быть такой, какую могут образовать либо струна, либо «пружина» без нарушения наших предпо-

ложений. Мы можем сделать шаблон, имеющий форму $f(z)$, вставить неоднородную струну в шаблон и освободить ее в момент времени $t=0$. Струна будет совершать колебания, которые представляют собой суперпозицию бесконечного числа мод:

$$\psi(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_m(z) \cos \omega_m t. \tag{60}$$

Когда $t=0$, имеем

$$\psi(z, 0) = f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_m(z). \tag{61}$$

Равенство (61) показывает, что функция $f(z)$ (предмет наших рассуждений) может быть разложена по функциям $A_m(z)$. Таким образом, $A_m(z)$ образует полный набор функций, аналогично тому как синусоидальные функции ряда Фурье образуют полный набор для функции $f(z)$, равной нулю в точках $z=0$ и $z=L$.

*Собственные функции.* Существует бесконечно много способов осуществления струны с неравномерными плотностью и натяжением. Поэтому бесконечно велико и число различных полных наборов функций $A_m(z)$. Синусоидальные функции от $z$ не являются единственными функциями для разложения $f(z)$. Но они замечательны своей простотой. Эти функции определяют моды всегда, когда мы имеем пространственно однородную систему. В противном случае применение синусоидальных функций не будет особенно успешным. Вместо них следует попытаться найти такие функции $A_m(z)$, которые соответствуют нормальным модам системы. Эти функции $A_m(z)$, или в общем случае $A_m(x, y, z)$, называются *собственными функциями* системы. Они дают *пространственную* зависимость нормальных мод.

Для любой точки $(x, y, z)$ *временна́я* зависимость моды *всегда* определяется множителем $\cos(\omega t+\varphi)$. Таким образом, мода представляет собой одновременные малые колебания (достаточно малые, чтобы они описывались линейным уравнением) всех движущихся элементов, которые колеблются с одинаковой частотой и фазой. Когда вся система представлена одной модой, она пульсирует и «трепещет», как один большой осциллятор.

Каждая мода имеет свою «форму», т. е. свою собственную функцию $A_m(z)$. Соотношение между частотой моды и ее формой называется дисперсионным соотношением $\omega(k)$, когда собственные функции имеют вид синусоид. Если они не синусоидальны, мы не можем оперировать такими понятиями, как длина волны или волновое число $k$. В этом случае соотношение между частотой моды и ее формой не принято называть «дисперсионным соотношением».

## 2.4. Моды дискретной системы с $N$ степенями свободы

В п. 2.2 мы рассмотрели непрерывную струну, которая представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. Никакая реальная механическая система не имеет бесконечного числа степеней свободы, а мы заинтересованы в изучении реальных систем.



В этом пункте мы найдем точное решение для мод струны с закрепленными концами, несущей на себе $N$ равномерно распределенных грузов. В пределе, устремив $N$ к бесконечности (при конечной длине $L$), мы вернемся к стоячим волнам п. 2.2. Однако наша цель не только в этом. Мы обнаружим, что, совершая предельный переход к непрерывной струне, мы теряем некоторые чрезвычайно интересные свойства систем. Вспомним, что, используя гладкую функцию $\psi(z, t)$ для описания смещения, когда $N$ велико, но конечно, мы должны были отказаться от рассмотрения самых высоких мод, т. е. мод $m=N$, $N-1$, $N-2$ и т. д., и ограничиться значениями $m$, значительно меньшими $N$. Дело в том, что моды порядка $N$ имеют «зигзагообразную» конфигурацию, показанную на рис. 2.1, при которой нельзя считать, что соседние грузы имеют близкое смещение.

Наиболее интересный результат, который мы получим в этом пункте, заключается в том, что закон дисперсии, выведенный для *непрерывной* струны: $\omega$ равно постоянной, умноженной на $k$,— обычно не выполняется. Этот закон, связывающий частоту и длину волны, показывает, что частота удваивается, когда длина волны уменьшается в два раза. Он является приближением, справедливым в предельном случае непрерывной упругой струны, и перестает быть верным для реальной струны. Это приводит к интересному физическому явлению, называемому дисперсией. Среда, которая удовлетворяет простому закону дисперсии, выведенному выше ($\omega=\text{const}\cdot k$), называется средой без дисперсии (или недиспергирующей средой) для соответствующих волн. Если закон дисперсии имеет другой вид, среда называется средой, обладающей дисперсией (или диспергирующей средой). Рассмотрим пример.

Пример 1. *Поперечные колебания струны с грузами.* Такая система показана на рис. 2.10. Имеется $N$ грузов, расположенных

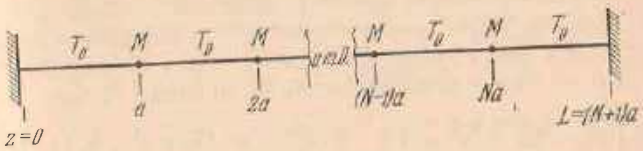



Рис. 2.10. Равновесное положение нагруженной струны.

в точках $z=a$, $2a$,..., $Na$. Полная длина $L$ равна $(N+1)a$. Масса каждого груза равна $M$, отрезки струны (пружины) между грузами одинаковы, невесомы и подчиняются закону Гука. Натяжение в равновесии равно $T_0$. Если пружины (струны) удовлетворяют приближению «пружины» (натяжение пропорционально длине), то колебания могут иметь произвольно большую амплитуду и все же будут описываться линейными уравнениями движения. Если же пружины не являются «пружинами», то для того, чтобы получить линейные уравнения движения, следует ограничиться рассмотрением малых колебаний.

Теперь рассмотрим общий случай, показанный на рис. 2.11. (Мы ограничимся только поперечными колебаниями вдоль оси $x$. Позже мы рассмотрим продольные колебания вдоль $z$. Общее движение является суперпозицией продольных колебаний вдоль $z$ и поперечных вдоль $x$ и $y$.) Смещение груза $n$ вверх (см. рис. 2.11) от положения равновесия равно $\psi_n(t)$, где $n=1,2,3,\ldots,N-1, N$. Рассмотрим какой-нибудь произвольный груз $n$ и два соседних груза, $(n-1)$ слева и $(n+1)$ справа от $n$.

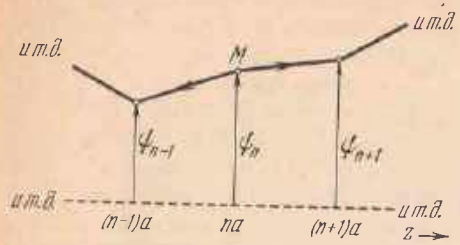



Рис. 2.11. Общая конфигурация нагруженной струны, совершающей поперечные колебания по оси $x$.

*Уравнение движения.* Наша цель — найти уравнение движения для груза $n$. В п. 1.2 мы решили подобную задачу для системы с одной степенью свободы, а в п. 1.4 — для системы с двумя степенями свободы. Предоставляем читателю показать, что как для приближения «пружины», так и для малых колебаний применение второго закона Ньютона к движению груза $n$ дает следующее уравнение движения:

$$M\frac{d^2\psi_n(t)}{dt^2}=T_0\left[\frac{\psi_{n+1}(t)-\psi_n(t)}{a}\right]-T_0\left[\frac{\psi_n(t)-\psi_{n-1}(t)}{a}\right]. \qquad (62)$$

Уравнение (62) соответствует общему случаю: оно справедливо для произвольного движения свободно колеблющейся системы, т. е. для произвольной суперпозиции $N$ различных мод.

*Нормальные моды.* Нам нужно найти частоты и конфигурации отдельных мод. Предположим, что мы имеем моду с частотой $\omega$. Каждый груз совершает гармонические колебания с частотой $\omega$ и фазовой постоянной $\varphi$. Форма моды определяется отношением амплитуд колебаний различных грузов. Обозначим через $A_n$ амплитуду колебаний $n$-го груза для рассматриваемой нами моды. Имеем

$$\left.\begin{aligned}&\psi_1(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi);\quad \psi_2(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi);\ \ldots;\\ &\psi_{n-1}(t)=A_{n-1}\cos(\omega t+\varphi);\quad \psi_n=A_n(\cos\omega t+\varphi);\\ &\psi_{n+1}(t)=A_{n+1}\cos(\omega t+\varphi);\ \ldots\end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

Из уравнений (63) получим

$$\frac{d^2\psi_n(t)}{dt^2}=-\omega^2A_n\cos(\omega t+\varphi)=-\omega^2\psi_n(t). \qquad (64)$$

Подставив уравнение (64) в левую часть (62), а (63) в правую часть (62) и сократив на $\cos(\omega t+\varphi)$, получим

$$-M\omega^2A_n=\frac{T_0}{a}(A_{n+1}-2A_n+A_{n-1}),$$

т. е.

$$A_{n+1}+A_{n-1}=A_n\left(2-\frac{Ma}{T_0}\omega^2\right). \qquad (65)$$



Уравнение (65) выглядит «устрашающе». Оно определяет зависимость формы моды от угловой частоты. Попытаемся угадать его решение, опираясь на известное нам решение для мод непрерывной струны с закрепленными в точках $z=0$ и $z=L$ концами. Для этой задачи мы нашли, что моды имеют вид

$$A(z)=A\sin\frac{2\pi z}{\lambda}=A\sin kz. \qquad (66)$$

Конечно, наше решение для $A_n$ должно в пределе (при стремлении $n$ к бесконечности) переходить в уравнение (66).

Попытаемся найти решение, положив в (66) $z=na$:

$$A_n=A\sin\frac{2\pi na}{\lambda}=A\sin kna. \qquad (67)$$

Тогда

$$A_{n+1}=A\sin k(n+1)a=A\sin(kna+ka)=$$
$$=A(\sin kna\cos ka+\cos kna\sin ka),$$
$$A_{n-1}=A\sin k(n-1)a=A\sin(kna-ka)=$$
$$=A(\sin kna\cos ka-\cos kna\sin ka);$$
$$A_{n+1}+A_{n-1}=2A\sin kna\cos ka=2A_n\cos ka. \qquad (68)$$

Подставляя (68) в (65), получим

$$2A_n\cos ka=A_n\left(2-\frac{Ma}{T_0}\omega^2\right). \qquad (69)$$

*Точное дисперсионное соотношение для струны с грузами.* Предположим, что уравнение (69) справедливо для любого груза $n$, независимо от того, равно или нет $A_n$ нулю в данной моде. Поэтому мы можем рассматривать груз, который находится вне узловой точки, т. е. груз, для которого $A_n$ не равно нулю. После сокращения на $A_n$ получим условие, которому должна удовлетворять наша догадка, чтобы быть на самом деле решением:

$$2\cos ka=2-\frac{Ma}{T_0}\omega^2,$$

т. е.

$$\omega^2=\frac{2T_0}{Ma}(1-\cos ka)=\frac{2T_0}{Ma}\left[1-\left(\cos^2\frac{ka}{2}-\sin^2\frac{ka}{2}\right)\right],$$
$$\omega^2=\frac{4T_0}{Ma}\sin^2\frac{ka}{2}=\frac{4T_0}{Ma}\sin^2\frac{\pi a}{\lambda}. \qquad (70)$$

Выражение (70), связывающее частоту $\omega$ и длину волны $\lambda$ (или волновое число) для данной моды, называется дисперсионным соотношением для струны с грузами.

*Граничные условия.* Мы еще не учли полностью граничные условия. Написав формулу (67) вместо более общего выражения

$$A_n=A\sin kna+B\cos kna, \qquad (71)$$

мы удовлетворили граничному условию в $z=0$, заключающемуся в том, что смещение струны в этой точке для любой моды равно нулю. Действительно, полагая $z=na=0$ в (71) и требуя, чтобы $A_0=0$, мы

получим, что $B=0$. Мы должны также удовлетворить граничному условию в точке $z=L$, согласно которому смещение в этой точке также равно нулю. Стена в точке $z=L$ соответствует «закрепленному грузу $N+1$», поэтому $A_{N+1}$ следует положить равным нулю:

$$A_{N+1} = A \sin k(N+1)a = A \sin kL = 0. \qquad (72)$$

Существует $N$ возможных решений уравнения (72). Каждое решение соответствует определенной моде $m$, где $m=1, 2, \ldots, N$. Мы нумеруем моды так, что мода $m=1$ имеет самую большую длину волны. Имеем

$$k_1 L = \pi, \quad k_2 L = 2\pi, \quad \ldots, \quad k_m L = m\pi, \quad \ldots, \quad k_N L = N\pi. \qquad (73)$$

Существование лишь $N$ решений объясняется тем, что последний член в (73) соответствует полностью «зигзагообразной» конфигурации. Закрепленный в точке $z=0$ первый отрезок струны подымается вверх до первого груза, после чего второй отрезок струны опускается вниз до второго груза, ..., отрезок $N+1$ опускается (или подымается) от груза $N$ к стене. Уравнение (72) может иметь дальнейшие решения: $k_{N+1}L=(N+1)\pi$, $k_{N+2}L=(N+2)\pi$ и т. д., но, чтобы осуществить все «зигзаги», которые заключают в себе эти решения, нужно иметь струну с числом сегментов большим, чем у нас.

Уравнение (65) для мод было получено без рассмотрения граничных условий. (На рис. 2.11 нет никаких границ). Наиболее общее решение этого уравнения имеет вид (71), где $B/A$ и $k$ определяются из граничных условий. Если подставить решение (71) в уравнение (65), то мы найдем дисперсионное соотношение (70), не зависящее от граничных условий, т. е. от величин $A$, $B$ и $k$. Сделайте это сами (задача 2.19). Для наших граничных условий (струна закреплена в точках $z=0$ и $z=L$) моды определяются уравнением (72), с коэффициентами $k_m$ из уравнений (73), а частоты $\omega_m$ следуют из уравнения (70). Заметим, что моды, следующие из уравнений (73), те же, что и в случае непрерывной струны. Разница лишь в том, что у непрерывной струны $N=\infty$ и для нее нельзя указать самой высокой моды. Заметим также, что у струны с грузами сегменты между грузами являются отрезками прямой, а не гладкими синусоидальными функциями. На рис. 2.12 показан случай, когда $N=5$.

На рис. 2.13 показан график дисперсионного соотношения, определяемого уравнением (70):

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{T_0}{Ma}} \sin\frac{ka}{2}. \qquad (74)$$

Пять точек на графике дают $k$ и $\omega$ для пяти мод струны с пятью грузами, закрепленной с обоих концов. При другом числе грузов или при других граничных условиях (например, свободный конец в точке $z=L$) точки, соответствующие различным модам, будут лежать в других местах этой же кривой $\omega(k)$. Таким образом, рис. 2.13 годится для *любой* струны с грузами.

*Непрерывное приближение, или приближение длинных волн.* В приближении непрерывно распределенной массы мы предпо-



лагаем, что между $z=0$ и $z=L$ имеется бесконечное число грузов. В этом случае $a$ стремится к нулю. Интересно выяснить, как ведет себя наше точное дисперсионное соотношение, если $a$ очень мало, но не равно нулю. Когда мы говорим, что расстояние $a$ мало, мы

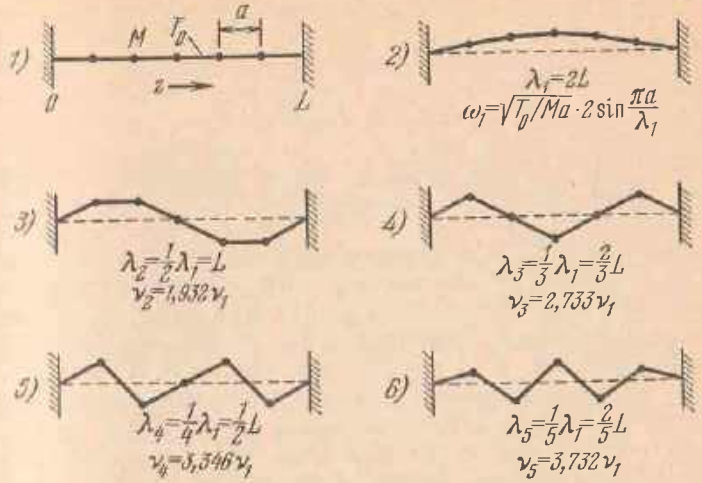



Рис. 2.12. Моды колебаний струны с пятью грузами.

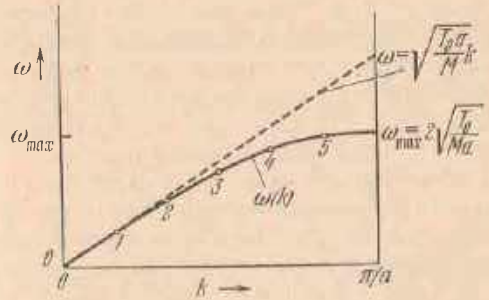



Рис. 2.13. Дисперсионное соотношение для нагруженной струны.
Пять отмеченных точек соответствуют пяти модам закрепленной на концах струны с пятью грузами. При других граничных условиях и при другом числе грузов соответствующие точки займут другие положения на той же кривой.

должны понимать, по сравнению с чем оно мало. Непрерывное приближение хорошо в случае, когда расстояние $a$ между грузами мало по сравнению с длиной волны $\lambda$:

$$a \ll \lambda, \quad ka = 2\pi\frac{a}{\lambda} \ll 1.$$

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора [приложение I, (4)]

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots$$

Подставляя этот ряд в (74) и полагая $x=\frac{1}{2}ka$, мы получаем

$$\omega(k)=2\sqrt{\frac{T_0}{Ma}}\left[\frac{1}{2}ka-\frac{1}{48}(ka)^3+\ldots\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{T_0a}{M}}\,k\left[1-\frac{1}{24}(ka)^2+\ldots\right],$$

т. е.

$$\omega(k)\approx\sqrt{\frac{T_0a}{M}}\,k. \qquad (75)$$

Соотношение (75) говорит об отсутствии дисперсии. Для непрерывной струны, где $M/a=\rho_0$, этот результат был получен в п. 2. 3.

*Дисперсионное соотношение для струны рояля.* Мы нашли, что моды реальной струны не удовлетворяют дисперсионному соотношению (75). Поэтому можно ожидать, что обертоны струны рояля, например обертоны C256, G384 и C512 основного тона C128, не будут выдерживаться точно. Действительно, это так. Из уравнения (74) или из графика рис. 2.13 видно, что возрастание волнового числа $k$ вызывает не прямо пропорциональные, а несколько меньшие увеличения частоты. Поэтому можно ожидать, что обертоны струны рояля будут чуть-чуть ниже предсказываемых теорией для непрерывной струны: частота второй гармоники будет $\nu_2<256$, третьей $\nu_3<384$ и т. д. На самом деле это не так! Обертоны струны рояля не будут ниже, они будут *выше* (т. е. будут диезными) обертонов, следующих из уравнения (75). Объяснение в том, что ни модель совершенно непрерывной и совершенно упругой струны, ни модель струны с грузами не дают правильного описания колебаний струны рояля. В частности, модель струны с грузами хуже модели непрерывной струны, так как она дает поправку, знак которой неверен.

Трудности с непрерывной моделью объясняются тем, что струна рояля не является совершенно гибкой. Когда вы изогнете ее, она выпрямится вновь, даже если нет натяжения, помогающего ей в этом. Поэтому возвращающая сила, действующая на маленький сегмент струны (т. е. сила, стремящаяся выпрямить струну), будет чуть-чуть больше силы, предсказываемой моделью совершенно гибкой струны. Частота моды, конечно, определяется из условия $\omega^2=$ возвращающей силе на единицу смещения и на единицу массы. Более высокие моды имеют более короткие длины волн, и, следовательно, им отвечает больший изгиб струны. Поэтому недостаточная гибкость струны (жесткость) играет бо́льшую роль для высоких мод, чем для низких, частота возрастает скорее, чем это следует из модели совершенно гибкой струны.

Все сказанное можно представить себе следующим образом. Возвращающая сила, вызванная натяжением, и та ее часть, которая связана с жесткостью, возрастают с ростом $k$. Однако поскольку влияние жесткости относительно сильнее для больших $k$, чем для малых, то возвращающая сила, связанная с жесткостью, должна возрастать с ростом $k$ с большей скоростью, чем возвращающая сила, обу-



словленная натяжением. Последняя пропорциональна $k^2$. Оказывается, что сила, обусловленная жесткостью, пропорциональна $k^4$. Таким образом, дисперсионное соотношение для реальной струны рояля имеет вид

$$\omega^2\approx\frac{T_0}{\rho_0}k^2+\alpha k^4, \qquad (76)$$

где $\alpha$ — положительная константа, появление которой вызвано наличием жесткости. Если бы член, связанный с жесткостью, был пропорционален $k^2$, то мы снова получили бы отсутствие дисперсии, описываемое уравнением (75), в котором вместо $T_0/\rho_0$ стояло бы $(T_0/\rho_0)+\alpha$ и отношения частот удовлетворяли бы равенствам $\nu_2=2\nu_1$, $\nu_3=3\nu_1$ и т. д., т.е. снова были бы «гармоническими». Рассмотрим примеры.

Пример 2. *Продольные колебания в системе, состоящей из пружин и масс.* Этот важный пример позже поможет нам понять свойства звуковых волн. (Звуковые волны представляют собой продольные колебания, т. е. колебания, перпендикулярные фронту волны.)

Случаи, когда $N=1$ и $N=2$, были рассмотрены в пп. 1.2 и 1.4. Рассмотрим сейчас общий случай $N$ масс, соединенных пружинами, как показано на рис. 2.14.

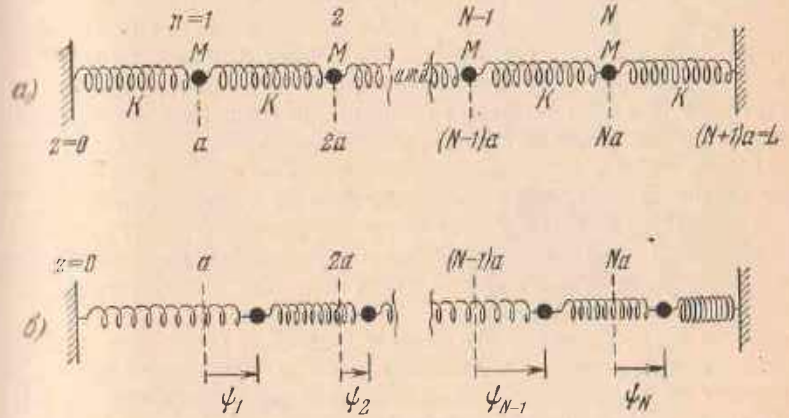



Рис. 2.14. Продольные колебания $N$ масс и $N+1$ пружин.
*а*) Равновесное положение; *б*) конфигурация для общего случая.

Легко вывести уравнение движения груза $n$. (Если вам это трудно, посмотрите вывод для $N=2$, п. 1.4.) Мы получим

$$M\frac{d^2\psi_n}{dt^2}=K(\psi_{n+1}-\psi_n)-K(\psi_n-\psi_{n-1}). \qquad (77)$$

Математическая форма уравнения (77) совпадает с формой уравнения (62), за тем исключением, что множитель $T_0/a$ заменен на коэффициент жесткости пружины $K$. Поэтому все наши математические выкладки можно повторить. Заменяя в уравнении (74)

$T_0/a$ на $K$, получим дисперсионное соотношение

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{K}{M}}\sin\frac{ka}{2} = 2\sqrt{\frac{K}{M}}\sin\frac{\pi a}{\lambda}. \qquad (78)$$

Для моды с волновым числом $k$ движение груза $n$ определяется выражением

$$\psi_n(t) = A\sin nka\cos[\omega(k)\,t + \varphi], \qquad (79)$$

где $k$ может принимать $N$ различных значений:

$$k_1 L = \pi, \quad k_2 L = 2\pi, \quad \ldots, \quad k_N L = N\pi. \qquad (80)$$

Закон дисперсии для этого случая имеет тот же вид, что и на рис. 2.13.

*Сосредоточенные и распределенные параметры.* При изучении поперечных колебаний струны с грузами мы совершили предельный переход к непрерывной струне, устремляя $a$ (расстояние между двумя соседними грузами) к нулю (при неизменной длине $L$). Когда отношение $a/\lambda$ настолько мало, что становится пригодным непрерывное приближение, можно использовать другую физическую модель такой системы. Вместо того, чтобы устремлять $a$ к нулю, имея дело с моделью, составленной из невесомых пружин, чередующихся с точечными массами, можно равномерно распределить массу вдоль пружины. В этом случае уже не будет сосредоточенных масс и невесомых пружин. Вместо этого у нас есть одна длинная пружина с распределенной вдоль нее массой. Хорошим примером такой модели может служить «пружина». Элементом повторяющейся длины $a$ здесь будет шаг одного витка спиральной пружины. Параметрами $M$ и $K$ являются соответственно масса и коэффициент жесткости одного витка. Если у нас $N$ витков (теперь $N$ — это уже не число степеней свободы), то полная масса равна $NM$, а коэффициент жесткости для всей пружины (т. е. для пружины длиной $L = Na$) равен $K/N$. (Коэффициент жесткости пружины, составленной из двух последовательно соединенных пружин, равен половине коэффициента жесткости составных пружин).

Вместо того, чтобы иметь дело с длиной $a$ (шаг одного витка), мы можем оперировать с величиной $M/a = \rho_0$, представляющей собой плотность распределения массы. Аналогично, коэффициент жесткости одного витка пружины $K$ можно заменить величиной, характеризующей материал пружины и ее конструкцию. Такой величиной является отношение $K^{-1}/a$. Это видно из следующего. Для пружины длиной $L = Na$ коэффициент $K_L$ в $N$ раз меньше $K$:

$$K_L = \frac{1}{N}K = \frac{a}{L}K. \qquad (81)$$

Таким образом, справедливо равенство

$$K_L \cdot L = Ka.$$

Отсюда видно, что произведение $Ka$ характеризует «пружинистость» материала и не зависит от длины пружины. Последнее равенство



можно переписать следующим образом:

$$\frac{K^{-1}}{a} = \frac{K_L^{-1}}{L}, \qquad (82)$$

из которого также видно, что отношение величины, обратной коэффициенту жесткости пружины, к длине пружины есть величина постоянная.

Пример 3. «*Пружина*»*). «Пружина» представляет собой спиральную пружину, имеющую примерно $N \approx 100$ витков (рис. 2.15). Диаметр каждого витка около 7 *см*, а длина «пружины» в нерастянутом состоянии близка к 6 *см*. При растяжении до длины $L$ в несколько метров такая «пружина» очень хорошо удовлетворяет приближению «пружины». Соответствующая длина повторения $a$ определяется длиной, приходящейся на один оборот, т. е. отношением $a = L/N$. Если коэффициент жесткости пружины для одного витка $K$, то $K^{-1}/a$ не зависит от длины $L$. (Считается, что масса распределена, а не сконцентрирована между интервалами длины $a$.) Дисперсионное соотношение для случая продольных колебаний получается путем предельного перехода от уравнения (78) к непрерывной системе:

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{K}{M}}\sin\frac{ka}{2} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{K}{M}}\left[\frac{ka}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{ka}{2}\right)^3 + \ldots\right] \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{Ka^2}{M}}\,k = \sqrt{\frac{Ka}{M/a}}\,k. \qquad (83)$$

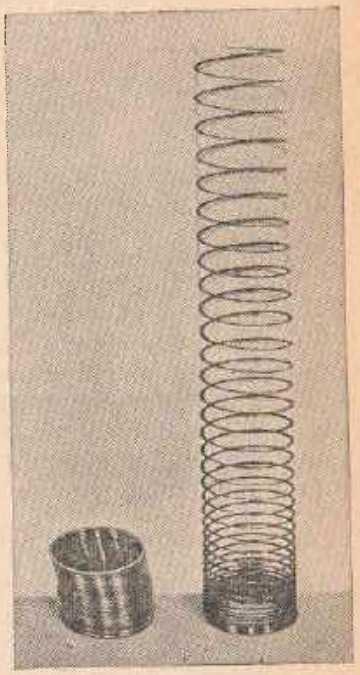


Рис. 2.15. «Пружина», лежащая на столе в сжатом и слегка растянутом состояниях.

Дисперсионное соотношение для поперечных колебаний [см. равенство (75)]:

$$\omega(k) \approx \sqrt{\frac{T_0}{M/a}}\,k \approx \sqrt{\frac{Ka}{M/a}}\,k, \qquad (84)$$

так как $T_0 = K/a$ в приближении «пружины». Таким образом, дисперсионное соотношение для продольных и поперечных колебаний «пружины» одно и то же. Поэтому, если граничные условия одинаковы (например, оба конца закреплены), то моды колебаний

*) См. сноску на стр. 24.

относительно $x$, $y$ и $z$ имеют одинаковую последовательность волновых чисел и частот.

Убедитесь сами в том, что продольные и поперечные моды имеют одинаковые частоты. Усиленно рекомендуем проделать домашние опыты, в которых участвуют «пружины». Это поможет понять свойства волн.

Пример 4. *LC-цепочка.* Рассмотрим последовательность связанных емкостей и индуктивностей, показанную на рис. 2.16. С помощью рис. 2.16, *б* (вспомним случай $N=2$, п. 1.4) легко показать, что э. д. с., действующая на $n$-ю индуктивность, равна

$$L\frac{dI_n}{dt} = -C^{-1}Q' + C^{-1}Q.$$

Тогда

$$L\frac{d^2I_n}{dt^2} = -C^{-1}\frac{dQ'}{dt} + C^{-1}\frac{dQ}{dt}.$$

Используя закон сохранения заряда для исключения $dQ'/dt$ и $dQ/dt$, этому уравнению можно придать вид

$$L\frac{d^2I_n}{dt^2} = -C^{-1}[I_n - I_{n+1}] + C^{-1}[I_{n-1} - I_n] =$$
$$= C^{-1}[I_{n+1} - I_n] - C^{-1}[I_n - I_{n-1}]. \qquad (85)$$

Уравнение (85) имеет ту же форму, что и уравнение (77) для продольных колебаний системы из связанных масс и пружин. Поэтому, не заботясь пока о граничных условиях, мы можем записать дисперсионное соотношение и общее решение для токов в индуктивностях. Дисперсионное соотношение получается заменой $K/M$ на $C^{-1}/L$ в уравнении (78):

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{C^{-1}}{L}}\sin\frac{ka}{2}. \qquad (86)$$

Общее решение уравнения (85) для отдельной моды без учета граничных условий имеет вид

$$I_n(t) = [A\sin nka + B\cos nka]\cos[\omega(k)\,t + \varphi], \qquad (87)$$

где константы $A$ и $B$ и последовательность значений $k$, соответствующих разным модам, зависят от граничных условий на концах системы.

*Физический смысл ka.* Вы могли заметить, что в уравнение (85) не входит расстояние $a$. На рис. 2.16 мы условно показали это расстояние, понимая, однако, что поведение схемы не может зависеть от ее пространственной конфигурации. Что же следует понимать под величиной $ka$ в дисперсионном соотношении и в уравнениях (86) и (87)? Когда понятие длины по оси $z$ имело физический смысл, например для колебаний струны, величина $k$ имела смысл изменения, на единицу длины по оси $z$, фазы функции $A\sin kz + B\cos kz$, определяющей форму моды. В случае системы с сосредоточенными параметрами, например для струны с грузами, мы пишем $z=na$, где $n=1, 2,\ldots$ — номер груза. В этом случае величина $ka$ представляет собой про-



изведение числа радиан фазы, приходящихся на единицу длины, на расстояние $a$ между грузами. Таким образом, $ka$ — это число радиан, на которое возрастает фаза при переходе от груза $n$ к грузу $n+1$. В случае системы с сосредоточенными емкостями и индуктивностями величина $ka$ также равна возрастанию фазы у функции $A\sin nka + B\cos nka$ при переходе от одной индуктивности к соседней. Мы можем в этом случае обозначить $ka$, например, через $\theta$. Однако в такой, несколько абстрактной, записи исчезает математическая симметрия механических и электрических примеров, поэтому

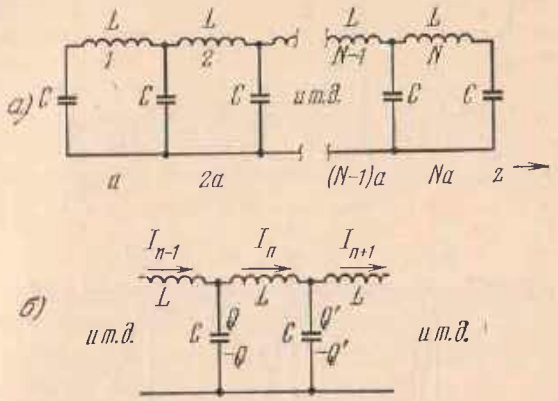



Рис. 2.16. Цепочка из связанных индуктивностей и емкостей.
*а*) Параметры; *б*) токи и заряды в $n$-й ячейке в общем случае.

мы будем условно считать, что «расстояние» между индуктивностями равно $a$.

*Другие формы дисперсионных соотношений.* Обратите внимание, что у всех рассмотренных нами систем с сосредоточенными параметрами один и тот же закон дисперсии:

$$\omega(k) = \omega_{\max}\sin\frac{ka}{2}. \qquad (88)$$

График этой зависимости показан на рис. 2.13. Частота $\omega_{\max}$ представляет собой константу, характеризующую данную физическую систему. Причина такой универсальности написанного соотношения в том, что у всех рассмотренных систем возвращающая сила, действующая на массу (или индуктивность), является результатом связи массы с соседними массами и пропорциональна относительному смещению масс. Существует, однако, много других интересных и важных форм дисперсионных соотношений. Например, имеются системы, у которых возвращающая сила, действующая на движущийся элемент, имеет две независимые компоненты. Одна компонента возникает из-за связи данного элемента с подобными соседними движущимися элементами. Для этой компоненты дисперсионное соотношение имело бы вид (88). Вторая компонента возникает из-за связи с некоторой «внешней» силой. Вклад этой компоненты зависит

только от смещения движущегося элемента относительно положения равновесия, а не от смещения относительно соседних элементов. Если бы движение вызывалось только этой силой, то движущиеся элементы не были бы связаны, а их смещения были бы нормальными координатами системы. Такая система рассмотрена в следующем примере.

Пример 5. *Связанные маятники.* Система показана на рис. 2.17. На каждую массу действуют возвращающие силы двух типов.

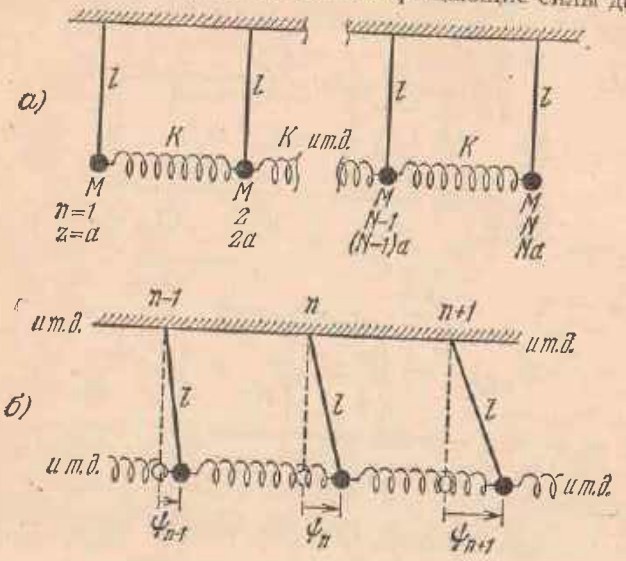



Рис. 2.17. Связанные маятники.
*а*) Равновесное положение; *б*) общий случай.

«Внешняя» сила (она создается силой тяжести) пропорциональна смещению массы от положения равновесия и не зависит от относительного смещения масс. Вторая сила возникает из-за того, что массы связаны между собой пружинами, и зависит только от взаимного расположения масс. Попытаемся угадать дисперсионное соотношение для такой системы. Если бы мы имели только связанные пружинами массы (т. е. если бы $g$ равнялось нулю), дисперсионное соотношение отвечало бы случаю продольных колебаний связанных масс, а возвращающая сила на единицу длины и единицу массы (т. е. величина $\omega^2$) была бы равна

$$\omega^2 = 4\frac{K}{M}\sin^2\frac{ka}{2} \qquad (\text{если } g=0). \tag{89}$$

Теперь предположим, что (при $g=0$) происходят колебания, соответствующие какой-то моде, форма которой определяется значением $k$, а величина $k$ в свою очередь определяется из граничных условий. Вообразим, что, используя «ручку управления гравитацией», мы



можем постепенно включать силу тяжести, увеличивая $g$ от нуля до конечного значения (980 *см/сек*$^2$). (Можно придумать и более реальный способ включения силы тяжести. Как это сделать?)

Если мы увеличим $g$ от нуля до очень малого значения $g'$, то вклад в возвращающую силу $\omega^2$ для *каждой* массы будет *одинаков* и равен $g'/l$. Это означает, что массы будут продолжать колебаться с той же геометрией моды, с тем же значением $k$, с той же линейной комбинацией $\sin kx$ и $\cos kx$, но колебания будут совершаться немного быстрее. Это можно объяснить следующим образом. При $g=0$ на все массы действовала одна и та же возвращающая сила на единицу смещения и на единицу массы. Включив $g'$, мы прибавим к уже имевшемуся значению $\omega^2$ *одну и ту же* величину $g'/l$. Поэтому мода колебаний сохранится, но произойдет увеличение $\omega^2$. Включая $g$ постепенно, мы предотвратим перемешивание мод и сохраним их форму. Длина волн также не изменится по сравнению со случаем $g=0$, а полная возвращающая сила на единицу массы и единицу смещения будет равна

$$\omega^2(k) = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M}\sin^2\frac{ka}{2}. \tag{90}$$

Если эти рассуждения, которые привели к формуле (90), не кажутся убедительными, то посмотрите задачу 2.26. Там вы найдете уравнение движения для $n$-й массы, докажете справедливость уравнения (90) и найдете формы мод. (Уже сейчас можно сказать, что для граничных условий рис. 2.17 первой моде отвечает $k=0$.)

Мы встретимся со многими примерами, когда закон дисперсии имеет вид (90). Его можно переписать в более общем виде:

$$\omega^2(k) = \omega_0^2 + \omega_1^2\sin^2\frac{ka}{2}. \tag{91}$$

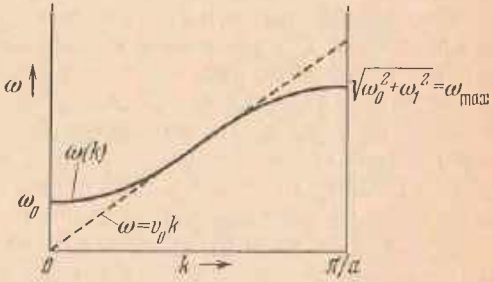



Рис. 2.18. Дисперсионное соотношение для связанных маятников.

Совершая предельный переход к непрерывной системе (когда $ka \ll 1$), имеем

$$\omega^2(k) = \omega_0^2 + v_0^2k^2, \tag{92}$$

где $v_0^2$ — постоянная, равная $\omega_1^2a^2/4$.

Закон дисперсии в форме (92) встретится нам при изучении распространения электромагнитных волн в волноводе и в ионосфере Земли. (Таков же закон дисперсии и для релятивистских волн де Бройля при квантовом описании частиц). Уравнение (91) изображено графически на рис. 2.18.

Пример 6. *Колебания плазмы.* Этот интересный пример приводит к тому же дисперсионному соотношению, что и пример

со связанными маятниками. В главе 4 мы выведем дисперсионное соотношение для электромагнитных волн в ионосфере Земли, которое имеет вид, аналогичный выражению (92):

$$\omega^2(k) = \omega_p^2 + c^2k^2, \tag{93}$$

где $c$ — скорость света, а $\omega_p$ — так называемая частота колебаний плазмы, определяемая из равенства

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}. \tag{94}$$

Здесь $N$ — плотность числа электронов (в электронах на $см^3$), $e$ — заряд, а $m$ — масса электрона.

Из рис. 2.18 следует, что самая низкая мода для системы, описываемой равенствами (91) или (92),— это мода с $k=0$, т. е. с длиной волны, равной бесконечности. В этом случае все маятники будут колебаться с частотой $\omega^2=g/l$ и одинаковой амплитудой и фазой. В настоящем примере самая низкая мода соответствует колебаниям плазмы с частотой $\omega_p$, что видно из уравнения (93), если положить $k=0$. Мы рассмотрим эту моду и выведем уравнение (94).

Нейтральная плазма состоит из нейтральных и ионизованных молекул газа. При однократной ионизации молекулы образуется положительный ион и свободный электрон. Земная ионосфера представляет собой слой воздуха (в действительности несколько слоев с различными свойствами), в котором находится много ионизованных молекул (молекулы азота $N_2$ и кислорода $O_2$). Молекулы воздуха обычно ионизуются при поглощении ультрафиолетового излучения Солнца. В земной атмосфере плотность ионов и электронов имеет максимум на расстояниях около 200÷400 $км$ от земной поверхности. В более высоких слоях атмосферы плотность электронов (и ионов) уменьшается из-за уменьшения числа молекул воздуха. В низких слоях атмосферы плотность электронов мала из-за того, что ультрафиолетовое излучение сюда не доходит.

Так как плазма нейтральна (в среднем), то она не является источником внешнего электростатического поля. Однако одна область плазмы может получить избыток заряда за счет его нехватки в другой, соседней, области. Это создает электрическое поле в плазме. Под действием электрического поля ионы ускоряются в одном направлении (т. е. вдоль поля), а электроны — в противоположном. Заряды движутся таким образом, чтобы уничтожить избыток и нехватку заряда, вызвавшие поле. Такова причина возникновения возвращающей силы. К тому времени, когда избыточный заряд будет уничтожен, ионы и электроны приобретут определенные скорости. Инерция заставит их проскочить через положение равновесия, и мы получим новые области избытка и недостатка заряда, противоположные по знаку первоначальным. Таким образом, здесь существует механизм, который поддерживает колебания, после того как они возбуждены.

Если нас интересует только движение заряда из одной области в другую, мы можем забыть о положительных ионах и считать, что



полное перемещение заряда создается движением электронов. Действительно, в данном электрическом поле (одинаковом для любых частиц) ускорение электрона меньше ускорения иона на величину отношения их масс (около $3\cdot10^4$), и смещением ионов можно пренебречь.

Рассмотрим упрощенную ситуацию, когда плазма находится между ограничивающими стенками (рис. 2.19). Пренебрежем движением ионов по сравнению с движением электронов. В любой момент времени у одной стенки может быть избыток заряда,— соответственно его недостаток у другой. Это создает пространственно однородное электрическое поле в плазме (том II, п. 1.6), определяемое как

$$E_x = -4\pi\frac{Q}{A}, \tag{95}$$

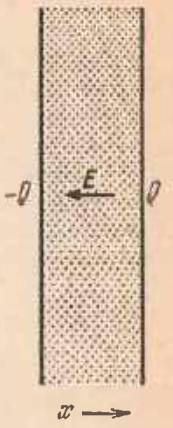


Рис. 2.19. Колебания в ограниченной плазме.

где $A$ — площадь стенок, а знак минус указывает на то, что электрическое поле $E_x$ стремится уничтожить избыток заряда $Q$. Других источников электрического поля нет. (Плазма между стенками нейтральна, так как каждый электрон, движущийся вправо из данного объема, заменяется другим, входящим в него слева.) Второй закон Ньютона для каждого электрона с массой $m$ и зарядом $q$ имеет вид

$$\frac{md^2x}{dt^2} = qE_x. \tag{96}$$

(Мы пренебрегаем другими силами, действующими на электрон, которые появляются из-за столкновений электронов и ионов; в среднем эти силы равны нулю и не оказывают влияния на перенос заряда.)

Теперь предположим, что в 1 $см^3$ содержится $N$ электронов и каждый электрон смещен на расстояние $x$ от положения равновесия. Полный заряд на одной стенке («отобранный» от другой стенки) равен

$$Q = Nq\,Ax. \tag{97}$$

Дифференцируя уравнение (97) дважды по времени и используя уравнения (96) и (95), получим

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{4\pi Nq^2}{m}Q. \tag{98}$$

Решение этого уравнения

$$Q = Q_0\cos(\omega t + \varphi),$$

где

$$\omega^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m} \equiv \omega_p^2. \tag{99}$$

Величина $\omega_p$ называется частотой колебаний плазмы или критической частотой.

Плотность свободных электронов в ионосфере изменяется с высотой и временем суток. Рекомбинация электронов и ионов в нейтральные молекулы начинается после заката Солнца, когда образование новых ионов приостанавливается. Поэтому плотность электронов ночью уменьшается. Для дневного времени типичное значение частоты колебаний плазмы равно

$$\nu_p = 10 \div 30 \ \textit{Мгц}, \qquad (100)$$

что соответствует плотности электронов $N \approx 10^6 \div 10^7$ *электронов/см*$^3$.

Пример из квантовой физики. Гипотеза де Бройля приписывает частице с импульсом $p$ волновое число $k$, определяемое из равенства $p = \hbar k$. «Боровское условие частот» утверждает, что частица с энергией $E$ имеет волновую частоту $\omega$, определяемую равенством $E = \hbar\omega$. Объединив оба эти утверждения, можно найти дисперсионное соотношение между $\omega$ и $k$ для частиц. Оно следует из связи между $E$ и $p$. В дополнении 2 разобраны соответствующие примеры.

### Задачи и домашние опыты

**2.1.** Опыт. *Зависимость частоты колебаний «пружины» от ее длины.* Возьмите левой рукой первый виток «пружины», а правой — последний. Расстояние между руками должно быть около 1 *м*. Измерьте частоту вертикальных поперечных колебаний. (Не беспокойтесь о том, что «пружина» сильно провисла.) Теперь растяните «пружину» как можно больше. Измерьте частоту. Далее, закрепите как-нибудь оба конца «пружины», чтобы полная ее длина равнялась 2,5—3 *м*. Измерьте частоту. Объясните результаты. Используйте эти результаты измерения частоты, чтобы определить коэффициент упругости «пружины», приходящийся на один виток. Пусть $N_0$ — полное число витков «пружины». Закрепите пружину таким образом, чтобы свободными были $N$ из $N_0$ витков. Перед опытом предскажите зависимость частоты от $N/N_0$. Затем сделайте опыт, проверьте предсказание.

**2.2.** Опыт. *«Пружина» как непрерывная система.* Привяжите концы растянутой до 2,5—3 *м* «пружины» к неподвижным предметам. Не беспокойтесь о провисании «пружины». Возбудите первую моду колебаний в каждом из поперечных направлений. Измерьте частоты этих двух мод. Возбудите также первые моды продольных колебаний и измерьте их частоту. (Есть два хороших способа возбудить желаемую моду. Первый заключается в том, чтобы придать «пружине» соответствующую форму и затем отпустить, а второй — в том, чтобы слегка трясти «пружину» с нужной частотой, взявшись за нее около одного из концов, и, возбудив достаточную амплитуду колебаний, отпустить «пружину». Используйте оба метода.) Затем подумайте, как возбудить вторую моду, для которой длина $L$ равна двум полуволнам. Сделайте это для всех трех направлений: $x$, $y$ и $z$. Измерьте частоты. При некотором навыке вы смогли бы возбудить третью моды.

Теперь возбудите первую моду вертикальных колебаний и одновременно вторую продольную моду. (Это легко можно сделать при соответствующих условиях). Посмотрите на систему и измерьте частоту биений между продольной (второй) модой и в два раза более низкой вертикальной модой. При некоторой практике это легко сделать. Это хороший способ убедиться, что основная и первая «октавы» отличаются по частоте в два раза. Точно так же вы легко можете одновременно возбудить самую низкую вертикальную моду и вторую горизонтальную моду.

**2.3.** *Нулевые измерения.* Прочтите опыт 2.2 (для выполнения этой задачи вы можете его и не делать). Предположим, что вы определяете частоту колебаний в «пружине», считая число циклов колебаний за 10 *сек* и затем деля число циклов на время. Предположим далее, что вы можете читать показания часов с точностью



1 *сек*, а определять число полных циклов с точностью $\pm 1/4$ цикла. Частота самой низкой моды $\nu_1$ около 1 *гц*. Частота $\nu_2$ второй моды около 2 *гц*.

а) Оцените грубо, с какой точностью ваши измерения могут определить величины $\nu_1$ и $\nu_2$. (Ответ нужно дать в виде «$\nu_1 = 1{,}0 \pm 0{,}1$, $\nu_2 = 2{,}0 \pm 0{,}2$».)

б) Теперь предположим, что вы одновременно возбуждаете обе моды и измеряете частоту биений между $2\nu_1$ и $\nu_2$, как описано в опыте 2.2. Это можно сделать, наблюдая за биениями в течение 10 *сек*, т. е. в течение 10 циклов $\nu_1$. Предположим, что за это время вы не зарегистрировали биения между $2\nu_1$ и $\nu_2$ с точностью $1/4$ биения. Таким образом, ваш экспериментальный результат: $\nu_2 - 2\nu_1 = 0$. Чему равна экспериментальная точность? (Дайте ответ, например в виде «$\nu_2 - 2\nu_1 = 0 \pm 0{,}10\nu_1$».) Чему равна точность при оценке величины $\nu_2 - 2\nu_1$ (представленная в таком же виде), полученная из результатов независимых измерений $\nu_2$ и $\nu_1$, сделанных в пункте а)? Видите ли вы экспериментальные преимущества в методе нулевых биений? Объясните преимущества этого метода и метода нулевых измерений в других возможных случаях.

**2.4.** Опыт. *Тембр «звука», издаваемого «пружиной».* Тембр звука музыкального инструмента зависит от того, какие гармоники возбуждены. [Например, в кларнете почти отсутствуют четные гармоники и присутствуют лишь частоты $\nu_1$, $3\nu_1$, $5\nu_1$ и т. д.] Возбудите «пружину», подвешенную так, как указано в опыте 2.2, путем толчков ее рукой в середине. Попробуйте сделать это при толчках различной резкости. Можно заметить, что четные гармоники не возбуждаются и, чем более импульсный характер носит возбуждение, тем больше число возбуждаемых нечетных мод. Как возбудить только четные моды? Попробуйте щипать струну гитары или рояля в различных местах — посередине, около конца — и послушайте, есть ли разница в тембре звука.

**2.5.** Опыт. *Рояль как анализатор Фурье; нечувствительность уха к фазе колебаний.* Нажмите на демпфирующую педаль рояля. Крикните «эй» в направлении струны рояля. Слушайте. Крикните «оу». Попробуйте все гласные. Струны рояля производят фурье-анализ голоса. Обратите внимание на гласный звук, длящийся несколько секунд. Существенно ли для вашего уха знание относительной фазы компонент Фурье, производящих звук?

**2.6.** Опыт. *Гармоники рояля; равномерно темперированный строй.* В справочниках физических констант можно найти таблицы исходных тонов для трех общепринятых музыкальных строев: американского равномерно темперированного хроматического строя (стандартный тон A440), международного равномерно темперированного хроматического строя (стандартный тон A435) и диатонического, или чистого, строя (построен на тоне C256, что дает тон A426,67).

Начнем с диатонического строя. В этом строе за единицу частоты $\nu = 1$ принята частота в 256 *гц*. *Гармоники* этой исходной ноты равны $\nu = 2, 3, 4$ и т. д., а *субгармоники* равны $1/2$, $1/3$, $1/4$ и т. д. Нота C средней октавы рояля *) соответствует C256 (если рояль так настроен) и обозначается $C_4$. (Индекс означает октаву. Он возрастает на единицу при переходе к следующей, более высокой, октаве.) Предположим, что для струн рояля точно выполняется дисперсионный закон «непрерывной идеально упругой струны». Тогда моды данной струны будут представлять собой гармоническую последовательность $\nu_1$, $2\nu_1$, $3\nu_1$ и т. д.

Приведем обозначения и частоты первых 16 гармоник струны $C_4$, а также первых двух субгармоник (мы подчеркнули гармонику $C_4$ и ее октавы):

| Обозначение | $F_3$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $G_5$ | $C_6$ | $E_6$ | $G_6$ | $B_{\flat 6}$ | $C_7$ | $D_7$ | $E_7$ | $F_{\#7}$ | $G_7$ | $G_{\#7}$ | $B_{\flat 7}$ | $B_7$ | $C_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\nu$ | 1/3 | 1/2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

При повышении любого тона на октаву частота колебаний удваивается (сравните $G_6$ и $G_7$, $C_4$ и $C_5$ и т. п.). Теперь, умножая частоту $C_4$ на соответствующие

*) Музыканты называют ее первой октавой. (*Прим. ред.*)

множители, лежащие между 1 и 2, мы образуем следующую гамму внутри отдельной октавы, например, между $C_4$ и $C_5$:

| Обозначение | C до | D ре | E ми | F фа | G соль | A ля | B си | C до |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 1 | 9/8 | 5/4 | 4/3 | 3/2 | 5/3 | 15/8 | 2 |

Мы получили научную, или чистую диатоническую, С-мажорную гамму (диатоническая гамма соответствует белым клавишам рояля). Обратите внимание на ноту A426,67. Она равна $^5/_4$F. Нота C в этой гамме называется *ключом* или *тоникой*.

Наименьший музыкальный интервал в диатонической гамме называется *диатоническим полутоном* или *малой секундой*. Отношение частот для этого интервала равно F/E=C/B=16/15=1,067. Следующие, бо́льшие, частотные интервалы называются *тонами* или *большими секундами*. Имеется два типа больших секунд:

$$\frac{D}{C}=\frac{G}{F}=\frac{B}{A}=\frac{9}{8}=1{,}125 \quad \text{и} \quad \frac{E}{D}=\frac{A}{G}=\frac{10}{9}=1{,}111.$$

Имеется также два типа музыкальных интервалов, так называемых *малых терций*:

$$\frac{E}{D}=\frac{32}{27}=1{,}185 \quad \text{и} \quad \frac{G}{E}=\frac{G}{A}=\frac{6}{5}=1{,}200,$$

и еще *большая терция*:

$$\frac{E}{C}=\frac{A}{F}=\frac{B}{G}=\frac{5}{4}=1{,}250.$$

Теперь возникают некоторые «музыкальные» трудности. Предположим, что, сочиняя музыку с помощью рояля, имеющего диатонический строй, мы решили изменить ключ, т. е. перейти к диатонической гамме с другой тоникой, например из С-мажорной гаммы в D-мажорную, и иметь ту же шкалу, т. е. те же отношения частот, что и раньше. Таким образом, мы хотим, чтобы отношение частот E/D в новой гамме было равно отношению D/C в старой, т. е. большой секунде 9/8=1,125. К сожалению, мы не можем использовать ту струну E, которая уже имеется, так как при этом отношение E/D=10/9=1,111, а не 1,125. Таким образом, нам необходима новая струна E′, для которой отношение E′/D=1,125, но при этом E′/C=(1,125)(D/C)=1,265, в то время как E/C=1,250.

Для следующей ноты после E′ также понадобится новая струна, обозначаемая $F_{\#}$. Для нее должно выполняться равенство $F_{\#}/D=E/C$, т. е. $F_{\#}/C=(5/4)(9/8)=1{,}407$. Обратите внимание на то, что у рояля появился новый полутон: $F_{\#}/F=1{,}0555$. По мере заполнения шкалы придется добавлять новые ноты, и ситуация будет становиться хуже и хуже, так как понадобятся все новые и новые струны. Этих затруднений легко избежать с помощью равномерно темперированного строя, который содержит частоты, равноудаленные в логарифмическом масштабе. В этом строе октава разделена на 12 малых секунд (полутонов); этим музыкальным интервалам соответствует отношение частот $2^{1/12}=1{,}059$. Большим секундам (т. е. двум полутонам) соответствует отношение частот $2^{2/12}=1{,}122$; малым терциям—отношение $2^{3/12}$ и т. д. Ни один из этих интервалов (за исключением октавы) не совпадает точно с интервалами диатонического строя, но они близки к точным значениям интервалов этого строя, построенных от любой ноты, взятой в качестве тоники.

Сделайте следующие опыты

1. Нажмите одну из клавиш рояля, например $B_{\flat 6}$, так, чтобы соответствующая струна не зазвучала (т. е. очень нежно). Теперь резко возбудите одну из



низких нот, подержите клавишу несколько секунд и отпустите (погасив тем самым колебания этой струны). Если теперь струна $B_{\flat 6}$ звучит громче, то это значит, что она возбудилась одной из гармоник, присутствующих в модах (конфигурации низкой ноты). Попробуйте добиться результата, перебрав разные низкие ноты. Нота октавой ниже также должна хорошо возбуждать колебания открытой струны (струны $B_{\flat 6}$ в нашем случае). Этот опыт можно также сделать, имея несколько одновременно открытых струн, которые можно пытаться возбудить более низкой нотой. Когда вы найдете ноту, которая возбуждается этим способом, попробуйте возбудить соседнюю ноту, отстоящую от первой на интервал малая секунда. Удается ли это сделать?

2. Теперь, наоборот, тихо возбудите низкую ноту и резко — более высокую. Если более высокая нота является одним из обертонов низкой струны, то вы будете возбуждать в низкой струне этот обертон, не возбуждая основную моду. Таким образом, вы сможете услышать, как звучат гармоники низкой струны, когда они не заглушены громким основным тоном.

3. Используйте метод, описанный в 2, чтобы услышать, как звучат первые 6 или 7 гармоник $C_4$ (или более низкого C). Затем подумайте, как можно услышать отдельную гармонику в общем звучании струны, когда клавиша, соответствующая нижней струне (нижняя клавиша), ударяется обычным образом. Например, подумайте, как услышать 7-ю гармонику $B_{\flat 6}$, когда ударяется $C_4$. Освободите струну $C_4$ и резко ударьте $B_{\flat 6}$. Таким образом вы узнаете, как звучит 7-я гармоника струны $C_4$. Затем, пока этот звук еще в вашей памяти, ударьте $C_4$ и постарайтесь уловить в звуке (в котором преобладает нота $C_4$) ноту $B_{\flat 6}$. Обратите внимание на то, что частота этой ноты, когда она возникает как 7-я гармоника $C_4$, т. е. появляется при полном звучании струны $C_4$, не будет точно такой, как частота основной ноты струны $B_{\flat 6}$. Однако эти частоты будут достаточно близки. [Так происходит потому, что струна $B_{\flat 6}$ после возбуждения сразу же глушится, а струна $C_4$ через несколько секунд «забывает», как она была возбуждена, и колеблется со своей собственной (7-я гармоника) частотой.] Таким образом, ее звучание будет несколько отлично от звучания возбуждающей ноты. (Конечно, если рояль расстроен, то звуки будут *совершенно* различными.) Вследствие этого небольшого различия по частоте вы сможете услышать биения. Для этого проделайте следующее:

4. Освободите (бесшумно) струну $C_4$. Резко ударьте $C_5$. Это приведет к возбуждению второй моды струны $C_4$. Теперь, прежде чем затухнет вторая гармоника $C_4$, приглушите $C_5$ и затем опять ударьте $C_5$, но не очень сильно, так, чтобы согласовать громкость $C_5$ с громкостью еще звучащей второй гармоники $C_4$. Слушайте биения. (Этот опыт получается не одинаково хорошо на разных роялях. Его нужно делать в тихой комнате.)

5. Самые низкие две ноты рояля — это ноты $A_0$ 27,5 и $A_{\#0}$ 29,1. Таким образом, частота их биений, которую легко обнаружить, равна 1,6 *гц*. Возбудите одновременно несильным ударом обе ноты. Когда вам покажется, что вы слышите биения, отпустите одну клавишу (но не обе). Исчезнут ли биения? (Настроен ли рояль?)

**2.7.** *Почему идеальная непрерывная струна дает точно «гармоническое» отношение частот, а струна с грузами не дает?* Рассмотрим струну с грузами, закрепленную на концах (грузов очень много, скажем 100). Мы можем считать эту струну практически непрерывной. Положим, что струна совершает колебания в самой низкой моде. В этом случае длина струны $L$ равна половине длины волны. Теперь рассмотрим вторую моду. В этом случае $L$ равно двум половинам волны, так что в каждой половине струны укладывается половина длины волны. Теперь сравним для второй моды колебаний 50 грузов в первый половине струны со 100 грузами, когда струна колеблется в первой моде. В обоих случаях грузы «выложены» по кривой, являющейся половиной синусоидальной волны. Сравним положение груза 1 (в моде 2) со средним положением грузов 1 и 2 (в моде 1), положение груза 2 (в моде 2) — с грузами 3 и 4 (в моде 1) и т. д. Таким образом, груз 17

в моде 2 имеет ту же амплитуду, что и средняя точка между грузами 33 и 34 в первой моде (если, конечно, амплитуды мод одинаковы). Но в моде 2 угол, который образует струна в месте расположения груза 17 с осью равновесного положения, в два раза больше соответствующего угла в месте расположения грузов 33 и 34 в моде 1 (используем приближение малого угла). Таким образом, возвращающая сила на единицу смещения для грузов 17 во второй моде в два раза больше, чем для грузов 33 и 34 в первой. Кроме того, масса груза 17 равна половине массы двух грузов, 33 и 34. Таким образом, *возвращающая сила, приходящаяся на единицу смещения и единицу массы, в четыре раза больше для груза 17 во второй моде, чем для комбинации грузов 33 и 34 в первой моде.* Мы получаем «в непрерывном приближении» (основанном на «большом числе» грузов), что $\omega_2 = 2\omega_1$.

*Этот вывод не будет справедлив в случае малого числа грузов.* Объясните, почему «гармонические» отношения $\nu_2 = 2\nu_1$, $\nu_3 = 3\nu_1$ и т.д. возникают в непрерывном пределе, но не в случае нескольких грузов, показанном, например, на рис. 2.12.

**2.8.** За какое время ваш вклад в банке удвоится, если годовой процент равен 5,9%? (Указание. Рассмотрите равномерно темперированный строй, опыт 2.6.)

**2.9.** Закончите образование диатонической шкалы для D-мажора, начатое в опыте 2.6. Было найдено, что нужно добавить новую струну E, которую мы назвали E′. Наша первая «черная нота» была $F_{\#}$. Однако нам понадобится еще одна «черная нота» — $C_{\#}$. Что можно сказать про G, F, A и B? Можем ли мы использовать те, которые имеем, или нужно образовывать новые — G′, F′, A′ и B′?

**2.10.** Выведите волновое уравнение (55) для неоднородной струны.

**2.11.** Получите выражение (47) для фурье-коэффициентов функции $F(z)$, показанной на рис. 2.6.

**2.12.** Найдите конфигурацию и частоты первых трех мод поперечных колебаний непрерывной струны с натяжением $T_0$, плотностью массы $\rho_0$ и длиной $L$ при граничных условиях, когда *оба конца свободны.* (Концы прикреплены к кольцам, скользящим без трения по стержням.) Покажите, что особенность самой низкой моды в том, что она имеет бесконечную длину волны и нулевую частоту. В этой моде струна перемещается так, что скорости всех ее точек одинаковы. (Это включает в себя также возможность нахождения струны в покое при произвольном смещении.)

**2.13.** Найдите конфигурацию и частоты трех мод поперечных колебаний однородной струны с грузами, имеющей три груза и четыре сегмента, если оба конца струны свободны. (Концы струны прикреплены к невесомым кольцам, скользящим без трения по стержням.) Сравните самую низкую моду с результатом задачи 2.12.

**2.14.** Рассмотрите $LC$-цепочку из трех индуктивностей и четырех емкостей, соединенных, как показано на рис. 2.16, для $N \approx 3$, если *две внешние емкости короткозамкнуты.* Найдите три моды, т. е. конфигурацию токов и частот. Сравните физический смысл, который имеет самая низкая мода в этой задаче и в задаче 2.13. Сравните граничные условия обеих задач.

**2.15.** Рассмотрите стальную струну рояля, которая дает C256 (диатонический строй). Плотность стали близка к 9 *г/см*$^3$ (это не линейная плотность массы $\rho_0$. Почему?). Положим, что диаметр струны $^1/_2$ *мм*, а ее длина 100 *см*. Чему равно натяжение струны в динах и в *кГ*?

Ответ. $T_0 \approx 47$ *кГ*.

**2.16.** Найдите смещение $\psi(z, t)$ для «пружины», растянутой так, чтобы повторить функцию $g(z)$, определяемую уравнением (48). Нарисуйте $\psi(z, t_0)$, когда $\omega_1 t_0 = \pi/3$. Сравните форму $\psi(z, t_0)$ с формой $\psi(z, 0)$, показанной на рис. 2.7.

**2.17.** Сравните натяжение стальной струны гитары с натяжением струны такой же длины, диаметра и тона (самой первой моды), но сделанной из жилы. Плотность стали около 9 *г/см*$^3$, плотность жилы чуть больше 1 *г/см*$^3$. Будет ли в действительности диаметр стальной струны для гитары равен диаметру гитарной струны из жилы? Посмотрите на гитары и сравните. Оценив отношение диаметров, вычислите отношение натяжения струн в этих двух случаях.



**2.18.** Выведите классическое волновое уравнение (14) следующим способом. Начните с уравнения (62) и перейдите к непрерывному приближению. Замените индекс $n$ на координату $z$, принимая во внимание, что расстояние между грузами равно $a$. Воспользуйтесь разложением правой части уравнения (62) в ряд Тейлора. Рассмотрите случай, когда *в разложении имеется на один член больше, чем необходимо для получения классического волнового уравнения.* Определите критерий, по которому можно пренебречь этим членом и членами более высокого порядка.

**2.19.** Покажите, что, рассматривая уравнение (71) как решение уравнения движения для поперечных колебаний струны с грузами (65), можно получить дисперсионное соотношение (70) независимо от выбора постоянных $A$, $B$ и $k$, определяемых только начальными и граничными условиями.

**2.20.** Используйте уравнения (73) и (70), чтобы получить отношения частот, показанные на рис. 2.12 для $N = 5$.

**2.21.** Найдите конфигурации и частоты мод для поперечных колебаний струны с пятью грузами и одним закрепленным и другим свободным концами. Постройте пять соответствующих точек дисперсионного соотношения $\omega(k)$ подобно тому, как это сделано на рис. 2.13.

**2.22.** Рассмотрев рис. 2.13, а также схему самой системы, покажите, каким образом можно добавить шесть точек к графику рис. 2.13, чтобы этот график определял моды для струны с 11 грузами, закрепленной на концах.

**2.23.** Покажите, что уравнения (73) и (74) дают те же результаты для частот при $N = 1$ и $N = 2$, которые мы получили в пп. 1.2 и 1.4.

**2.24.** Нарисуйте пять мод струны с пятью грузами, соответствующих уравнениям (78) — (80).

**2.25.** Постройте график дисперсионного соотношения для системы, показанной на рис. 2.16.

**2.26.** Покажите, что для системы связанных маятников, показанных на рис. 2.17, уравнение движения для $n$-го маятника (в приближении малых колебаний) имеет вид

$$\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = -\frac{g}{l}\psi_n + \frac{K}{M}\left(\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a}\right) - \frac{K}{M}\left(\frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{a}\right).$$

Покажите, что общее решение для моды без учета граничных условий имеет вид

$$\psi_n(t) = \cos(\omega t + \varphi)\,[A \sin nka + B \cos nka].$$

Покажите, что дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M}\sin^2\frac{ka}{2}.$$

Покажите, что для граничных условий рис. 2.17 (т. е. когда крайние пружины не закреплены) приведенное выше решение имеет вид

$$\psi_n(t) = \cos(\omega t + \varphi)\,B \cos nka,$$

когда $n$-й маятник расположен в точке $z = (n - {}^1/_2)\,a$. Покажите, что для первой моды $k = 0$. Нарисуйте ее. Как будет вести себя система в такой конфигурации при постепенном уменьшении до нуля силы тяжести? Постройте конфигурацию трех мод для $N = 3$ и определите частоты.

**2.27.** Найдите систему из связанных емкостей и индуктивностей, которая была бы аналогом системы из связанных маятников рис. 2.17 в том смысле, что уравнение движения для тока в $n$-й индуктивности имело бы тот же вид, что уравнение движения для $n$-го маятника в задаче 2.26. Найдите дисперсионное соотношение.

**2.28.** Перейдите к непрерывному пределу в задаче со связанными маятниками (задача 2.26). Покажите, что в этом случае система описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega_0^2\psi + v_0^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

**2.29.** Докажите каждое из следующих утверждений двумя способами: а) «физическим» способом, основанным на использовании понятия нормальных мод

непрерывной струны с соответствующими граничными условиями, и б) способом фурье-анализа периодической функции от $z$:

1. Любая (разумная) функция $f(z)$, определенная между $z=0$ и $z=L$ и имеющая нулевое значение в $z=0$ и нулевой наклон в $z=L$, может быть разложена в ряд Фурье вида

$$f(z)=\sum_n A_n \sin nk_1 z; \qquad n=1, 3, 5, 7, \ldots; \qquad k_1 L=\pi/2.$$

(Замечание. Начните с построения из $f(z)$ периодической функции, чтобы можно было использовать формулы фурье-анализа.)

2. Любая «разумная» функция $f(z)$, определенная между $z=0$ и $z=L$ и имеющая нулевой наклон в $z=0$ и $z=L$, может быть представлена **рядом Фурье вида**

$$f(z)=B_0+\sum_n B_n \cos nk_1 z; \qquad n=1, 2, 3, 4, \ldots; \qquad k_1 L=\pi.$$

3. Любая (разумная) функция $f(z)$, определенная между $z=0$ и $z=L$ и имеющая нулевой наклон в $z=0$ и нулевое значение в $z=L$, может быть разложена в ряд Фурье вида

$$f(z)=\sum_n B_n \cos nk_1 z; \qquad n=1, 3, 5, 7, \ldots; \qquad k_1 L=\pi/2.$$

**2.30.** *Фурье-анализ периодически повторяющегося прямоугольного импульса.* Если периодически хлопать в ладоши, то звуковое давление воздуха на ухо может быть описано как периодически повторяющийся прямоугольный импульс. Пусть функция $F(t)$ соответствует звуковому давлению. Положим, что $F(t)$ равно $+$ одной единице давления для короткого интервала $\Delta t$ и нулю до и после интервала $\Delta t$. Этот «прямоугольный импульс» единичной высоты и шириной $\Delta t$ периодически повторяется с периодом $T_1$. Короткий интервал $\Delta t$ определяет длительность звучания хлопка. Период $T_1$ — это время между двумя последовательными хлопками. Частота $\nu_1=T_1^{-1}$ является частотой хлопания. Выполните фурье-анализ заданной таким образом функции $F(t)$.

а) Покажите, что начало отсчета времени можно выбрать таким, что в разложении будут только косинусы аргумента $n\omega_1 t$, т. е.

$$F(t)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t.$$

б) Покажите, что $B_0=\Delta t/T_1$. Покажите, что

$$B_n=\frac{2}{n\pi}\sin(n\pi\nu_1\Delta t) \quad \text{для} \quad n=1, 2, \ldots$$

в) Покажите, что для $\Delta t \ll T_1$ «основной» тон $\nu_1$ и первые гармоники $2\nu_1$, $3\nu_1$, $4\nu_1$ и т. д. имеют практически одно и то же значение амплитуды $B_n$.

г) Постройте график зависимости $B_n$ от $n\nu_1$, переходя постепенно к достаточно большим $n$, так чтобы коэффициенты $B_n$ прошли через нуль два или три раза.

д) Покажите [по результатам пункта г)], что «наиболее важные» частоты (т. е. частоты, для которых $B_n$ имеет достаточно большие значения) занимают полосу от основной частоты $\nu_1$ до частоты порядка $1/\Delta t$. Обозначим частоту $1/\Delta t$ через $\nu_{max}$. Конечно, на самом деле в разложении нет максимальной частоты, так как ряды Фурье простираются до $n=\infty$. Однако наиболее важные частоты лежат между нулем и $\nu_{max}$. Этот «частотный диапазон» занимает «полосу», равную по величине примерно $\nu_{max}=1/\Delta t$. Вот частоты, имеющие наибольшее значение:

$$\nu=0, \ \nu_1, \ 2\nu_1, \ 3\nu_1, \ 4\nu_1, \ \ldots, \ \nu_{max}=1/\Delta t.$$

Соответствующий частотный диапазон $0<\nu<\nu_{max}$ обозначим через $\Delta\nu$. Тогда наш результат может быть записан в виде следующего соотношения:

$$\Delta\nu\,\Delta t \approx 1.$$

Оно справедливо не только для нашей функции $F(t)$, описывающей периодически



повторяющиеся прямоугольные импульсы длительностью $\Delta t$, но и для периодически повторяющихся импульсов любой формы, если $\Delta t$ мало по сравнению с периодом. В этом случае главные частоты будут равны $0$, $\nu_1$, $2\nu_1$, $3\nu_1$, ..., $1/\Delta t$. Если импульс не периодический, а одиночный, то оказывается (см. главу 6), что главные частоты спектра Фурье также лежат в полосе частот от нуля до $1/\Delta t$; но это — непрерывный спектр, а не только основная частота $\nu_1$ и ее гармоники.

Эта задача объясняет частотный спектр электромагнитного излучения, называемого *синхротронным*. Его источником является релятивистский электрон, совершающий равномерное круговое движение с частотой $\nu_1$. Можно показать (см. главу 7), что, если такое движение совершает нерелятивистский электрон, то он испускает электромагнитное излучение одной частоты $\nu_1$. Причина в том, что электрическое поле в излучении нерелятивистского электрона пропорционально той компоненте ускорения заряда, которая перпендикулярна радиусу-вектору от заряда к наблюдателю. При круговом движении эта проекция ускорения представляет собой гармоническое движение. Поэтому, для нерелятивистского электрона излучаемое поле пропорционально $\cos\omega t$ или $\sin\omega t$. Для релятивистского электрона временная зависимость излучаемого поля не определяется $\cos\omega_1 t$. Вместо этого интенсивность излучения сильно сконцентрирована по направлению мгновенной скорости заряда. Когда электрон движется прямо на наблюдателя, он испускает излучение, которое будет обнаружено наблюдателем позже. Излучение, испускаемое в другие моменты времени, не достигнет наблюдателя. Таким образом, электрическое поле, измеренное наблюдателем, имеет определенную величину в течение короткого интервала $\Delta t$ однажды за каждый период $T_1$ и будет близко к нулю в остальную часть периода. Поэтому наблюдаемый спектр состоит из частот $\nu_1=1/T_1$ и гармоник $2\nu_1$, $3\nu_1$ и т. д. до максимальной (главной) частоты, близкой к $1/\Delta t$. Покажите, что временной интервал $\Delta t$ определяется из приблизительного равенства $\Delta t/T_1 \approx \Delta\theta/2\pi$, где $\Delta\theta$ — «полная угловая ширина».

**2.31.** *Пилообразные стоячие волны в мелкой воде.* Волны в мелкой воде — это такие волны, у которых амплитуда движения воды на дне (сосуда, озера и океана) сравнима по величине с амплитудой на поверхности. Мода «омывания» (опыт 1.24) является волной на мелкой воде. Покажите это на опыте, добавив в воду некоторое количество кофейной гущи. Возбудите моду «омывания» (т. е. ту моду, при которой поверхность остается практически плоской) и наблюдайте за движением частиц кофе на дне и на поверхности вблизи центра сосуда и у стенок.

Теперь рассмотрим идеализированные *пилообразные стоячие волны в мелкой воде*. Рассмотрим два независимых сосуда одинаковой формы с одинаковой равновесной глубиной $h$, в которых происходят колебания, соответствующие моде «омывания». Сосуды прижимают друг к другу так, что если убрать разделяющие стенки, то получится один сосуд, длинная сторона которого совпадает с горизонтальной составляющей колебаний. Предположим, что относительная фаза колебаний воды такова, что вода в одном сосуде всегда движется в горизонтальном направлении, противоположном направлению движения воды в другом сосуде, так что вода достигает максимальной высоты одновременно на смежных или противоположных стенках.

Предположим, что мы убрали стенки, разъединяющие оба сосуда. Вода на граничной поверхности (когда были стенки) не имела горизонтальной составляющей движения. Когда мы убрали стенки, горизонтальная составляющая (в месте, где были стенки) не появится вследствие симметрии движения воды в двух сосудах. Движение будет продолжаться, как будто бы ничего не произошло! При желании к такой системе можно присоединить другие сосуды. В сосуде мы получили стоячую волну пилообразной формы, которую можно **аппроксимировать** синусоидальной волной. Заметим, что *длина одного сосуда равна одной полуволне.*

(Замечание. Если сделать фурье-анализ этой периодической функции от $z$, то первый (и основной) член разложения Фурье будет соответствовать нашей аппроксимирующей синусоидальной функции.) Используйте это приближение в формуле, которая определяет частоту моды «омывания» (см. опыт 1.24). Покажите, что имеет место равенство

$$\lambda\nu=\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{gh}=1{,}10\sqrt{gh}.$$

Мы видим, что *у этих волн нет дисперсии*. (Замечание. Оказывается, что точное дисперсионное соотношение для синусоидальных волн в мелкой воде имеет вид $\lambda\nu = \sqrt{gh}$. В результате нашего «пилообразного» приближения получается завышенная на 10% скорость распространения.)

Для *волн в глубокой воде* (когда равновесная глубина много больше длины волны) амплитуда волны экспоненциально падает с глубиной и уменьшается в $e=2{,}718$ раз при увеличении глубины на $\chi=\lambda/2\pi$. Величина $\chi$ называется приведенной длиной волны. В грубом приближении можно сказать, что волны в глубокой воде представляют собой нечто похожее на волны в мелкой воде для глубин от поверхности до эффективной глубины $h=\chi$, так как на таких глубинах амплитуда относительно велика и, грубо говоря, постоянна. Однако для глубин, значительно больших $\chi$, амплитуда очень мала. Таким образом, мы предполагаем, что дисперсионное соотношение для волн в глубокой воде может быть получено из дисперсионного соотношения для волн в мелкой воде заменой равновесной глубины $h$ на длину $\chi$ среднего ослабления амплитуды. Как мы покажем в главе 7, это предположение справедливо. Таким образом, дисперсионное соотношение для волн в глубокой воде имеет вид $\lambda\nu = \sqrt{g\chi}$.

**2.32.** *Фурье-анализ симметричных пилообразных импульсов.* Под симметричным пилообразным импульсом мы подразумеваем импульс с одинаковым наклоном переднего и заднего фронтов. Пусть координата $z=0$ соответствует вершине импульса. Покажите, что периодический пилообразный импульс можно представить рядом Фурье

$$f(z) = 0{,}82A\left[\cos k_1 z + \frac{1}{4}\cos 2k_1 z + \frac{1}{9}\cos 3k_1 z + \ldots\right],$$

где $k_1 = 2\pi/\lambda_1$, а $\lambda_1$ — расстояние между вершинами двух импульсов и $A$ — амплитуда импульсов. Амплитуда $n$-го члена в этом разложении пропорциональна $1/n^2$. Теперь можно оценить, сколь хорошим было приближение в задаче 2.31, где при выводе дисперсионного соотношения $\lambda\nu = 1{,}10\sqrt{gh}$ был принят во внимание лишь первый член разложения.

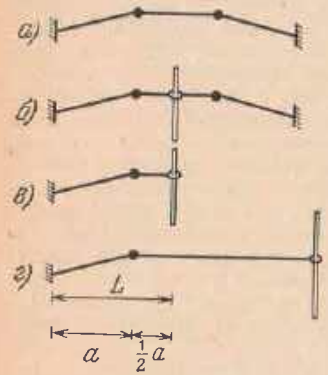


Рис. к задаче 2.34.

**2.33.** Опыт. *Моды поверхностного натяжения.* Круговые стоячие волны поверхностного натяжения легко наблюдать следующим образом. Наполните бумажную чашку до краев водой и затем добавьте еще чуть-чуть, чтобы вода слегка поднялась над краями (удерживаясь силой поверхностного натяжения). Слегка ударьте по чашке. Волны легко проследить, наблюдая за отражением неба от поверхности воды. Другой способ наблюдения: возьмите небольшой яркий источник света, поместите его на расстоянии около метра от поверхности и наблюдайте за узорами, появляющимися на дне чашки из-за того, что поверхностные волны действуют как линзы. Чтобы убедиться в том, что «работает» поверхностное натяжение, добавьте в воду небольшое количество спирта.

**2.34.** *Граничные условия на свободном конце струны.* Рассмотрите четыре различные системы, показанные на рисунке.

1. Покажите, что все они имеют одинаковую частоту колебаний для показанных мод.

2. Предположим, что вы хотите применить одну и ту же формулу для выбора волнового числа в случаях *в*) и *г*) и в случае *а*). Покажите, что $L$ в этой формуле (напишите ее) должно быть равно $^3/_2 a$.

**2.35.** Упругая струна длиной $L$ растянута между двумя опорами с равновесным натяжением $T$. Погонная масса струны $\rho$, так что вся масса струны равна $M=\rho L$. С помощью удара небольшому сегменту $a$ в центре струны сообщается поперечная скорость $v_0$, и в струне возбуждаются колебания. Вычислите амплитуду трех первых гармоник.



ГЛАВА 3

# ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

## 3.1. Введение

В предыдущих главах были рассмотрены свободные колебания. Здесь мы будем изучать *вынужденные* колебания различных систем. Это значит, что нас интересует поведение систем, к которым тем или иным способом приложена внешняя, зависящая от времени, сила. Без потери общности можно считать, что на систему действует синусоидальная внешняя сила. Нас интересует реакция (отклик) системы на это воздействие как функция частоты.

В п. 3.2 будут рассмотрены свободные колебания одномерного затухающего осциллятора. Затем мы изучим переходную характеристику такого осциллятора, выведенного из положения равновесия силой, изменяющейся по гармоническому закону. Мы обнаружим интересное явление «переходных биений» между внешней силой и переходным процессом свободных колебаний. Затем мы перейдем к установившимся колебаниям, которые совершает система после окончания переходного процесса. Мы рассмотрим также резонансную характеристику осциллятора, находящегося под действием внешней силы при медленном изменении ее частоты. В п. 3.3 мы будем изучать системы с двумя степенями свободы и обнаружим, что каждая мода свободных колебаний вносит свой вклад в вынужденное движение данного движущегося элемента. В частности, будет выведено очень простое соотношение, которое покажет, что движение данного элемента является суперпозицией независимых вкладов от каждой моды. В п. 3.4 мы обнаружим замечательные свойства системы с несколькими степенями свободы, находящейся под воздействием внешней силы, частота которой либо выше, либо ниже частоты самой низкой моды системы. В п. 3.5 мы обратимся к системе из многих связанных маятников, находящейся под внешним воздействием, и откроем существование экспоненциальных волн.

Все явления, рассмотренные в этой главе, можно изучить в простых домашних опытах со связанными маятниками. Для создания

внешней силы очень удобен проигрыватель. Банка консервов может служить грузом маятника, а «пружины» обеспечат связь между маятниками *).

### 3.2. Вынужденные колебания одномерного гармонического затухающего осциллятора

Этот вопрос был частично рассмотрен в 7-й главе I тома, где изучались свободные колебания и установившиеся вынужденные колебания затухающего осциллятора. (Эффект затухания иногда называют демпфированием, а сам осциллятор — демпфированным.) Мы рассмотрим также переходный процесс у гармонического осциллятора, первоначально находящегося в покое и подверженного действию гармонической внешней силы.

Рассмотрим точечную массу $M$, совершающую колебания в направлении $x$. Ее смещение от положения равновесия обозначим $x(t)$. На массу действует *возвращающая сила* — $M\omega_0^2 x(t)$, вызываемая пружиной с коэффициентом жесткости $K=M\omega_0^2$. Если на массу $M$ никакие другие силы не действуют, то она будет совершать гармонические колебания с угловой частотой $\omega_0$. Предположим, однако, что на массу действует еще *сила трения*, пропорциональная — $M\Gamma\dot{x}(t)$, где $\Gamma$ — коэффициент, который мы назовем *коэффициентом затухания, приходящимся на единицу массы*, или просто *коэффициентом затухания*. Кроме силы трения на массу действует *внешняя сила* $F(t)$. В этом случае второй закон Ньютона для массы $M$ имеет вид неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$M\ddot{x}(t) = -M\omega_0^2 x(t) - M\Gamma\dot{x}(t) + F(t). \tag{1}$$

Начнем с более простого случая, когда внешняя сила отсутствует.

*Затухание свободных колебаний.* Уравнение (1) можно переписать в виде

$$\ddot{x}(t) + \Gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \tag{2}$$

Будем искать решение $x_1(t)$ в виде

$$x_1(t) = e^{-1/2\, t/\tau}\cos(\omega_1 t + \theta), \tag{3}$$

где $\tau$, $\omega_1$ и $\theta$ неизвестны. Прямой подстановкой мы находим, что (3) является решением уравнения (2) для *любого* значения фазовой константы $\theta$ при условии, что

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \tag{4}$$

и

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2. \tag{5}$$

*) Почти во всех опытах «пружины» можно заменить резиновыми жгутами, слабыми пружинами или придумать другой способ связи. (*Прим. ред.*)



Наиболее общее решение уравнения (2) представляет собой суперпозицию двух линейно независимых решений с двумя произвольными константами, которые могут быть определены из начальных условий для смещения и скорости: $x_1(0)$ и $\dot{x}_1(0)$. Два линейно независимых решения можно получить, взяв два значения $\theta$, например, первое $\theta=0$ и второе $\theta=-\pi/2$. Таким образом, общее решение может быть записано в виде

$$x_1(t) = e^{-1/2\,\Gamma t}(A_1\sin\omega_1 t + B_1\cos\omega_1 t). \tag{6}$$

Константы $A_1$ и $B_1$ определяются из равенств $B_1 = x_1(0)$ и $\omega_1 A_1 = \dot{x}_1(0) + {}^1/_2\Gamma x_1(0)$, и уравнение (6) принимает вид

$$x_1(t) = e^{-1/2\,\Gamma t}\left\{x_1(0)\cos\omega_1 t + \left[\dot{x}_1(0) + \frac{1}{2}\Gamma x_1(0)\right]\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}\right\}. \tag{7}$$

Когда ${}^1/_2\Gamma$ мало по сравнению с $\omega_0$, колебания являются *слабо затухающими*. При ${}^1/_2\Gamma$, равном $\omega_0$, говорят, что движение происходит с *критическим затуханием*. Из уравнения (5) следует, что в этом случае частота $\omega_1$ равна нулю, и в решении (7) мы заменяем $\cos\omega_1 t$ на 1 и $\frac{1}{\omega_1}\sin\omega_1 t$ на $t$, так как предел $\frac{1}{\omega_1}\sin\omega_1 t$ при $\omega_1$, стремящемся к нулю, равен $t$.

Когда ${}^1/_2\Gamma$ больше $\omega_0$, говорят о *сильном затухании* осциллятора. В этом случае формула (5) дает отрицательное значение $\omega_1^2$. Это значит, что $\omega_1$ равно

$$\omega_1 = \pm i\,|\omega_1|, \quad |\omega_1| = \sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega_0^2}, \tag{8}$$

где $i=\sqrt{-1}$. Решение (7) остается справедливым и для этого случая. Оно может быть записано (задача 3.25) в виде

$$x_1(t) = e^{-1/2\,\Gamma t}\left\{x_1(0)\operatorname{ch}|\omega_1|t + \left[\dot{x}_1(0) + \frac{1}{2}\Gamma x_1(0)\right]\frac{\operatorname{sh}|\omega_1|t}{|\omega_1|}\right\}. \tag{9}$$

Мы ограничимся случаем *слабого затухания*, когда ${}^1/_2\Gamma$ меньше $\omega_0$. Если затухание очень слабо, т. е. ${}^1/_2\Gamma \ll \omega_0$, то экспоненциальный множитель $\exp(-{}^1/_2\Gamma t)$ можно считать постоянным в течение одного цикла колебаний. В этом случае скорость, с довольно хорошим приближением, будет равна производной выражения (6) по времени, причем множитель $\exp(-{}^1/_2\Gamma t)$ можно считать постоянным. Легко показать, что при этом энергия (кинетическая плюс потенциальная) почти постоянна в течение одного цикла колебаний, но уменьшается по экспоненте за интервал времени, включающий в себя много циклов:

$$E(t) = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2(t) + \frac{1}{2}M\omega_0^2 x_1^2(t) = E_0 e^{-\Gamma t} = E_0 e^{-t/\tau}, \tag{10}$$

где

$$E_0 = \frac{1}{2}M(\omega_1^2 + \omega_0^2)\left(\frac{1}{2}A_1^2 + \frac{1}{2}B_1^2\right). \tag{11}$$

Рассмотрим теперь осциллятор со слабым затуханием, на который действует внешняя сила $F(t)$, не равная нулю.

*Установившиеся колебания под действием гармонической внешней силы.* Очень большой класс функций $F(t)$ можно разложить в ряд Фурье по различным частотам $\omega$:

$$F(t) = \sum_{\omega} f(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]. \tag{12}$$

Например, в п. 2.3 мы показали, что любая «разумная» периодическая функция $F(t)$ допускает такое разложение. В главе 6 мы узнаем, что многие непериодические функции также можно представить в виде рядов или интегралов Фурье. Рассмотрим отдельную составляющую ряда Фурье для такой силы:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t. \tag{13}$$

Здесь нулевой момент времени выбран так, чтобы сделать фазовую константу равной нулю. Если мы будем знать, как найти $x(t)$ для такой гармонической внешней силы, мы легко найдем $x(t)$ для суперпозиции подобных сил, выраженной формулой (12). Действительно, в п. 1.3 было сказано, что для неоднородного линейного уравнения справедлив принцип суперпозиции. Он заключается в том, что решение, соответствующее суперпозиции различных внешних сил, представляет собой суперпозицию отдельных решений. Поэтому мы начнем с неоднородного уравнения с внешней силой в виде одной компоненты ряда Фурье:

$$M\ddot{x}(t) + M\Gamma\dot{x}(t) + M\omega_0^2 x(t) = F_0 \cos \omega t. \tag{14}$$

Мы хотим найти *решение* уравнения (14) *для установившегося состояния*. Установившееся состояние — это движение, совершаемое осциллятором под влиянием гармонической внешней силы, которая действует в течение значительно большего времени, чем постоянная времени $\tau$. В этом случае переходный процесс, который описывает поведение системы в течение интервала времени, равного нескольким $\tau$ после момента приложения внешней силы, уже закончился, и осциллятор совершает гармонические колебания с частотой вынуждающей силы $\omega$. При этом движении амплитуда колебаний пропорциональна амплитуде $F_0$ внешней силы, а фазовая постоянная определенным образом связана с фазовой постоянной внешней силы.

*Амплитуда дисперсии и амплитуда поглощения.* Вместо того, чтобы описывать колебания в терминах амплитуды и фазы, мы опишем их с помощью двух амплитуд $A$ и $B$, из которых первая определяет компоненту колебания $A\sin\omega t$, сдвинутую на 90° относительно внешней силы $F_0\cos\omega t$, а вторая — компоненту $B\cos\omega t$, которая находится в фазе с внешней силой. Таким образом, решение для установившегося состояния может быть записано в виде

$$x_s(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t. \tag{15}$$



Непосредственной подстановкой можно проверить, что $x_s(t)$ удовлетворяет уравнению (14) только в том случае, если

$$A = \frac{F_0}{M}\frac{\Gamma\omega}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2]} \equiv A_п, \tag{16}$$

$$B = \frac{F_0}{M}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2]} \equiv A_д. \tag{17}$$

Постоянная $A$ называется *амплитудой поглощения*, а постоянная $B$ — *амплитудой дисперсии* *). Эти названия амплитуд объясняются тем, что среднее по времени значение поглощенной осциллятором мощности определяется членом $A_п\sin\omega t$. Член $A_д\cos\omega t$ дает определенный вклад в мгновенное значение поглощаемой мощности $P(t)$, но в среднем за цикл установившихся колебаний его вклад равен нулю. Действительно, мгновенная мощность $P(t)$ равна произведению силы $F_0\cos\omega t$ на скорость $\dot{x}(t)$. Мгновенная скорость $\dot{x}(t)$ имеет две составляющие: одна — в фазе с внешней силой, другая сдвинута на 90°. Вклад в *среднее значение мощности* $P$ дает та составляющая скорости, которая находится в фазе с силой. Эта составляющая возникает от смещения $A_п\sin\omega t$, не находящегося в фазе с силой. Все сказанное можно записать в виде следующих формул:

$$F(t) = F_0\cos\omega t,$$
$$x_s(t) = A_п\sin\omega t + A_д\cos\omega t,$$
$$\dot{x}_s(t) = \omega A_п\cos\omega t - \omega A_д\sin\omega t.$$

Мгновенное значение мощности равно (в установившемся процессе)

$$P(t) = F(t)\,\dot{x}_s(t) = F_0\cos\omega t\,[\omega A_п\cos\omega t - \omega A_д\sin\omega t]. \tag{18}$$

Обозначая среднее по времени за один цикл скобками $\langle\ \rangle$, имеем

$$P = F_0\omega A_п\langle\cos^2\omega t\rangle - F_0\,\omega A_д\langle\cos\omega t\sin\omega t\rangle.$$

Но

$$\langle\cos^2\omega t\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\cos^2\omega t\,dt = \frac{1}{2}, \tag{19}$$

если $T$ — период колебаний. Аналогично

$$\langle\cos\omega t\sin\omega t\rangle = \frac{1}{2}\langle\sin 2\omega t\rangle = 0. \tag{20}$$

Таким образом, для среднего за период значения поглощаемой мощности в установившемся режиме имеем

$$P = \frac{1}{2}F_0\,\omega A_п. \tag{21}$$

*) Мы в дальнейшем будем придерживаться этого названия: $A_д$ — амплитуда дисперсии. (*Прим. ред.*)

Уравнение (21) показывает, что в установившемся режиме среднее за период значение поглощаемой мощности пропорционально амплитуде $A_п$ той части полного смещения $x_s(t)$, которая сдвинута на $90^\circ$ относительно внешней силы. Этот результат не зависит от выбора фазы возмущающей силы, т. е. от того, положили ли мы силу пропорциональной $\cos \omega t$ или $\cos(\omega t + \varphi)$.

В установившемся режиме среднее значение поглощаемой мощности равно среднему значению мощности, рассеиваемой из-за трения. Мгновенное значение силы трения равно $-M\Gamma\dot{x}(t)$. Мгновенное значение рассеиваемой мощности равно произведению силы трения на скорость. Нетрудно показать (сделайте это), что средняя мощность, расходуемая на трение, равна

$$P_{тр} = M\Gamma\langle\dot{x}_s^2\rangle = \frac{1}{2} M\Gamma\omega^2 [A_п^2 + A_д^2], \qquad (22)$$

а это выражение равно среднему значению поглощаемой мощности $P$, определяемой уравнением (21). (См. задачу 3.6.)

В установившемся режиме энергия, запасенная осциллятором, не является совершенно постоянной, так как мгновенное значение поглощаемой мощности $F(t)\dot{x}_s(t)$, определяемое уравнением (18), не равно мгновенному значению мощности $M\Gamma\dot{x}_s(t)$, рассеиваемой из-за трения. Только при усреднении по целому циклу поглощенная и рассеянная мощности равны. Нас интересует средняя величина запасенной энергии. Легко показать, что для установившихся колебаний средняя величина запасенной энергии, или просто средняя по времени энергия колебаний, равна

$$E = \frac{1}{2} M\langle\dot{x}_s^2\rangle + \frac{1}{2} M\omega_0^2\langle x_s^2\rangle = \frac{1}{2} M(\omega^2 + \omega_0^2)\left(\frac{1}{2} A_п^2 + \frac{1}{2} A_д^2\right). \qquad (23)$$

(См. задачу 3.10.) Заметим, что член с $\omega^2$ определяет среднее значение кинетической энергии, а член с $\omega_0^2$ — среднее значение потенциальной энергии. Обе энергии равны только в случае $\omega = \omega_0$ (напомним, что для свободных колебаний с малым затуханием средняя кинетическая и средняя потенциальная энергии равны). Качественно это можно объяснить следующим образом. Если $\omega$ велико по сравнению с $\omega_0$, то скорость массы $M$ изменит знак до того, как эта масса успеет сместиться на большое расстояние и соответственно запасти большую потенциальную энергию. С другой стороны, если $\omega$ мало по сравнению с $\omega_0$, скорость никогда не будет очень большой, и в этом случае среднее значение потенциальной энергии преобладает.

Заметим, что при $\omega = \omega_0$ запасенная энергия $E$ [уравнение (23)] равна произведению рассеиваемой в установившемся режиме мощности на постоянную времени свободных колебаний $\tau$. Качественно это легко понять: если убрать внешнюю силу, то из-за трения энергия колебаний будет экспоненциально убывать с постоянной времени $\tau$ [см. уравнение (10)]. Когда же к осциллятору приложена внешняя сила, частота которой равна собственной частоте колебаний осциллятора $\omega_0$, то амплитуда колебаний будет расти до



достижения установившегося режима, когда мощность, отдаваемая осциллятору, становится равной потерям мощности из-за трения. Так как бо́льшая часть энергии рассеивается из-за силы трения за время $\tau$, то можно считать, что энергия, запасенная осциллятором в установившемся режиме, равна энергии, отдаваемой внешней силой за время $\tau$. Таким образом, мы ожидаем, что в установившемся режиме запасенная энергия будет примерно равна входной мощности, умноженной на время $\tau$, что в свою очередь равно мощности сил трения, умноженной на $\tau$. (Если частота $\omega$ не равна $\omega_0$, то соотношение между входной мощностью и запасенной энергией будет более сложным.)

*Резонанс.* Будем теперь наблюдать за изменением отклика осциллятора на медленное изменение частоты приложенной силы. Пусть частота меняется так медленно, что в течение интервала времени, равного $\tau$, ее можно считать постоянной, и, таким образом, для каждого значения частоты осуществляется установившийся режим. Усредненное по времени значение входной мощности $P$ равно [см. уравнения (21) и (16)]

$$P = P_0 \frac{\Gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}, \qquad (24)$$

где $P_0$ — значение $P$ при резонансе, т.е. когда $\omega = \omega_0$. Максимального значения $P$ достигает при резонансе. Введем понятие о «точках половинной мощности». Это те значения частоты $\omega$, для которых $P$ равно половине максимального значения $P_0$. Покажите, что эти точки определяются выражением (см. задачу 3.11)

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \Gamma\omega, \qquad (25)$$

что эквивалентно равенству

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \pm \frac{1}{2}\Gamma. \qquad (26)$$

[Заметим, что уравнение (25) представляет собой два различных квадратных уравнения относительно $\omega$. Каждое из них имеет одно положительное и одно отрицательное решение. Оба положительных решения даны формулой (26).] Интервал частот между двумя точками половинной мощности называется *«шириной» резонансной кривой* *) и обозначается $(\Delta\omega)_{рез}$. В соответствии с уравнением (26) имеем

$$(\Delta\omega)_{рез} = \Gamma. \qquad (27)$$

Мы знаем [см. уравнение (4)], что затухание свободных колебаний характеризуется постоянной времени $\tau$, равной $1/\Gamma$. Таким образом, мы пришли к очень важному соотношению между шириной резонансной кривой *вынужденных* колебаний и постоянной времени затухания *свободных* колебаний:

$$\boxed{(\Delta\omega)_{рез}\,\tau_{своб} = 1}, \qquad (28)$$

*) Иногда для краткости будем называть эту величину «шириной резонанса».

т. е. *ширина резонансной кривой вынужденных колебаний равна обратной величине постоянной времени затухания свободных колебаний*. Это очень общий результат. Позже мы увидим, что он справедлив и для систем со многими степенями свободы. В этих случаях резонансы возникают на частотах, соответствующих нормальным модам свободных колебаний без затухания, так же как и для одномерного осциллятора. [Резонансная частота $\omega_0$ равна частоте свободных колебаний $\omega_1$ только в случае, когда постоянная затухания $\Gamma$ равна нулю. При затухающих свободных колебаниях частота смещается от $\omega_0$ к $\omega_1$ из-за наличия члена $\exp(-{}^1/_2\Gamma t)$. Для вынужденных колебаний амплитуда постоянна и резонансной частотой является частота свободных колебаний при отсутствии трения.] В случае нескольких степеней свободы ширина резонанса и постоянная времени свободных колебаний для каждой моды удовлетворяют уравнению (28), если сами резонансы достаточно удалены друг от друга по частоте и не перекрываются.

Уравнение (28) имеет большое практическое значение. Часто экспериментально гораздо легче изучить поведение системы вблизи резонанса, чем наблюдать время затухания. В этом случае, определив $\Delta\omega$, по уравнению (28) легко найти $\tau$.

Пример 1. *Время затухания для картонной трубки*. Попытаемся применить уравнение (28) к системе со многими степенями свободы. Возьмем картонную трубку, внезапно возбудим ее ударом и предоставим колебаниям свободно затухать. Удар возбудит главным образом самую низкую моду, для которой длина трубки равна половине длины волны. Система начнет колебаться. С концов трубки происходит испускание звуковой энергии, кроме того, некоторое ее количество теряется из-за «трения» воздуха о стенки трубки (т. е. звуковая энергия переходит в тепло). Таким образом, мы имеем затухающие колебания. Спрашивается, какова постоянная времени затухания этих колебаний? Ваше ухо легко различит преобладающую частоту. Ту же частоту вы услышите, если постоянно дуть в конец трубки. Однако время затухания в этой системе слишком мало, чтобы его можно было измерить на слух. Есть две возможности. Возьмите микрофон, усилитель звуковой частоты и осциллограф. Включите развертку осциллографа в момент возбуждения колебаний и выход усилителя подайте на вертикальные пластины. (В хорошем осциллографе развертка может включаться внешним сигналом.) Сфотографировав след на экране осциллографа, вы можете прямо измерить $\tau$. Однако это можно сделать и иначе. Подайте выходное напряжение звукового генератора на небольшой громкоговоритель, установленный около одного конца трубки. В трубке возникнут установившиеся вынужденные колебания, частота которых будет задана звуковым генератором. Установите микрофон у другого конца трубки и измерьте с его помощью звуковое излучение с этого конца. Выход микрофона подайте на осциллограф, на экране которого можно будет измерить амплитуду звуковых колебаний. Теперь измените частоту генератора и т. д. Экспериментально может оказаться проще работать при постоянной частоте звукового генератора, но менять длину трубки. Нарисуйте зависимость квадрата амплитуды от величины, обратной длине трубки (почему обратной?). Найдите точки половинной мощности; они определят $\Delta\omega$. Используя уравнение (28), найдите $\tau$.



Можно неплохо обойтись и без этих приборов. Возьмите камертон и пять или шесть одинаковых трубок, отличающихся только длиной. Быстро пронесите камертон мимо входных отверстий ваших труб и попытайтесь оценить ширину резонанса. Вы должны найти способ различать интенсивности данного тона, отличающиеся в два раза. Во всяком случае этим методом можно грубо оценить порядок $\Delta\omega$. Для времени затухания колебаний трубки автор получил таким образом значение, лежащее в пределах 20—50 *мсек*. (См. домашний опыт 3.27.)

*Зависимость амплитуды дисперсии от частоты*. Составляющая $A_0\cos\omega t$ является той частью решения $x_s(t)$ для установившихся колебаний, которая находится *в фазе* с возмущающей силой $F_0\cos\omega t$. Как указывалось выше, дисперсионная составляющая не дает никакого вклада в среднюю величину поглощаемой энергии. Более того, при резонансе (т. е. когда $\omega=\omega_0$) $A_д$ равно нулю. Это не значит, что дисперсионную составляющую смещения можно не рассматривать. При частотах внешнего возмущающего воздействия, далеких от резонансной частоты, дисперсионная составляющая преобладает. Это видно из следующего. Амплитуда дисперсии [см. равенство (17)] равна

$$A_д = \frac{F_0}{M}\,\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}\,. \tag{29}$$

Отношение амплитуды дисперсии и амплитуды поглощения следует из формул (16) и (17):

$$\frac{A_д}{A_п} = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\Gamma\omega}\,. \tag{30}$$

Для $\omega$, меньших $\omega_0$, это отношение положительно и может оказаться сколь угодно большим, если $\omega$ достаточно мало. Для $\omega$, бо́льших $\omega_0$, отношение $A_д/A_п$ отрицательно и также может быть сколь угодно большим. Для обоих случаев $\Gamma\omega \ll |\omega_0^2-\omega^2|$, и мы можем пренебречь вкладом члена $A_п\sin\omega t$ в $x_s(t)$, если мы готовы пренебречь небольшим значением средней мощности. (Вдали от резонанса поглощаемая мощность очень мала по сравнению с мощностью, поглощаемой при резонансе.) Таким образом, вдали от резонанса установившееся решение будет определяться членом $A_д\cos\omega t$:

$$x_s(t) \approx A_д\cos\omega t \approx \frac{F_0\cos\omega t}{M(\omega_0^2-\omega^2)}\,. \tag{31}$$

Величина $A_д$ в этой формуле взята из выражения (29), где мы пренебрегли членом $\Gamma^2\omega^2$ в знаменателе. Заметим, что в окончательный результат не входит коэффициент затухания $\Gamma$. В частности, легко

видеть, что смещение (31) является точным решением уравнения (14) для установившегося процесса при $\Gamma=0$ (см. задачу 3.13).

На рис. 3.1 показаны амплитуда поглощения и амплитуда дисперсии в окрестности резонанса.

*Другие «резонансные кривые».* Поведение гармонического осциллятора, находящегося под действием внешней силы, можно описать различными величинами, которые имеют подобные (но не одинаковые) «формы кривой резонанса», т. е. зависимости от частоты. Такими величинами являются амплитуда поглощения $A_п$,

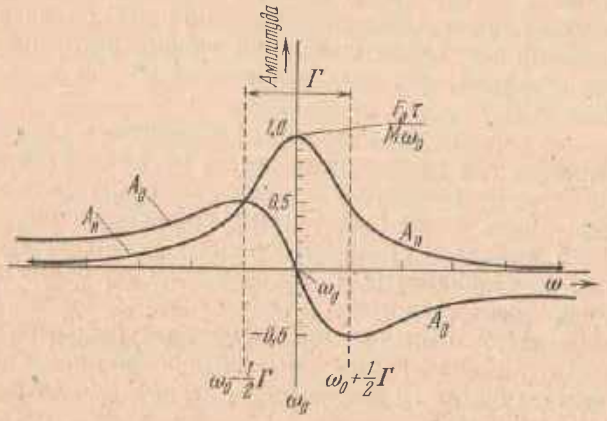



Рис. 3.1. Резонанс вынужденных колебаний. Если на осциллятор действует внешняя сила $F_0\cos\omega t$, то в установившемся состоянии $x_s(t)=A_п\sin\omega t+A_д\cos\omega t$.

сумма квадратов амплитуд $|A|^2\equiv A_д^2+A_п^2$, входная мощность $P$ (которая равна рассеиваемой мощности) и запасенная энергия $E$. Выпишем все эти величины для сравнения. Из уравнения (16), (17), (22) и (23) имеем

$$A_п(\omega)=A_п(\omega_0)\frac{\Gamma^2\omega_0\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{32}$$

$$|A(\omega)|^2=|A(\omega_0)|^2\frac{\Gamma^2\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{33}$$

$$P(\omega)=P(\omega_0)\frac{\Gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{34}$$

$$E(\omega)=E(\omega_0)\frac{{}^1/_2\,\Gamma^2(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}. \tag{35}$$

Все эти величины имеют одинаковый «резонансный знаменатель» $D$, равный

$$D\equiv(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2=(\omega_0-\omega)^2(\omega_0+\omega)^2+\Gamma^2\omega^2.$$

Около резонанса быстрое изменение $D$ почти полностью вызвано множителем $(\omega-\omega_0)^2$ в первом члене этого выражения. Присутст-



вие $\omega$ в другом члене выражения для $D$, а также в числителях написанных выше четырех величин играет меньшую роль. Теперь мы видим, что амплитуда поглощения и другие величины, написанные выше, относительно важны только «около» резонанса. («Около» можно довольно условно определить как интервал $\omega_0-10\Gamma<\omega<\omega_0+10\Gamma$.) В этом диапазоне (т. е. около резонанса) и для случая слабого затухания (т. е. при $\Gamma\ll\omega_0$) мы получим очень хорошее приближение, положив $\omega$ равным $\omega_0$ в выражении для $D$ всюду, за исключением разностного множителя $(\omega_0-\omega)^2$. Выражение для $D$ примет вид

$$D\approx(\omega_0-\omega)^2(\omega_0+\omega_0)^2+\Gamma^2\omega_0^2=4\omega_0^2[(\omega_0-\omega)^2+({}^1/_2\,\Gamma)^2].$$

Такое же приближение $\omega=\omega_0$ можно сделать и в числителях написанных выше четырех величин. Тогда все они примут одну и ту же форму, которую обозначим через $R$:

$$R(\omega)\equiv\frac{({}^1/_2\,\Gamma)^2}{(\omega_0-\omega)^2+({}^1/_2\,\Gamma)^2}. \tag{36}$$

[Мы выбрали коэффициент пропорциональности таким, чтобы $R(\omega_0)=1$.] Заметим, что $R(\omega)$ — четная функция $(\omega_0-\omega)$, т. е. она симметрична относительно резонансной частоты. Легко видеть, что полная «ширина» этой функции на половине максимума $R(\omega)$ равна $\Gamma$, так же как и в случае точного выражения для полной ширины на половине максимального значения мощности.

В оптике частотная зависимость вида $R(\omega)$ называется «лоренцевской формой линии». В ядерной физике $R(\omega)$ называется «резонансной кривой Брейта — Вигнера». В этом случае $\omega_0$ и $\omega$ заменяют соответственно на $E_0=\hbar\omega_0$ и $E=\hbar\omega$. Точные резонансные кривые имеют более сложную форму, чем $R(\omega)$, как в оптике, так и в ядерной физике и даже, как мы это только что видели, для гармонического осциллятора.

*Переходный режим вынужденных колебаний.* Мы хотим найти общее решение дифференциального уравнения для затухающего гармонического осциллятора, находящегося под действием внешней гармонической силы, при заданных произвольных начальных условиях $x(0)$ и $\dot{x}(0)$. Общее решение является суперпозицией частного решения для установившегося состояния $x_s(t)$ и общего решения $x_1(t)$ однородного уравнения движения (уравнения свободных колебаний):

$$x(t)=x_s(t)+x_1(t)=A_п\sin\omega t+A_д\cos\omega t+$$
$$+\exp(-{}^1/_2\,\Gamma t)[A_1\sin\omega_1 t+B_1\cos\omega_1 t]. \tag{37}$$

Здесь произвольные константы $A_1$ и $B_1$ выбираются такими, чтобы удовлетворить начальным условиям для смещения и скорости. Уравнение (37) является общим решением: во-первых, оно удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению и, во-вторых, справедливо для любых начальных условий $x(0)$ и $\dot{x}(0)$. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что решение, отвечающее таким требованиям, является единственным.

*Осциллятор, первоначально находившийся в покое.* Рассмотрим, какой вид примет наше общее решение, если при $t=0$ *осциллятор находится в положении равновесия.* Начальное условие $x(0)=0$ дает $B_1=-A_д$. Теперь найдем $A_1$ из условия, что начальная скорость $\dot{x}(0)$ равна нулю. Нас интересует случай слабого затухания, поэтому будем считать, что множитель $\exp(-{}^1/_2\Gamma t)$ практически не меняется в течение любого данного цикла колебаний. Используя это приближение, легко показать, что $\dot{x}(0)\approx\omega A_п+\omega_1 A_1$. Так как нас интересуют частоты возмущающей силы вблизи частоты резонанса, то мы просто положим $A_1=-A_п$. Тогда

$$\dot{x}(0)\approx(\omega-\omega_1)A_п. \tag{38}$$

Это выражение равно нулю либо при $\omega=\omega_1$, либо при $A_п=0$ (т. е. для $\Gamma=0$). Сделав такой выбор констант, мы имеем $x(0)=0$ и $\dot{x}(0)=0$. Решение (37) примет вид

$$x(t)=A_п[\sin\omega t-\exp(-{}^1/_2\Gamma t)\sin\omega_1 t]+ \\ +A_д[\cos\omega t-\exp(-{}^1/_2\Gamma t)\cos\omega_1 t]. \tag{39}$$

Ниже рассмотрены некоторые интересные частные случаи.

Случай 1. *Частота возмущающей силы равна собственной частоте колебаний.* Положив $\omega=\omega_1$ в выражении (39), получим

$$x(t)=[1-\exp(-{}^1/_2\Gamma t)]\,[A_п\sin\omega t+A_д\cos\omega t]= \\ =[1-\exp(-{}^1/_2\Gamma t)]\,x_s(t), \tag{40}$$

где $x_s(t)$ — решение для установившего режима. Таким образом, когда частота внешней силы совпадает с частотой собственных колебаний $\omega_1$, установившееся решение как бы «существует сначала» с амплитудой колебаний, которая монотонно возрастает от нуля до своего конечного установившегося значения.

Случай 2. *Отсутствие затухания и бесконечные биения.* Положив $\Gamma=0$, получим $A_п=0$ и

$$A_д=\frac{F_0/M}{\omega_0^2-\omega^2}.$$

Тогда решение (39) принимает вид

$$x(t)=\frac{F_0}{M}\frac{[\cos\omega t-\cos\omega_0 t]}{(\omega_0^2-\omega^2)}, \tag{41}$$

что означает суперпозицию двух гармонических колебаний. С таким явлением мы встречались при рассмотрении биений от двух камертонов в п. 1.5. Напомним, что линейную суперпозицию двух гармонических колебаний (41) можно представить как «почти гармоническое» колебание с «быстрой» средней частотой $\omega_{ср}={}^1/_2(\omega_0+\omega)$ и медленно меняющейся амплитудой, которая совершает гармонические колебания с «медленной» частотой модуляции $\omega_{мод}={}^1/_2(\omega_0-\omega)$. В последнем представлении мы получаем

$$x(t)=A_{мод}(t)\sin\omega_{ср}t, \tag{42}$$





$$A_{мод}(t)=\frac{F_0}{M}\frac{2\sin[{}^1/_2(\omega_0-\omega)t]}{(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{43}$$

Амплитуда колебаний изменяется с частотой модуляции ${}^1/_2(\omega_0-\omega)$. Запасенная энергия $E(t)$ колеблется относительно среднего положения от нуля до максимального значения $E_0$:

$$E(t)=E_0\sin^2[{}^1/_2(\omega_0-\omega)t]={}^1/_2E_0[1-\cos(\omega_0-\omega)t]. \tag{44}$$

Таким образом, энергия колеблется с частотой биений, равной разности между частотой внешней силы и собственной частотой.

Чтобы наблюдать «почти бесконечные» биения, подвесьте банку консервов на струне длиной около 45 *см*. Свяжите полученный маятник с помощью резинового жгута с краем диска проигрывателя, включенного на скорость 45 *об/мин*.

Для особого случая $\omega=\omega_0$ из равенства (43) следует, что амплитуда быстрых колебаний линейно растет со временем; это соответствует бесконечному периоду биений:

$$x(t)=\left[\frac{1}{2}\frac{F_0 t}{M\omega_0}\right]\sin\omega_0 t. \tag{45}$$

Амплитуда станет бесконечной через бесконечно долгое время.

Случай 3. *Процесс установления биений.* Для слабо затухающих колебаний и для частоты $\omega$, близкой к $\omega_1$, нетрудно показать, что величина запасенной энергии приблизительно равна (задача 3.24)

$$E(t)=E[1+\exp(-\Gamma t)-2\exp(-{}^1/_2\Gamma t)\cos(\omega-\omega_1)t], \tag{46}$$

где $E$ — энергия в установившемся режиме. (Если положить $\omega=\omega_1$, то получим случай 1, рассмотренный выше; если положить $\Gamma=0$, получим случай 2.) Отсюда следует, что если процесс начинается при $t=0$ с отсутствия в осцилляторе запасенной энергии, то она не будет плавно увеличиваться до своего установившегося значения (если только $\omega$ не равно частоте свободных колебаний $\omega_1$). Вместо этого энергия будет совершать колебания с частотой $\omega-\omega_1$. Эти биения обусловлены тем, что осциллятору «больше нравится» совершать колебания со своей собственной частотой $\omega_1$, когда на него действуют с частотой $\omega$. Поэтому вынуждающая сила иногда оказывается в фазе с совершаемыми колебаниями, что увеличивает их амплитуду, а иногда в противофазе, что уменьшает амплитуду. Если нет затухания, то эти биения будут соответствовать случаю 2. Однако из-за затухания фаза колебаний осциллятора постепенно приспособится к фазе внешней силы и примет определенное значение. По истечении довольно долгого промежутка времени осциллятор будет совершать установившиеся колебания с частотой возмущающей силы $\omega$ без биений. Относительная фаза колебаний осциллятора и внешней силы примет постоянное значение, при котором величина энергии, получаемая осциллятором в каждом цикле колебаний,

будет в точности равна потерям энергии на трение за цикл. Теперь энергия осциллятора будет постоянна и относительная фаза колебаний осциллятора и внешней силы будет также постоянной. Переходный процесс для энергии показан на рис. 3.2.

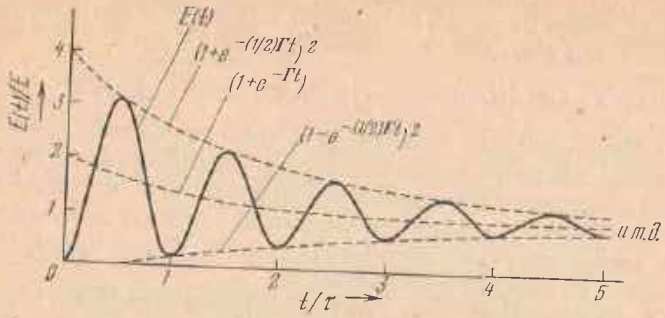



Рис. 3.2. Переходные биения. (Мы выбрали период биений, равный времени затухания $\tau$.) Запасенная энергия $E(t)$ растет от нуля и испытывает затухающие колебания с частотой биений (равной разности частот вынуждающей силы и свободных колебаний), постепенно приближаясь к энергии $E$ установившегося состояния.

*Качественная оценка формы резонансной кривой.* Теперь, зная характер переходного процесса, попытаемся оценить отношение амплитуды в установившемся режиме при частоте резонанса к амплитудам при других частотах. Пусть осциллятор, сначала неподвижный, подвергается действию вынуждающей силы на резонансной частоте. Если нет затухания, амплитуда колебаний будет линейно возрастать в соответствии с уравнением (45). В действительности же она *будет возрастать* линейно лишь вначале, потому что в первый момент средняя скорость мала и соответственно затухание незначительно. Однако в конце концов рост амплитуды прекратится на уровне, которого она достигнет за время порядка $\tau$. Из-за затухания амплитуда будет поддерживаться на этом уровне. Мы можем оценить эту амплитуду, имея в виду, что максимальная сила $F_0$, действующая на массу $M$, за время $\tau$ сообщит ей максимальный импульс силы $F_0\tau$. Но по второму закону Ньютона максимальный импульс равен произведению массы $M$ на максимальную скорость $\omega_0 A(\omega_0)$. Таким образом, $F_0\tau \approx M\omega_0 A(\omega_0)$ и

$$A(\omega_0) \approx \frac{F_0\tau}{M\omega_0}. \qquad (47)$$

Это — оценка амплитуды в установившемся режиме, когда $\omega = \omega_0$.

Пусть теперь частота вынуждающей силы $\omega$ сильно отличается от $\omega_0$. Если нет затухания, то амплитуда будет колебаться с частотой модуляции $^1/_2(\omega_0 - \omega)$, а энергия осциллятора будет колебаться с частотой биений $\omega_0 - \omega$. «Включим» затухание. Потери энергии на трение пропорциональны квадрату скорости. Поэтому, когда энергия максимальна, затухание самое большое. Когда энергия равна нулю, затухания нет. Таким образом, затухание стремится «обре-



зать вершины холмов» на графике зависимости энергии от времени. (Затухание стремится также «засыпать долины».) В конце концов биения будут погашены. Допустим, что амплитуда при наличии затуханий равна половине амплитуды, которая существует при биениях, и поэтому заменим $\sin[^1/_2(\omega_0 - \omega)t]$ в уравнении (43) на $^1/_2$. Тогда для частоты, сильно отличающейся от частоты $\omega_0$, имеем согласно выражению (43)

$$A(\omega) \approx \frac{F_0}{M}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (48)$$

Нетрудно догадаться, что амплитуда $A(\omega)$ может быть связана с максимальным импульсом, который получен от силы $F_0$ за некоторую часть $f$ одного периода биений. Этот импульс силы равен произведению массы на амплитуду $A(\omega)$ и на среднюю угловую частоту $^1/_2(\omega_0 + \omega)$. Период биений $T$ равен $2\pi/(\omega_0 - \omega)$. Таким образом, имеем

$$\frac{F_0 f\, 2\pi}{\omega_0 - \omega} \approx MA(\omega)\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega).$$

Если положить $f = 1/(4\pi)$, мы приходим к равенству (48).

Из точного решения нам известно, что при резонансе амплитуда колебаний равна $A_в(\omega_0)$, так как амплитуда $A_д$ в этом случае равна нулю. В самом деле, наша «угаданная» амплитуда $A(\omega_0)$ равна $A_в(\omega_0)$, что легко видеть, сравнив уравнения (47) и (16). Мы также знаем, что вдали от резонанса точное решение дает для амплитуды колебаний значение $A_д(\omega)$. Наше «угаданное» значение амплитуды $A(\omega)$ вдали от $\omega_0$ совпадает с $A_д(\omega)$, что видно из уравнений (48) и (17).

## 3.3. Резонансы в системе с двумя степенями свободы

В главе 1 было показано, что поведение каждой моды свободно колеблющейся системы со многими степенями свободы похоже на поведение простого гармонического осциллятора. Основное различие заключается в том, что система, а следовательно, и соответствующий «гармонический осциллятор» занимают определенную область пространства, а не сосредоточены в точке. Таким образом, в случае многомерной системы каждая мода характеризуется определенной геометрической формой.

В главе 1, изучая моды свободно колеблющихся систем, мы пренебрегали трением. Можно предполагать, что с учетом трения каждая мода становится подобной затухающему одномерному осциллятору. Действительно, каждая мода имеет свой собственный механизм затухания и, соответственно, свой собственный коэффициент затухания $\Gamma$ и свою собственную постоянную времени $\tau$. В некоторых системах механизм затухания может быть связан с определенными «движущимися элементами», и поэтому все моды могут иметь приблизительно одинаковую постоянную затухания и одинаковые постоянные времени. Примером такой ситуации является система

из двух одинаковых маятников, связанных пружиной, в которой затухание существует либо для каждой нити подвеса, либо для каждой массы. Так как в каждой моде движения обоих маятников одинаковы, то обе моды такой системы будут иметь одинаковую постоянную времени. В других системах механизм затухания может зависеть от моды. Например, пружина, связывающая два маятника (см. пример 13, глава 1), может иметь трение, возникающее при смещении ее витков, что будет создавать затухания для колебаний, связанных с растяжением или сжатием. Если это единственный механизм затухания, то мода 2 (мода, при которой пружина сжимается и разжимается) будет иметь значительно бо́льшую постоянную затухания, чем мода 1, когда длина пружины постоянна, т. е. $\Gamma_2 \gg \Gamma_1$, и поэтому $\tau_2 \ll \tau_1$.

Когда система, имеющая несколько мод, находится под действием внешней силы, то резонанс наступает всякий раз, когда частота внешнего воздействия становится равной частоте моды. Оказывается, что *амплитуда поглощения и амплитуда дисперсии для данного движущегося элемента являются суперпозицией вкладов амплитуд от каждого резонанса* (отвечающего определенной моде свободной системы). Каждый из этих вкладов имеет форму, подобную найденной нами в п. 3.2 для системы с одной степенью свободы.

Медленно меняя частоту возмущающего воздействия и измеряя мощность, поглощаемую данным движущимся элементом, как функцию частоты $\omega$, мы обнаружим резонанс всякий раз, когда $\omega$ находится вблизи частоты моды. (Мы будем использовать выражения «резонансная частота» и «частота моды» как взаимозаменяемые выражения, хотя первое относится к случаю вынужденных колебаний, а второе — к свободным колебаниям.) Каждому резонансу соответствует ширина резонансной кривой [см. (28)]

$$\Delta\omega = \Gamma = 1/\tau.$$

Здесь $\Delta\omega$ — полная ширина, соответствующая половине максимального значения поглощаемой мощности, а $\Gamma$ и $\tau$ — соответственно постоянная затухания и постоянная времени для свободных колебаний отдельной моды. Это соотношение справедливо, если затухание мало и если интервал частот между отдельными резонансами больше ширины резонанса. В этом случае в области любого резонанса основной вклад в амплитуду поглощения дает только одна мода. Однако оказывается, что для амплитуды дисперсии мы не можем пренебречь вкладом от каждой моды. (См. задачу 3.20).

Пример 2. *Вынужденные колебания двух связанных маятников.* Наша система показана на рис. 3.3 и описана в домашнем опыте 3.8 (где гири маятника — это банки консервов, пружина — это «пружина», внешняя сила создается резиновым жгутом длиной около 3 *м*, соединяющим систему с диском проигрывателя, а затухание вызвано трением струн, на которых подвешены банки консервов, о какой-нибудь предмет). Для простоты положим, что каждый маятник имеет одинаковую постоянную затухания $\Gamma$. В этом случае уравнения движения примут вид

$$M\ddot{\psi}_a = -\frac{Mg}{l}\psi_a - K(\psi_a - \psi_b) - M\Gamma\dot{\psi}_a + F_0\cos\omega t, \qquad (49)$$

$$M\ddot{\psi}_b = -\frac{Mg}{l}\psi_b + K(\psi_a - \psi_b) - M\Gamma\dot{\psi}_b. \qquad (50)$$

Мы рассматривали свободные колебания такой системы при отсутствии затухания и знаем, что если $F_0$ и $\Gamma$ равны нулю, то моды определяются следующим образом:

мода 1: $\psi_a = \psi_b$, $\omega_1^2 = g/l$, $\psi_1 = {}^1/_2(\psi_a + \psi_b)$, (51)

мода 2: $\psi_a = -\psi_b$, $\omega_2^2 = g/l + 2K/M$, $\psi_2 = {}^1/_2(\psi_a - \psi_b)$, (52)

где $\psi_1$ и $\psi_2$ — нормальные координаты.

*Каждая мода ведет себя как осциллятор под действием внешней силы.* Перейдем к нормальным координатам $\psi_1$ и $\psi_2$. Сложив уравнения (49) и (50), получим

$$M\ddot{\psi}_1 = -\frac{Mg}{l}\psi_1 - M\Gamma\dot{\psi}_1 + \frac{1}{2}F_0\cos\omega t. \qquad (53)$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим

$$M\ddot{\psi}_2 = -M\left[\frac{g}{l} + \frac{2K}{M}\right]\psi_2 - M\Gamma\dot{\psi}_2 + \frac{1}{2}F_0\cos\omega t. \qquad (54)$$

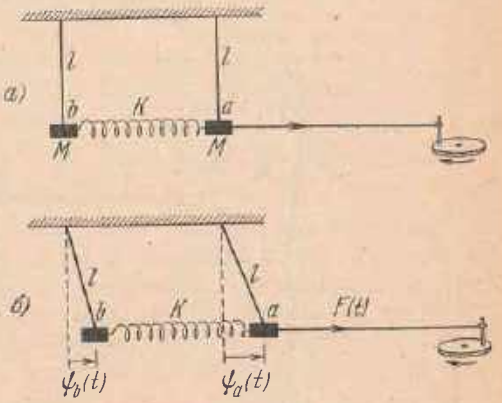



Рис. 3.3. Вынужденные колебания связанных маятников.
*а)* Равновесие; *б)* общий случай.

Заметим, что уравнения (53) и (54) не связаны (независимы). Сравнивая уравнение (1) с уравнениями (53) и (54), мы видим, что два последних являются уравнениями гармонического осциллятора с затуханием, находящегося под действием внешней силы. Таким образом, нормальная координата $\psi$, ведет себя как простой гармонический осциллятор с массой $M$, с коэффициентом жесткости пружины $M\omega_1^2$ и коэффициентом затухания $\Gamma$, находящийся под внешним воздействием ${}^1/_2 F_0\cos\omega t$. Нормальная координата $\psi_2$ ведет себя аналогичным образом, имея соответствующие параметры: $M$, $M\omega_2^2$, $\Gamma$ и ${}^1/_2 F_0\cos\omega t$. Эти колебания *независимы*, так что мы можем написать установившиеся решения $\psi_1$ и $\psi_2$ отдельно. Каждая мода ведет себя как одномерный осциллятор, поэтому каждая мода имеет свои собственные амплитуду поглощения, амплитуду дисперсии и резонансную частоту, соответствующую частоте моды, точно так же, как в случае одномерного осциллятора.

*Движение каждого элемента является суперпозицией отдельных мод, совершающих вынужденные колебания.* Рассмотрим движение двух элементов $a$ и $b$ нашей системы. В соответствии с уравнениями (51) и (52) имеем

$$\psi_a = \psi_1 + \psi_2, \quad \psi_b = \psi_1 - \psi_2. \tag{55}$$

Из уравнений (55) следует, что амплитуда поглощения для элемента $a$ представляет собой сумму соответствующих амплитуд обеих мод. Амплитуда поглощения для элемента $b$ представляет собой разность амплитуд поглощения двух мод. То же можно сказать и об амплитудах дисперсии для элементов $a$ и $b$; они соответственно равны сумме и разности амплитуд дисперсии обеих мод.

Когда частота внешнего воздействия равна частоте одной из мод, элементы $a$ и $b$ движутся так, как если бы их колебания принадлежали этой моде (при свободных колебаниях).

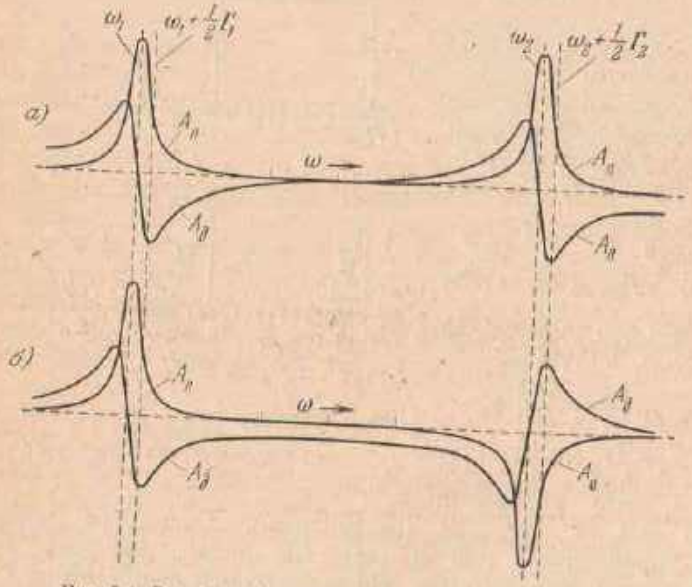



Рис. 3.4. Резонанс в системе с двумя степенями свободы.

Графики изображают зависимость от частоты амплитуды поглощения и амплитуды дисперсии для (а) маятника, непосредственно связанного с вынуждающей силой, и (б) для маятника, удаленного от точки приложения вынуждающей силы. Расстояние между резонансными частотами выбрано равным тридцатикратному значению полуширины $\frac{1}{2}\Gamma$ резонансной кривой, одинаковой для каждой моды.

На рис. 3.4 показаны графики амплитуды поглощения и амплитуды дисперсии для $\psi_a$ и $\psi_b$.

Из этого примера видно, что установившаяся амплитуда каждого движущегося элемента может быть представлена суперпозицией вкладов от каждого резонанса, т. е. от каждой моды свободно колеблющейся системы. Каждый вклад (каждая составляющая) в этой суперпозиции соответствует вынужденным колебаниям осцилля-



торы одной из мод. Вклад каждой моды зависит от того, каким образом к системе приложена внешняя сила. Для случая, показанного на рис. 3.3, мы нашли, что каждый движущийся элемент получает одинаковый вклад (с точностью до знака) от каждой моды. Однако, привязав резиновый жгут к центру пружины, мы не получили бы одинакового вклада от обеих мод. Таким образом, вклад каждой моды зависит от способа приложения силы.

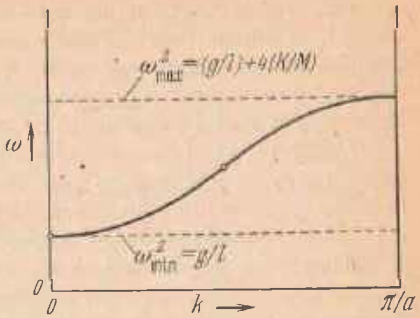



Рис. 3.5. Дисперсионное соотношение для связанных маятников.

Две точки соответствуют двум резонансам системы двух связанных маятников. Резонансы в аналогичных системах из большего числа связанных маятников будут представлены точками на той же кривой. Число точек равно числу резонансов, которое в свою очередь равно числу мод свободных колебаний.

*Вынужденные колебания системы из многих связанных маятников.* Положим, что вместо двух маятников, мы имеем целую группу таких связанных маятников, расположенных вдоль прямой. Если к системе приложить внешнюю гармоническую силу и менять ее частоту так медленно, чтобы все время существовал установившийся режим, то мы будем наблюдать резонанс всякий раз, когда частота внешнего воздействия будет равна частоте одной из мод. (Конечно, внешняя сила может быть приложена таким образом, что некоторые моды, как было замечено выше, не возбудятся. Тогда на частотах, соответствующих этим модам, резонанса не будет.) Точно так же, как в случае системы с двумя степенями свободы, установившаяся амплитуда каждого движущегося элемента будет суперпозицией вкладов от каждой из мод системы.

Чтобы проследить изменение резонансных частот и соответственно волновых чисел, можно построить график дисперсионного соотношения (которое не зависит от числа степеней свободы и граничных условий) и на графике отложить точки, соответствующие резонансам рассматриваемой системы. Дисперсионное соотношение для связанных маятников было показано на рис. 2.18. Рис. 3.5 представляет собой тот же график, на котором показаны две точки, соответствующие модам, определенным из граничных условий, для рассмотренной системы из двух маятников.

### 3.4. Фильтры

Когда на систему действует внешняя сила с частотой ω, установившееся движение любого элемента представляет собой суперпозицию вкладов от всех резонансов. В частности, возвращающая сила $\omega^2$, приходящаяся на единицу смещения и на единицу массы, которая в установившемся режиме имеет общее значение для всех движущихся элементов, образуется в результате суперпозиции

различных мод. Рассмотрим качественно, что происходит при изменении $\omega^2$. Предположим сначала, что частота $\omega$ лежит где-то между минимальным и максимальным значениями резонансных частот, но достаточно далеко от областей резонанса. В этом случае амплитуда данного движущегося элемента в основном определяется вкладом амплитуд дисперсии от всех мод. Вклады различных мод имеют разные знаки в зависимости от того, какой движущийся элемент мы рассматриваем. [См. уравнения (55). Сравните вклады от моды 2 для $\psi_a$ и $\psi_b$.] Увеличивая $\omega^2$, мы можем приблизиться к резонансной частоте. При прохождении через резонанс слева направо вклад от амплитуды дисперсии для данной моды меняет знак. При дальнейшем увеличении частоты амплитуда колебаний различных движущихся элементов будет более или менее сложным образом увеличиваться или уменьшаться по мере того, как мы будем проходить резонансные частоты, соответствующие разным модам. В конце концов мы пройдем самое большое значение частоты, соответствующее последней моде. После этого больше не будет происходить изменения знака вкладов, так как теперь знаки различных амплитуд дисперсии уже не будут меняться при увеличении частоты. Поэтому движущиеся элементы будут сохранять в большей или меньшей степени форму самой высокой моды (но не точно, конечно). Происходит нечто очень интересное. Пусть система представляет собой вытянутое в линию устройство (например, маятники, связанные пружинами), а внешняя сила приложена к одному из ее концов и частота этой силы больше частоты самой высокой моды. В этом случае движущийся элемент, ближайший к точке приложения силы, имеет самую большую амплитуду колебаний, соседний с ним — меньшую, следующий — еще меньшую и т. д. Амплитуда уменьшается с увеличением расстояния от *входного* конца системы, к которому приложена сила. В этом случае говорят, что система представляет собой *фильтр*.

Пример 3. *Два связанных маятника как механический фильтр.* Рассмотрим в качестве примера два связанных маятника (рис. 3.3). Предположим, что на вход системы (маятник $a$) действуют с частотой большей, чем частота $\omega_2$, которая соответствует моде 2. Маятник $a$ непосредственно связан с внешней силой, поэтому для этого маятника возвращающая сила в установившемся режиме имеет некоторый вклад от внешней силы. Однако для маятника $b$ это уже несправедливо. Его возвращающая сила образуется только натяжением пружины и силой тяжести, как и в случае свободных колебаний. При свободных колебаниях наибольшая возмущающая сила на единицу смещения, которую пружина и сила тяжести могли обеспечить, соответствовала конфигурации самой высокой моды. В нашем случае это соответствует маятникам, движущимся в противоположные стороны. Единственный способ для маятника $b$ иметь то же, что у маятника $a$, отношение возвращающей силы к массе и смещению — это иметь меньшее смещение: $|B| < |A|$. Чем больше $\omega$ по сравнению с $\omega_2$, тем меньше должно быть соответствующее



смещение маятника $b$ по сравнению с $a$. Иначе говоря, маятник $b$ может двигаться вместе с $a$ лишь при меньшем смещении.

Аналогичная ситуация возникнет для системы из нескольких связанных маятников, если частота внешней силы, приложенной к одному концу системы, превысит частоту самой высокой моды. Конфигурация в установившемся режиме будет соответствовать высшей моде, т. е. каждый маятник будет двигаться с фазой, противоположной фазе своих соседей. При этом для каждого маятника будет обеспечено самое большое значение возвращающей силы, приходящейся на единицу смещения и на единицу массы. Равенство $\omega^2$ для всех маятников приводит к тому, что каждый следующий маятник (от входа) должен иметь меньшее смещение. Таким образом амплитуда смещения каждого следующего маятника будет уменьшаться по мере удаления от конца, к которому приложена внешняя сила.

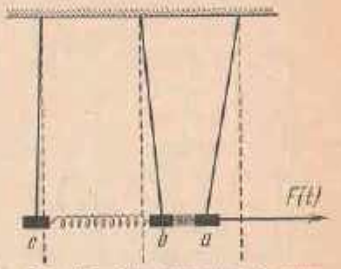


Рис. 3.6. Механический фильтр. Частота вынуждающей силы больше частоты самой высокой моды. Относительные фазы маятников совпадают с фазами этой моды. Амплитуда «на выходе» (маятник $c$) меньше амплитуды «на входе» (маятник $a$).

*Срезание высоких частот.* Мы рассмотрели пример *механического фильтра*. Если на вход системы действует сила $F_0 \cos \omega t$, то амплитуда движения на выходе (т. е. амплитуда движения последнего маятника) значительно меньше, чем на входе, если только $\omega$ много больше частоты самой высокой моды. При этом конфигурация системы будет той же, что у самой высокой моды, за тем исключением, что амплитуда маятников постепенно убывает к выходному концу системы. *Частота, соответствующая самой высокой моде (свободных колебаний), называется граничной частотой вынужденных колебаний.* Если частота внешней силы на входе больше граничной частоты, то движение, передаваемое на вход этой силой, не проходит через фильтр, оно «срезается». На рис. 3.6 показана система из трех маятников, на которую действуют с частотой, большей граничной частоты. (Такую систему легко сделать с помощью «пружины» и трех банок консервов; см. домашний опыт 3.16.)

*Срезание низких частот.* Посмотрим, что произойдет, если на вход системы действовать с частотой меньшей, чем самая малая собственная частота (т. е. частота, соответствующая первой моде свободных колебаний). Покажем, что если частота на входе много меньше этой частоты, то амплитуда на выходе (т. е. амплитуда последнего от входа маятника) много меньше входной амплитуды. Таким образом, *частота самой низкой моды также является граничной частотой.*

Рассмотрим нашу систему из двух связанных маятников (рис.3.3). При конфигурации, соответствующей первой моде, все маятники колеблются в фазе и с одинаковой амплитудой. Пружина не деформирована, и возвращающая сила создается только силой тяжести.

Таким образом, частота колебаний $\omega_1$ равна $\sqrt{g/l}$. Теперь предположим, что на вход системы действует сила с частотой $\omega$, которая меньше, чем $\omega_1$. Тогда в установившемся режиме возвращающая сила, приходящаяся на единицу смещения и на единицу массы, должна быть меньше, чем $g/l$, для каждой гири маятника. Возвращающая сила, действующая на маятник на входном конце системы, образуется внешней силой. На второй маятник будет действовать возвращающая сила, образованная силой тяжести и пружиной. Единственная возможность, чтобы возвращающая сила на единицу смещения и на единицу массы для этого маятника была меньше $g/l$, заключается в том, что вклад пружины в величину возвращающей силы должен быть обратного знака по сравнению с вкладом от силы тяжести. Легко показать, что в этом случае смещение маятника $b$ будет меньше, чем маятника $a$, но того же знака. (Пружина растянута.) Таким образом, оба маятника колеблются, имея разность фаз, соответствующую первой моде, но разные амплитуды. (Колебания маятника $b$ имеют меньшую амплитуду, чем маятника $a$.)

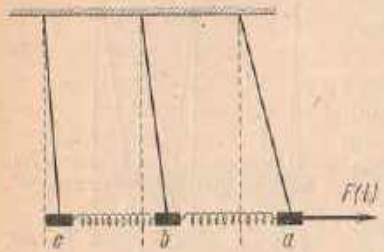



Рис. 3.7. Механический фильтр.
Частота вынуждающей силы меньше частоты первой моды. Относительные фазы маятников совпадают с фазами первой моды. Амплитуда «на выходе» (маятник $c$) меньше амплитуды «на входе» (маятник $a$).

Такой же результат будет и в случае системы из трех или более связанных маятников, находящихся под внешним воздействием, частота которого меньше частоты самой низкой моды. Относительные фазы колебаний маятников будут те же, что и в первой моде, а амплитуда будет уменьшаться с удалением от входа системы. Это показано на рис. 3.7. Лучший способ понять рис. 3.7 — это считать, что частота внешней силы равна нулю. Если сила постоянна, то маятники не будут двигаться, и интуиция немедленно подсказывает нам, что расположение маятников получится таким же, как на рис. 3.7.

*Терминология.* Диапазон частот, заключенный между нижней и верхней граничными частотами, называется *полосой пропускания фильтра*. Для частот внешнего воздействия, находящихся в пределах полосы пропускания, амплитуда на выходе сравнима с амплитудой на входе. Для частот внешнего воздействия вне полосы пропускания амплитуда на выходе меньше амплитуды на входе. Поэтому такая система называется *полосовым фильтром*. Если граничная частота со стороны низких частот равна нулю (т. е. если самая низкая мода имеет нулевую частоту), то система называется *фильтром низких частот*. Например, если в системе связанных маятников нити подвеса гирь сделать бесконечно длинными, то можно считать, что положение маятника всегда вертикально и возвращающей силы не возникает. (Действие нитей подвеса будет эквивалентно действию поверхности стола без трения.) В этом случае частота самой низкой моды равна нулю. Такая система представляет собой фильтр низких частот. Он пропускает частоты от нуля до верхней граничной частоты.



Если частота самой низкой моды отлична от нуля, а частота самой высокой моды бесконечно велика, то система называется *фильтром высоких частот*. Например, если в системе связанных маятников отношение $K/M$ стремится к бесконечности, то мы получим фильтр высоких частот. Пружины в этом случае настолько жесткие (или массы настолько малы), что они всегда обеспечивают значительную величину возвращающей силы на единицу массы и единицу смещения, без постепенного уменьшения амплитуд, независимо от того, сколь велика частота вынуждающей силы.

Система из двух, трех или большего числа маятников, возбуждаемая с помощью проигрывателя, может быть хорошей иллюстрацией свойств полосового фильтра. (См. домашний опыт 3.16.)

Пример 4. *Механический полосовой фильтр.* Система из двух связанных маятников, возбуждаемая с одного из концов (рис. 3.3), представляет собой простой механический полосовой фильтр. Покажите (задача 3.28), что отношение входной и выходной амплитуд (затуханием пренебрегаем) равно

$$\frac{\psi_b}{\psi_a} \approx \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2+\omega_1^2-2\omega^2}, \tag{56}$$

где

$$\omega_1^2=\frac{g}{l}, \quad \omega_2^2=\frac{g}{l}+2\frac{K}{M}. \tag{57}$$

Заметим, что, когда частота $\omega$ равна одному из резонансных значений ($\omega_1$ либо $\omega_2$), отношение амплитуд такое же, каким оно было бы для соответствующей моды: $\psi_b/\psi_a=+1$ для $\omega=\omega_1$ и $\psi_b/\psi_a=-1$ для $\omega=\omega_2$. Когда $\omega$ становится меньше частоты самой низкой моды, отношение амплитуд остается положительным и уменьшается от $+1$ при $\omega=\omega_1$ до $(\omega_2^2-\omega_1^2)/(\omega_2^2+\omega_1^2)$ при $\omega=0$. Таким образом, колебания с частотой много меньшей, чем нижняя граничная частота, сильно ослабляются при прохождении через фильтр, если ширина полосы пропускания мала по сравнению со средней частотой полосы пропускания. Если $\omega$ больше $\omega_2$, отношение амплитуд будет оставаться отрицательным. Оно уменьшается по величине с возрастанием $\omega$ и становится равным $-(\omega_2^2-\omega_1^2)/2\omega^2$ для существенно больших частот. Таким образом, частоты, большие верхней граничной частоты, сильно ослабляются.

Пример 5. *Механический фильтр низких частот.* Рассмотрим систему из двух связанных маятников (рис. 3.3). Будем увеличивать высоту точек подвеса и длину струн (так чтобы гири остались на месте). Когда струны станут «бесконечно длинными», их можно считать вертикальными для любого конечного смещения масс. Сила тяжести не создает в этом случае возвращающей силы, и наша система эквивалентна системе связанных масс, находящихся

на поверхности без трения. Частота, соответствующая самой низкой моде, $\omega_1^2=g/l$, будет стремиться к нулю. Таким образом, мы получаем фильтр низких частот, который пропускает частоты в диапазоне от нуля до верхней граничной частоты $\omega_2^2=2K/M$. (Этот результат справедлив и для системы из двух связанных пружиной масс, лежащих на поверхности без трения, к одной из которых приложена гармоническая сила.) Отношение амплитуд $\psi_b/\psi_a$ определяется из уравнения (56) при $\omega_1$, равном нулю:

$$\frac{\psi_b}{\psi_a}=\frac{\omega_2^2}{\omega_2^2-2\omega^2}=\frac{K/M}{(K/M)-\omega^2}. \qquad (58)$$

Это отношение равно $+1$ для нулевой частоты. Оно бесконечно (имеется в виду, что $\psi_a=0$) для $\omega^2=\frac{1}{2}\omega_2^2$, равно $-1$ для верхней граничной частоты и становится очень малым (и отрицательным) на очень больших частотах.

Рассмотрим применение равенства (58). Предположим, что мы имеем очень тонкую и чувствительную аппаратуру, которая не может работать при горизонтальных вибрациях, но вертикальные вибрации допускаются. Установим нашу аппаратуру на плоской подставке, которая в свою очередь помещается на ровном горизонтальном столе без трения. Предположим, что стены, пол и потолок вибрируют с частотой 20 *гц* и более. Предположим также, что если подставка с прибором жестко прикреплена к стенам, то амплитуда колебаний будет в 100 раз больше допустимой. Пусть вес прибора и подставки 10 *кг*. Как нам быть? Прикрепим подставку с прибором к стене через низкочастотный фильтр, состоящий из двух пружин, оси которых совпадают с осями $x$ и $y$. Положим, что каждая пружина имеет коэффициент жесткости $K$ (его величину нужно будет определить). Движения по направлениям $x$ и $y$ независимы, так что можно рассматривать движение только по $x$. Будем считать, что стена в точке соединения с пружиной представляет собой движущийся элемент $a$, а прибор — это движущийся элемент $b$. Теперь, применяя к нашему случаю уравнение (58), будем считать, что мы имеем две массы, связанные пружиной, причем на массу $a$ действует сила $F_0\cos\omega t$. Мы хотим, чтобы отношение $\psi_b/\psi_a$ было меньше $10^{-2}$ для частот 20 *гц* и выше:

$$\frac{\psi_a}{\psi_b}=1-\frac{\omega^2}{K/M}=-100,$$

т. е.

$$\frac{K}{M}=\frac{\omega^2}{101}, \qquad \sqrt{\frac{K}{M}}\approx\frac{\omega}{10}.$$

Для неподвижной стены собственная угловая частота колебаний прибора и подставки равна $\sqrt{K/M}$. Мы видим, что если нужно ослабить частоты от частоты $\nu$ и выше в $10^{-2}=f$ раз, то коэффициент жесткости $K$ пружины должен быть достаточно мал, чтобы собственная частота колебаний прибора была меньше $f^{1/2}\nu$. В нашем примере собственная частота должна быть меньше $20/10=2$ *гц*.



Другой пример. Предположим, что вам неудобно сидеть на полу, который вибрирует с частотой 20 *гц* (это может быть пол самолета или что-нибудь в этом роде), поэтому вы сидите на «подушке». Подушка уменьшает вертикальную вибрацию в 100 раз (теперь вам удобно). Как сильно продавится под вами подушка? (Задача 3.12.)

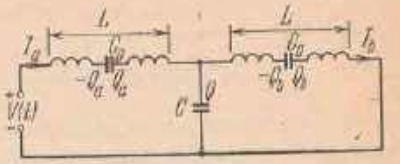



Рис. 3.8. Связанные $LC$-цепи, находящиеся под действием разности потенциалов $V(t)$.

Эта схема является электрическим аналогом двух связанных маятников (см. рис. 3.3).

Пример 6. *Электрический широкополосный фильтр.* Рассмотрим электрический аналог механической системы из двух связанных маятников, показанной на рис. 3.3. Каждая масса $M$ заменяется индуктивностью $L$. Связывающие пружины с коэффициентом жесткости $K$ заменяем емкостями с величиной обратной емкости $C^{-1}$. Возвращающая сила, происходящая от силы тяжести, зависит от величины смещения маятника и не зависит от его соединения с другим маятником. Аналогично этому мы хотим создать э. д. с. на каждой индуктивности независимо от ее связи с другими индуктивностями. Это можно сделать, разделив индуктивность на две части и включив емкость $C_0$ между ними. Пренебрежем активным сопротивлением $R$ индуктивностей (это сопротивление проводов, из которых сделаны индуктивности). Все другие сопротивления пренебрежимо малы. Полученная нами система показана на рис. 3.8.

Представляем читателю найти уравнение движения и определить нормальные координаты и моды (задача 3.29). Приводим конечный результат, написанный по аналогии со связанными маятниками:

$$\left.\begin{aligned}&\text{мода 1:}\quad I_a=I_b, \qquad \omega_1^2=\frac{C_0^{-1}}{L};\\ &\text{мода 2:}\quad I_a=-I_b, \quad \omega_2^2=\frac{C_0^{-1}}{L}+\frac{2C^{-1}}{L}.\end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Уменьшение амплитуды при прохождении через фильтр (в предположении, что нет затухания: мы пренебрегаем сопротивлением катушек) определяется выражением (56):

$$\frac{I_b}{I_a}=\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2+\omega_1^2-2\omega^2}=\frac{1/LC}{(1/LC_0)+(1/LC)-\omega^2}. \qquad (60)$$

Пример 7. *Электрический фильтр низких частот.* Если замкнуть конденсатор $C_0$ на рис. 3.8, то можно считать, что его емкость бесконечно велика. Частота колебаний для самой низкой

моды стала при этом равной нулю, что соответствует установившемуся постоянному току. В этом случае мы получаем низкочастотный фильтр, изображенный на рис. 3.9. Отношение $I_b/I_a$ следует из выражения (60), если принять, что $1/C_0$ равно нулю:

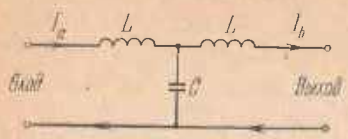


Рис. 3.9. Электрический фильтр низких частот.

$$\frac{I_b}{I_a} = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - 2\omega^2} = \frac{1/LC}{(1/LC) - \omega^2}. \quad (61)$$

Пример 8. *Фильтр низких частот для выпрямителя.* Рассмотрим практическое применение выражения (61). Мы хотим сделать источник постоянного тока. Розетка на стене является источником переменного напряжения, среднеквадратичное значение которого равно 110 *в*, а частота 50 *гц*. Это напряжение подается на входную обмотку трансформатора. Выходная его обмотка может иметь больше витков, чем входная (повышающий трансформатор), или меньше витков (понижающий трансформатор) в зависимости от того, какую величину постоянного напряжения мы хотим получить. Выходная обмотка соединяется с диодом, который пропускает ток только в одном направлении. В этом случае мы имеем однополупериодный выпрямитель. На практике чаще используют двухполупериодное выпрямление, когда выходные концы подаются на два диода, соединенные так, что одну половину синусоиды пропускает один диод, а вторую — другой. Ток будет заряжать конденсатор, который можно рассматривать как источник постоянного напряжения. Однако заряд на емкости (и соответственно напряжение) не будет строго постоянным. С хорошим приближением можно считать, что заряд имеет постоянную составляющую, на которую наложены небольшие пульсации с частотой 100 *гц* (для случая двухполупериодного выпрямления). (Вопрос. Почему частота пульсаций в два раза больше частоты переменного напряжения сети?) Если заряженный конденсатор используется как источник постоянного напряжения для питания ламп радиоприемника или проигрывателя, то на выходе этих устройств мы услышим неприятное жужжание. (Оно хорошо слышно после включения радиоприемника, пока лампы не успели прогреться. Конечно, приемник, который питается от батареи, не будет жужжать на частоте 100 *гц*. Электрические часы или лампа дневного света имеют индуктивность, и вы можете слышать жужжание из-за механических напряжений в витках.)

Чтобы избавиться от жужжания на частоте 100 *гц*, подсоединим выходную емкость выпрямителя к индуктивности низкочастотного фильтра (рис. 3.9) и будем считать источником постоянного напряжения выход фильтра. Типичные значения $L$ и $C$ для обычного фильтра (см. любой справочник радиолюбителя) равны $L=10$ *гн* и $C=6$ *мкф*. Тогда верхняя граничная частота равна

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{LC}} = \frac{1}{6{,}28}\sqrt{\frac{2}{10\cdot 6\cdot 10^{-6}}} = 29{,}1\ гц.$$



Уменьшение амплитуды для составляющей, имеющей частоту 100 *гц*, получим из формулы (61):

$$\frac{I_b}{I_a} = \frac{\nu_2^2}{\nu_2^2 - 2\nu^2} = \frac{(29{,}1)^2}{(29{,}1)^2 - 2\,(100)^2} = -0{,}040.$$

Таким образом, пульсирующая компонента уменьшается в 25 раз. Постоянная составляющая фильтром не искажается.

## 3.5. Вынужденные колебания замкнутых систем со многими степенями свободы

В этом пункте мы рассмотрим установившееся движение системы из связанных маятников под действием внешней силы произвольной частоты $\omega$. Вначале мы не будем обращать внимания ни на граничные условия, ни на способы связи движущихся элементов с внешними силами. (Последние можно включить в граничные условия.) Нас будет интересовать уравнение движения гири маятника, к которой непосредственно внешняя сила не приложена, и мы найдем общее решение для движения маятника с неопределенными граничными условиями. Конечно, в любом частном случае необходимо полностью определить граничные условия.

*Пренебрегаем затуханием.* Пренебрежем в уравнениях движения членами, относящимися к затуханию. Ограничит ли это общность наших результатов? В общем, да, но не очень сильно. Вспомним результат п. 3.3, где мы нашли, что когда частота $\omega$ не попадает в полосу любого из резонансов (т. е. частота $\omega$ далека от частоты любой из мод свободных колебаний), то смещение движущегося элемента представляет собой суперпозицию вкладов амплитуд дисперсии от каждой моды. Амплитудами поглощения можно пренебречь, так как они уменьшаются с частотой значительно быстрее амплитуд дисперсии. Как только $\omega$ отклонится от резонансного значения на 5—10 резонансных ширин, мы можем пренебречь амплитудами поглощения. Это равносильно приравниванию коэффициента затухания $\Gamma$ нулю в результате. Будем считать, что $\Gamma=0$, но тем не менее существует некоторое трение, достаточное для образования установившихся колебаний, происходящих с частотой $\omega$ внешней силы. Действительно, без затухания система никогда не войдет в установившийся режим и будет совершать «бесконечные биения». Итак, предположим, что некоторое затухание существует, но будем рассматривать поведение системы вдали от резонанса. (Из п. 3.3 нам известно, как ведет себя система в области резонанса.)

*Относительные фазы движущихся элементов.* Важным следствием пренебрежения амплитудой поглощения является то, что вклад каждой моды (в смещение данного элемента) находится в фазе либо в противофазе с внешней силой $F_0\cos(\omega t+\varphi_0)$. Действительно, в п. 3.3 было показано, что амплитуда дисперсии представляет собой константу (положительную или отрицательную), которая умножается на $\cos(\omega t+\varphi_0)$. К этому же результату можно прийти

иначе. Предположим, что затухания нет, но тем не менее нам удалось заставить систему войти в установившийся режим, в котором она совершает колебания с частотой $\omega$ внешней силы. Поскольку затухание отсутствует, то нет и рассеивания энергии. Поэтому приложенная внешняя сила не будет совершать никакой работы над движущимися элементами. Это значит, что смещение любого движущегося элемента либо находится в фазе, либо сдвинуто на 180° относительно внешней силы, т. е. мы имеем «чистые» амплитуды дисперсии.

Таким образом, мы получили важный результат: *в установившемся режиме (и для частоты $\omega$, далекой от резонанса) каждый движущийся элемент имеет одну и ту же фазу*, совпадающую с фазой внешней силы. (Мы считаем, что амплитуда каждого движущегося элемента может быть положительной или отрицательной, и не упоминаем о возможном 180-градусном сдвиге.) Другой вывод заключается в том, что *возвращающая сила, приходящаяся на единицу массы и на единицу смещения, имеет одно и то же значение для всех движущихся элементов*. Это верно, потому что каждый движущийся элемент колеблется с одинаковой частотой. (Обратите внимание на то, что эти же условия справедливы для отдельной нормальной моды свободно колеблющейся системы без затухания!)

Теперь мы достаточно подготовлены, чтобы перейти к отдельным примерам.

Пример 9. *Связанные маятники.* Меняя названия (например, заменяя «длину струны» на «емкость» и «массу» на «индуктивность») и рисуя новые схемы, мы можем, не повторяя вычислений, понять поведение весьма различных физических систем, основываясь на результатах, полученных для связанных маятников. (Мы часто так поступали в главе 2.) Здесь нас интересуют только связанные маятники.

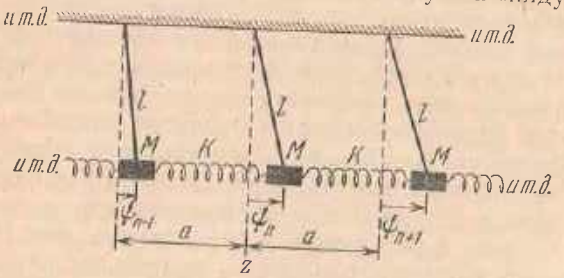



Рис. 3.10. Связанные маятники с неуказанными граничными условиями.

На рис. 3.10 показаны три одинаковых связанных маятника, следующие один за другим (полное число маятников в последовательности не определено, и граничные условия не указаны). Уравнение движения для смещения $\psi_n(t)$ гири $n$-го маятника имеет вид (для малых колебаний)

$$M\ddot{\psi}_n = -M\omega_0^2\psi_n + K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1}), \qquad (62)$$



где $\omega_0^2 = g/l$. Прежде чем изучать точное решение уравнения (62), рассмотрим его решение в непрерывном приближении. Это значит, что мы отказываемся от информации о движении для конфигураций, соответствующих самым высоким модам свободных колебаний, для которых соседние маятники имеют «лево-правую» конфигурацию. («Лево-правое» — это продольный аналог поперечного «зигзага».) Мы должны будем поэтому ограничить себя сверху по частоте. Только имея точное решение, мы сможем рассмотреть частоты внешней силы, лежащие у верхней границы полосы пропускания и за ней.

*Непрерывное приближение.* Предположим, что $\psi_n(t)$ медленно меняется с увеличением $n$. Это значит, что все маятники в небольшой окрестности маятника $n$ (который имеет положение равновесия в точке $z$) движутся приблизительно так же, как маятник $n$, так что смещение можно считать непрерывной функцией $\psi(z, t)$. Разложим соответствующие члены в уравнении (62) в ряд Тейлора:

$$\psi_n(t) = \psi(z, t),$$

$$\psi_{n+1}(t) = \psi(z+a, t) = \psi(z, t) + a\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial z^2} + \ldots,$$

$$\psi_{n-1}(t) = \psi(z-a, t) = \psi(z, t) - a\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial z^2} + \ldots$$

Таким образом,

$$\psi_{n+1} - \psi_n = a\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \ldots,$$

$$\psi_n - \psi_{n-1} = a\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \ldots$$

Подставив эти выражения (а также $\ddot{\psi}_n(t) = \partial^2\psi(z, t)/\partial t^2$) в уравнение (62), получим

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2\psi(z, t) + \frac{Ka^2}{M}\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial z^2}} \qquad (63)$$

*Волновое уравнение Клейна — Гордона.* Уравнение (63) — знаменитое уравнение. Оно превращается в классическое волновое уравнение, когда $\omega_0$ равно нулю. Его иногда называют «волновым уравнением Клейна — Гордона». (Оно справедливо для волн де Бройля в случае релятивистских свободных частиц. См. Д. 2.)

Мы предполагаем, что все движущиеся элементы находятся в установившемся режиме и колеблются с частотой $\omega$ вынуждающей силы, что эта сила не совершает работы и что фазовые постоянные у всех движущихся элементов одинаковы. В этом случае

$$\psi(z, t) = \cos(\omega t + \varphi)\,A(z), \qquad (64)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\cos(\omega t + \varphi)\,A(z), \qquad (65)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \cos(\omega t + \varphi)\frac{d^2A(z)}{dz^2}. \qquad (66)$$

Подставляя уравнения (64), (65) и (66) в (63) и сокращая на $\cos(\omega t + \varphi)$, получим дифференциальное уравнение для пространственной конфигурации $A(z)$ маятников в установившемся режиме под действием силы с частотой $\omega$:

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = \frac{M}{Ka^2}(\omega_0^2 - \omega^2)\,A(z). \tag{67}$$

Решения уравнения (67) сильно отличаются, если $\omega^2 > \omega_0^2$ и $\omega^2 < \omega_0^2$. В первом случае мы получаем синусоидальные волны, которые были рассмотрены ранее (в п. 2.2) для непрерывной струны.

*Синусоидальные волны*; $\omega^2 > \omega_0^2$. При $\omega^2 > \omega_0^2$ уравнение (67) имеет вид

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = -k^2A(z), \tag{68}$$

где $k^2$ — положительная константа:

$$k^2 = (\omega^2 - \omega_0^2)\frac{M}{Ka^2}. \tag{69}$$

Уравнение (69) представляет собой дисперсионное соотношение для волны в случае $\omega^2 > \omega_0^2$. Общее решение уравнения (68) имеет вид

$$A(z) = A\sin kz + B\cos kz, \tag{70}$$

где $A$ и $B$ — константы, определяемые из граничных условий. В зависимости от граничных условий существуют определенные волновые числа (и соответственно частоты внешнего воздействия), которые соответствуют «резонансу». Резонансные частоты совпадают с частотами нормальных мод (стоячих волн) свободно колеблющейся системы.

Теперь рассмотрим второй случай, имеющий важное значение.

*Экспоненциальные волны*; $\omega^2 < \omega_0^2$. Если $\omega^2$ меньше $\omega_0^2$, мы определим положительную константу $\varkappa$ как положительный квадратный корень из положительной величины

$$\varkappa^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)\frac{M}{Ka^2}. \tag{71}$$

Уравнение (71) представляет собой дисперсионное соотношение для системы, у которой $\omega^2 < \omega_0^2$. В этом случае уравнение (67) принимает вид

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = \varkappa^2A(z). \tag{72}$$

Наличие плюса в правой части уравнения (72) дает решение, совершенно отличное от синусоидального решения уравнения (68). Решение уравнения (68), т. е. синусоидальная функция $A(z)$, определяемая решением (70), пересекает ось $z$ и после пересечения меняет знак кривизны и снова пересекает ось и т. д., колеблясь в пространстве. В противоположность этому плюс в правой части уравнения (72) означает, что функция $A(z)$ постоянно удаляется от оси $z$. Поэтому, если решение $A(z)$ положительно и имеет положительный наклон (или отрицательно, с отрицательным



наклоном), то оно никогда не вернется на ось $z$. Если $A(z)$ положительно и имеет отрицательный наклон, оно будет приближаться к оси $z$ все более медленно с возрастанием $z$. Если $A(z)$ когда-нибудь пересечет ось $z$, имея отрицательный наклон, то при дальнейшем отрицательное значение $A(z)$ будет расти и $A(z)$ больше не пересечет оси $z$.

Общее решение уравнения (72) представляет собой суперпозицию двух экспоненциальных функций:

$$A(z) = Ae^{-\varkappa z} + Be^{+\varkappa z}. \tag{73}$$

Чтобы убедиться в этом, продифференцируем это решение:

$$\frac{dA(z)}{dz} = -\varkappa Ae^{-\varkappa z} + \varkappa Be^{+\varkappa z},$$

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = (-\varkappa)^2 Ae^{-\varkappa z} + (\varkappa)^2 Be^{+\varkappa z} = \varkappa^2 A(z).$$

Мы видим, что решение (73) удовлетворяет уравнению (72). Постоянные $A$ и $B$ определяются из граничных условий. Таким образом, для $\omega^2 < \omega_0^2$ общее решение $\psi(z, t)$ имеет вид

$$\psi(z, t) = (Ae^{-\varkappa z} + Be^{+\varkappa z})\cos(\omega t + \varphi). \tag{74}$$

*Связанные маятники как фильтр высоких частот*. Уравнение (74) имеет общую форму *экспоненциальной волны*. Частота $\omega_0^2 = g/l$ представляет собой граничную *частоту для низких частот*. Этого можно было ожидать, поскольку для простой системы из двух маятников было получено такое же выражение. На частоте самой низкой моды все маятники колеблются в фазе друг с другом и возвращающая сила образуется только за счет силы тяжести. Пружины не сжаты и не растянуты. Длина волны «бесконечна», т. е. $\varkappa$ равно нулю. Если к системе приложена внешняя сила с частотой, меньшей граничной частоты, то в системе не могут поддерживаться синусоидальные пространственные соотношения для относительных амплитуд колеблющихся грузов. В этом случае относительные амплитуды маятников будут экспоненциально зависеть от расстояния, как это следует из решения (73). Таким образом, система будет вести себя как высокочастотный фильтр. (В действительности она является полосовым фильтром, но, пользуясь непрерывным приближением, мы не можем изучить отклик системы на колебания больших частот, в которых участвуют высокие моды с их «зигзагообразной» конфигурацией.)

Предположим, что сила приложена в точке $z=0$ и что система простирается от $z=0$ до $z=L$ и в этой точке ($z=L$) она привязана к жесткой стене. Интуитивно ясно, что, если воздействовать на систему с частотой, меньшей граничной частоты, амплитуда $A(z)$ должна уменьшаться с увеличением расстояния $z$ от точки приложения силы. Если система имеет очень большую длину, т. е. $L$ велико, то в точке $z=L$ амплитуда должна быть очень малой. В пределе, когда $L$ бесконечно велико, амплитуда в точке $z=L$ должна

равняться нулю. Это значит, что член $B\exp(+\varkappa z)$ в уравнении (74) должен исчезнуть, т. е. $B$ должно равняться нулю. Это правильная догадка. (См. задачу 3.30.)

На рис. 3.11 показан пример, соответствующий такому случаю. Заметим, что в этом примере не так уж важно, привязан ли конец в точке $z=L$. Если $\varkappa L\gg 1$, то амплитуда колебаний станет равной нулю раньше, чем мы достигнем точки $z=L$. Таким образом, мы

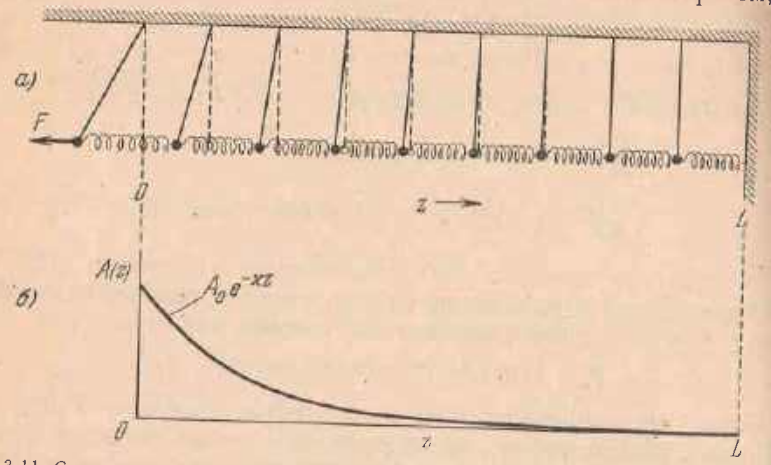



Рис. 3.11. Связанные маятники, на которые слева действует вынуждающая сила с частотой, меньшей пороговой частоты $\omega_0$.
*а)* Мгновенная конфигурация системы; *б)* график $A(z)$.

можем экспериментально осуществить «бесконечную» длину при конечном $L$, сделав $L$ значительно больше $1/\varkappa$. (См. домашний опыт 3.16.)

*Терминология для экспоненциальных волн.* Постоянная $\varkappa$ называется *коэффициентом поглощения*. Она характеризует относительное уменьшение амплитуды на единице длины. Рассмотрим амплитуду $A(z)$, образованную внешней силой на левом конце системы, достаточно длинной для того, чтобы иметь только убывающую экспоненту смещения:

$$\psi(z,\ t)=A(z)\cos\omega t, \tag{75}$$

где

$$A(z)=Ae^{-\varkappa z}. \tag{76}$$

$$-\frac{1}{A(z)}\frac{dA(z)}{dz}=\text{относительное уменьшение амплитуды на единице длины.} \tag{77}$$

Это выражение равно $\varkappa$, если $A(z)$ задано выражением (76). С другой стороны, когда $A(z)$ равно $B\exp(+\varkappa z)$, амплитуда уменьшается при уменьшении $z$, а не при возрастании. Однако это не вызывает путаницы, и мы по-прежнему будем называть $\varkappa$ коэффициентом поглощения. В случае общего решения $A\exp(-\varkappa z)+B\exp(+\varkappa z)$ мы оставим то же название для $\varkappa$, несмотря на то что для некоторых интервалов $z$ амплитуда $A(z)$ может возрастать, а для некоторых — уменьшаться.



Величина, обратная $\varkappa$, представляет собой длину $\delta$, на которой амплитуда $\exp(-\varkappa z)=\exp(-z/\delta)$ уменьшается в $e=2{,}718$ раз. Она называется *глубиной проникновения амплитуды* или просто *глубиной проникновения*:

$$1/\varkappa=\delta. \tag{78}$$

Можно провести некоторую аналогию между коэффициентом поглощения $\varkappa$ для экспоненциально убывающих волн и волновым числом $k$ для синусоидальных волн. В первом случае $\varkappa$ — это относительное ослабление амплитуды на единицу длины, во втором случае $k$ — это число радиан на единицу длины. Точно так же есть некоторая аналогия между глубиной проникновения $\delta$ и длиной волны $\lambda$: $\delta$ — это расстояние, на котором амплитуда уменьшается в $e$ раз, а $\lambda$ — это расстояние, на котором фаза увеличивается на $2\pi$.

*Дисперсионные соотношения.* Если частота $\omega$ больше *нижней граничной частоты*, то мы имеем синусоидальные волны, для которых частота и волновое число связаны уравнением (69). Перепишем его в виде

$$\omega^2=\omega_0^2+\left(\frac{Ka^2}{M}\right)k^2. \tag{79}$$

Для $\omega$, меньших нижней граничной частоты $\omega_0$, синусоидальных волн нет. (Они «срезаются».) В этом случае вместо синусоидальных волн имеем экспоненциальные волны. Частота $\omega$ и коэффициент ослабления $\varkappa$ связаны соотношением (71), которое запишем в виде

$$\omega^2=\omega_0^2-\left(\frac{Ka^2}{M}\right)\varkappa^2. \tag{80}$$

Выражения (79) и (80) представляют собой полное дисперсионное соотношение для системы (в непрерывном приближении).

Для частотного диапазона, в котором *вынужденные* колебания синусоидальны, дисперсионное соотношение (79) совпадает с дисперсионным соотношением для мод *свободных* колебаний. [См. п. 2.4, уравнения (2.90) — (2.92).] Это не случайно. При выводе дисперсионного соотношения в обоих случаях мы находили уравнение движения груза и затем предполагали, что все движущиеся элементы совершают гармоническое движение с одной частотой $\omega$ (в одном случае с частотой моды, в другом — с частотой установившихся колебаний) и с одинаковой фазовой постоянной. Таким образом, это общий результат: *дисперсионное соотношение для вынужденных синусоидальных колебаний то же, что и для свободных колебаний.*

*Дисперсивная и реактивная среда.* В рассматриваемом нами примере «среда», в которой возникают волны, представляет собой систему связанных маятников. Если в среде могут существовать

синусоидальные волны, она называется *дисперсивной (или прозрачной) средой*. Это значит, что частота $\omega$ не ниже граничной частоты $\omega_p$. Среда, в которой не может быть синусоидальных волн, но возможны экспоненциальные волны (без рассеяния энергии), называется *реактивной*. Одна и та же среда может быть реактивной на одних частотах и дисперсивной на других, как в случае связанных маятников.

Пример 10. *Ионосфера.* Ионосфера — это пример среды (для электромагнитных волн), которая дисперсивна (т. е. прозрачна) для частот, больших некоторой граничной частоты (эта частота называется также частотой колебаний плазмы $\nu_p$), и реактивна (непрозрачна) для меньших частот. Дисперсионное соотношение для вынужденных колебаний в ионосфере очень похоже на дисперсионное соотношение для связанных маятников:

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_p^2 + c^2k, \qquad \omega > \omega_p; \\ \omega^2 &= \omega_p^2 - c^2\varkappa^2, \qquad \omega < \omega_p. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Частота колебаний плазмы — это частота самой низкой моды колебаний свободных электронов. Мы получили в п. 2.4 формулу (2.99). Типичные значения частоты колебаний плазмы $\nu_p$ ($=\omega_p/2\pi$) в дневное время лежат между 10 и 30 *Мгц*. Пусть «к одному концу ионосферы» приложена «сила», создаваемая некоторой радиостанцией, работающей на типичных широковещательных частотах амплитудной модуляции порядка $\nu = 1000$ *кгц*. В этом случае $\nu \ll \nu_p$ и ионосфера ведет себя как реактивная среда. Электромагнитные волны экспоненциально затухают, аналогично тому, что происходило в случае связанных маятников (см. рис. 3.11). При этом над ионосферой не совершается никакой работы, так как скорости каждого электрона сдвинуты на $\pm 90°$ по фазе по отношению к окружающему их электрическому полю. В случае системы маятников (см. рис. 3.11) средняя энергия, сообщаемая системе внешней силой, также равна нулю (затуханием пренебрегаем). Энергия, которая сообщается маятнику, возвращается им обратно в течение цикла. Несколько иначе обстоит дело в случае радиостанции и ионосферы. Станция получает обратно очень малую часть переданной в ионосферу энергии. Ионосфера не поглощает энергию, но волны отражаются к Земле, захватывая большой район и не попадая в передатчик. Такое *отражение волн* от ионосферы обеспечивает техническую возможность передачи радиоволн на большие расстояния к приемникам, находящимся вне поля зрения из-за кривизны поверхности Земли. Все это справедливо, если $\omega$ меньше граничной частоты $\omega_p$.

Типичные частоты телевидения и радиостанций, работающих на частотной модуляции, лежат около 100 *Мгц*. Эти частоты выше граничной частоты ионосферы, лежащей в пределах 10—30 *Мгц*. Таким образом, для этих частот (около 100 *Мгц*) ионосфера является дисперсивной средой. Можно сказать, что она прозрачна. Полного отражения электромагнитных волн к Земле уже не происходит, и ионосфера в этом случае не помогает нам в передаче радиосигналов, как



это происходило для радиостанций с амплитудной модуляцией. Передача оказывается возможной лишь на расстояния, ограниченные «лучом зрения».

Ионосфера является дисперсивной средой и для частот *видимого света* $\nu \approx 10^{15}$ *гц*. Если бы она была реактивной средой для этих частот, мы не видели бы ни звезд, ни Солнца. В следующей главе мы выведем дисперсионное соотношение для ионосферы [уравнение (81)].

*Проникновение волн в реактивную область.* Когда ионосфера находится под воздействием радиостанции, частоты которой ниже граничной частоты, радиоволны *полностью отражаются* назад к Земле. Но отражение не происходит, так сказать, в одной точке, сразу. Рассмотрим аналогичную задачу для связанных маятников (у этой системы такое же дисперсионное соотношение, что и у ионосферы) в непрерывном приближении. Предположим, что на гирю первого маятника (в точке $z=0$) действует вынуждающая сила $\psi_1(t) = A_0 \cos \omega t$. В области между $z=0$ и $z=L$ находится некоторое количество связанных маятников, длина каждого из них $l_1$, причем

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l_1} < \omega^2. \tag{82}$$

Таким образом, область, занимаемая этими маятниками (мы будем ее называть областью 1), дисперсивна. (Внешняя сила — это «радиостанция». Область от $z=0$ до $z=L$ — «обычный воздух», а не «плазма».) При $z=L$ нити подвеса маятников внезапно становятся короче. Каждая нить имеет теперь длину $l_2$, так что

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l_2} > \omega^2. \tag{83}$$

Эта область (область 2) реактивна. (Область 2 — это «плазма».) Пусть она простирается до бесконечности ($z=\infty$). Описанная система показана на рис. 3.12.

Найдем функцию $\psi(z, t)$, которая для $z=0$ равна $A_0 \cos \omega t$. Для любого $z$ будем иметь

$$\psi(z, t) = A(z) \cos \omega t, \tag{84}$$

где $A(z)$ подлежит определению. Амплитуда $A(z)$ для реактивной области (область 2), т. е. для $z$ между $L$ и бесконечностью, должна иметь вид

$$A_2(z) = Ce^{-\varkappa(z-L)}, \tag{85}$$

где $C$ — неизвестная константа, а $\varkappa$ определяется равенством

$$\varkappa^2 = \frac{M}{Ka^2}\left(\frac{g}{l_2} - \omega^2\right). \tag{86}$$

где $\omega^2 < g/l_2$. В дисперсивной области между $z=0$ и $z=L$ $A(z)$ имеет вид

$$A_1(z) = A \sin k(z-L) + B \cos k(z-L), \tag{87}$$

где $A$ и $B$ — неизвестные константы, а $k$ дается соотношением

$$k^2 = \frac{M}{Ka^2}\left(\omega^2 - \frac{g}{l_1}\right), \tag{88}$$

причем $\omega^2 > g/l_1$. Введем теперь граничные условия. При $z=L$ функции $A_1(z)$ и $A_2(z)$ должны гладко соединяться, т. е. должны

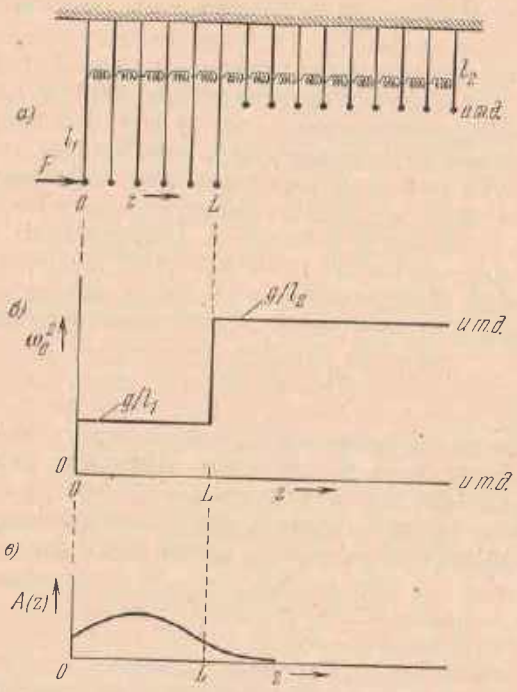



Рис. 3.12. Система связанных маятников с внезапным изменением $\omega_0^2$ в точке $z=L$.
*а*) Система. Маятник в точке $z=0$ связан с вынуждающей силой. *б*) График зависимости $\omega_0^2$ от $z$. Для вынуждающих частот в интервале от $\sqrt{g/l_1}$ до $\sqrt{g/l_2}$ область 1 (от $z=0$ до $z=L$) является дисперсионной, а область 2 (от $z=L$ до $z=\infty$) — реактивной. *в*) График зависимости амплитуды $A$ от $z$, когда частота вынуждающей силы близка к самой низкой резонансной частоте системы.

быть равны их значения и производные (наклоны) в точке $z=L$. Приравнивание значений обеих функций в точке $z=L$ дает $B=C$. Приравнивание производных дает $kA=-\varkappa C$. Таким образом, для области 1 имеем

$$A_1(z) = C\left[\frac{-\varkappa}{k}\sin k(z-L) + \cos k(z-L)\right]. \tag{89}$$

Граничные условия для $z=0$: $A_1(z)=A_0$ в $z=0$, и из уравнения (89) получаем

$$C = \frac{A_0}{\frac{\varkappa}{k}\sin kL + \cos kL}. \tag{90}$$



Полное решение определится уравнениями (84), (85), (89) и (90) и дисперсионными соотношениями (86) и (88).

*Резонанс.* Знаменатель в уравнении (90) обращается в нуль для ряда значений $kL$, что дает бесконечное значение для $C$. (Если учесть затухание, мы не получим бесконечно большой амплитуды.) Эти значения $kL$ определяют резонансные частоты системы. Для нахождения резонансных частот можно воспользоваться и дисперсионным соотношением. (См. задачу 3.31.) Амплитуда $A(z)$ для частоты $\omega$, близкой к частоте первого резонанса, показана на рис. 3.12. Здесь $C$ было взято большим, но не бесконечным.

*«Ограниченные в пространстве» моды.* Из рис. 3.12, *в* следует, что реактивная (поглощающая) область последовательности маятников (она лежит между $z=L$ и $z=\infty$) действует подобно «мягкой стенке». Маятник, расположенный в точке $z=L$, не закреплен, но, несмотря на это, на расстоянии нескольких глубин проникновения, за $z=L$, смещение маятников пренебрежимо мало. Этот результат позволяет предположить, что, ограничив дисперсивную область с обеих сторон реактивными областями, мы получим в дисперсивной области почти такие же моды (свободных колебаний), что и в последовательности маятников, ограниченной двумя стенками. Такое предположение верно. Назовем эти моды «ограниченными». Они возникают на частотах, примерно равных резонансным частотам системы, показанной на рис. 3.12.

Интересным свойством «ограниченных» мод является то, что число их конечно, даже если число маятников в дисперсивной области сколь угодно велико. Дело в том, что частоты «ограниченных» мод имеют в качестве верхнего предела частоту $\sqrt{g/l_2}$. Для $\omega^2 > g/l_2$ внешняя область становится дисперсивной, и колебания не будут больше ограничены центральной (дисперсивной) областью между двумя «стенками».

В квантовой физике волны де Бройля для электронов в атоме ведут в себя в определенном смысле подобно «ограниченным» модам рассматриваемой системы маятников. Такие состояния электронов называются стационарными состояниями. Пример квантовой системы со стационарными состояниями (их называют еще связанными состояниями электрона) рассмотрен в дополнении (см. Д.3).

*Точное решение для вынужденных колебаний системы связанных маятников.* Мы рассматривали свойства вынужденных колебаний связанных маятников в непрерывном приближении. Найдем теперь точное решение уравнения движения маятника, находящегося в ряду связанных маятников. Перепишем уравнение (62):

$$\ddot{\psi}_n = -\omega_0^2\psi_n + \frac{K}{M}(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}). \tag{91}$$

Предположив, что все движущиеся элементы совершают гармоническое движение с одинаковой частотой и фазой

$$\psi_n = A_n \cos \omega t, \tag{92}$$

получим

$$-\omega^2 A_n = -\omega_0^2 A_n - \frac{2K}{M} A_n + \frac{2K}{M}\left(\frac{A_{n+1}+A_{n-1}}{2}\right),$$

т. е.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M}\left(1 - \frac{^1/_2 (A_{n+1}+A_{n-1})}{A_n}\right). \qquad (93)$$

*Дисперсивная область частот.* (В радиотехнике она называется «полосой пропускания».) В дисперсивной области колебания синусоидальны в пространстве. Предположим, что решение имеет вид

$$A_n = A \sin kna + B \cos kna, \qquad (94)$$

тогда

$$\left.\begin{aligned} A_{n+1} &= A \sin (kna + ka) + B \cos (kna + ka), \\ A_{n-1} &= A \sin (kna - ka) + B \cos (kna - ka) \end{aligned}\right\} \qquad (95)$$

и

$$A_{n+1} + A_{n-1} = 2A \sin kna \cos ka + 2B \cos kna \cos ka = \\ = 2 \cos ka\,(A \sin kna + B \cos kna) = (2 \cos ka) A_n. \qquad (96)$$

Подставляя этот результат в уравнение (93), получим

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M}(1 - \cos ka), \qquad (97)$$

т. е.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{M} \sin^2 \frac{ka}{2}. \qquad (98)$$

Уравнение (98) представляет собой закон дисперсии для дисперсивной области частот. Оно определяет частоты от $\omega^2 = \omega_0^2$ до $\omega^2 = \omega_0^2 + 4K/M$, что соответствует значениям $ka$ от $ka = 0$ до $ka = \pi$. Уравнение (98) — точно такое же дисперсионное соотношение, которое было получено для системы свободно колеблющихся маятников [см. уравнение (2.90) п. 2.4].

*Нижняя реактивная область.* Используя наш опыт нахождения решений в случае непрерывного приближения, предположим, что общее решение для частот, меньших нижней граничной частоты $\omega_0$, имеет вид *экспоненциальной волны:*

$$A_n = Ae^{-\varkappa na} + Be^{+\varkappa na}. \qquad (99)$$

Тогда

$$A_{n+1} + A_{n-1} = (e^{\varkappa a} + e^{-\varkappa a})\, A_n. \qquad (100)$$

Из уравнения (93) получаем закон дисперсии

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M}\left[1 - \frac{1}{2}(e^{\varkappa a} + e^{-\varkappa a})\right]. \qquad (101)$$

Уравнение (101) можно привести к виду, похожему на уравнения (97) и (98). Используя гиперболические синусы и косинусы [см. приложение I, уравнения (11) и (13)]; находим

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M}(1 - \operatorname{ch} \varkappa a) \qquad (102)$$



или

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{4K}{M} \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} \varkappa a. \qquad (103)$$

При $\omega = \omega_0$ уравнение (98) дает $k = 0$ и уравнение (103) также дает $k = 0$. Это соответствует плоским волнам, и, таким образом, мы получили совпадение характера волн на границе.

*Верхняя реактивная область.* Эта область включает в себя частоты, бо́льшие верхней частоты $\omega_{max}$, где $\omega^2_{max} = \omega_0^2 + 4K/M$. Мы познакомились с этой областью при изучении фильтров с двумя

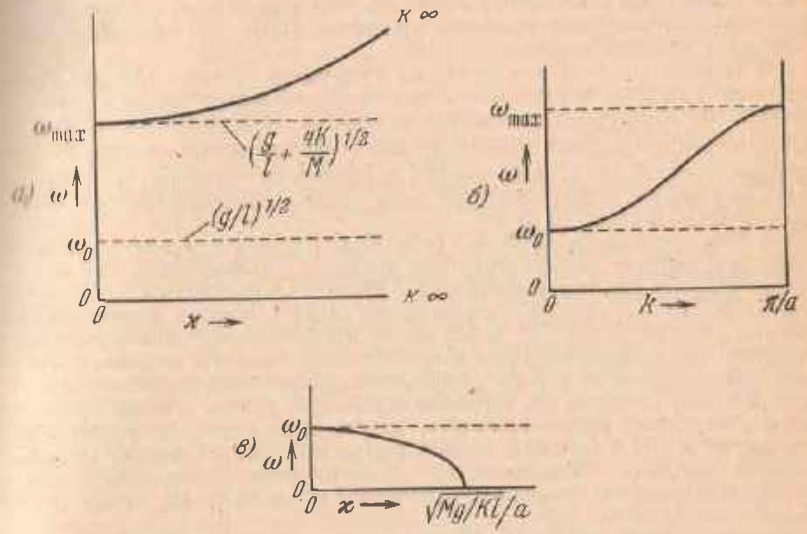



Рис. 3.13. Полное дисперсионное соотношение для связанных маятников.
*а*) Частота больше высокочастотного порога: волны являются зигзагообразными экспоненциальными волнами; б) область дисперсионных частот: синусоидальные волны; *в*) частота меньше низкочастотного порога: экспоненциальные волны.

степенями свободы. Мы нашли, что вынужденные колебания с частотой большей, чем верхняя частота, имеют «зигзагообразную» форму, подобную той, которую имеют самые высокие моды, и что они также уменьшаются по амплитуде с удалением от входа системы. (См. рис. 3.6.) Предположим, что форма $A_n$ определяется *экспоненциальной «зигзагообразной» волной*:

$$A_n = (-1)^n (Ae^{-\varkappa na} + Be^{+\varkappa na}). \qquad (104)$$

Тогда мы получим результат, отличающийся от уравнения (100) только знаком:

$$A_{n+1} + A_{n-1} = -A_n (e^{\varkappa a} + e^{-\varkappa a}).$$

Уравнение (93) даст закон дисперсии

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M}\left\{1 + \frac{1}{2}(e^{\varkappa a} + e^{-\varkappa a})\right\} = \omega_0^2 + \frac{2K}{M}\{1 + \operatorname{ch} \varkappa a\}, \qquad (105)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{M} \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} \varkappa a. \qquad (106)$$

При $\varkappa=0$ $\omega^2=\omega_0^2+4K/M=\omega_{max}^2$. Таким образом, точно на верхней граничной частоте $\omega_{max}$ у нас нет ослабления.

На рис. 3.13 показано полное дисперсионное соотношение для всех частот в соответствии с уравнениями (98), (103) и (106).

### Задачи и домашние опыты

**3.1.** Выполните алгебраические действия, необходимые для получения равенства (10):

$$E=E_0e^{-t/\tau}.$$

**3.2.** С помощью подстановки покажите, что смещение $x_1(t)$, определяемое уравнением (3), является решением уравнения (2) движения гармонического затухающего осциллятора.

**3.3.** Покажите, что если $x_1(t)$ является решением уравнения (1) для вынуждающей силы $F_1(t)$ и $x_2(t)$ — решением для другой вынуждающей силы $F_2(t)$, то силе $F(t)=F_1(t)+F_2(t)$ соответствует решение $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ при условии, что начальные условия $x(0)$ и $\dot{x}(0)$ для суперпозиции определяются суммой начальных условий, т. е. $x(0)=x_1(0)+x_2(0)$ и $\dot{x}(0)=\dot{x}_1(0)+\dot{x}_2(0)$.

**3.4.** С помощью подстановки покажите, что уравнения (15), (16) и (17) определяют решение уравнения (14).

**3.5.** Опыт. *Установление биений (переходные биения).* Для этого и некоторых последующих опытов понадобится проигрыватель, вращающийся диск которого используется для периодического воздействия на маятник. В качестве гири маятника можно взять любой груз, например банку консервов. Удобно работать с диском, вращающимся со скоростью 45 *об/мин*. (Чему равна соответствующая этому числу оборотов длина нити маятника?) Укрепите на диске проигрывателя легкую картонную коробку, а к коробке прикрепите карандаш в вертикальном положении. Наденьте на карандаш веревочную петлю, к петле привяжите конец 2—3-метрового резинового жгута. Другой конец жгута прикрепите к нити маятника. Измерьте с помощью часов с секундной стрелкой частоту свободных колебаний маятника. Измерьте частоту биений, когда на маятник действует вынуждающая сила со стороны вращающегося диска. Сделайте это для различных длин маятника.

Введите в систему затухания, заставив тереться обо что-либо нить маятника. (Можно использовать щель между двумя предметами, например книгами.) Большая длина резинового жгута взята для того, чтобы ослабить его действие как пружины. Лучше всего привязать резиновый жгут к нити маятника вблизи точки подвеса, так чтобы амплитуда движения нити в этой точке была значительно меньше амплитуды движения карандаша (на вертушке), даже для больших амплитуд маятника. Это обеспечит независимость возмущающей силы от амплитуды движения маятника.

**3.6.** Докажите справедливость выражения (22) для потерь мощности на трение. Докажите, что эти потери равны входной мощности [выражение (21)].

**3.7.** Опыт. *Резонанс в «пружине» с затуханием.* Растяните «пружину» примерно на 2,5 *м* и закрепите концы. Один конец должен быть закреплен так, чтобы его можно было легко освободить и закрепить снова после изменения числа витков между закрепленными концами. (Мы можем таким образом менять натяжение «пружины», не меняя ее длины.) Будем действовать на «пружину» с помощью вращающегося диска проигрывателя, соединенного с нею длинным резиновым жгутом (см. опыт 3.5). Пусть скорость вращения диска равна 45 *об/мин*. Измерьте частоту свободных колебаний «пружины». Эту частоту можно изменять, меняя число витков между закрепленными концами (см. опыт 2.1). *Измерьте среднее время затухания* $\tau$. Увеличьте затухание, натянув вдоль «пружины» длинную ленту, так, чтобы в результате получить время затухания в пределах от 10 до 20 *сек*. *Постройте резонансную кривую*, т. е. график зависимости $|A|^2$ от $\omega_0$ при фиксированном $\omega$, равном 45 *об/мин*. Наблюдайте за фазовыми соотношениями и убедитесь в том, что вы их понимаете. Величину $|A|$ можно измерить с помощью источника света, дающего резкую тень (точечный источник света). Определите



положения тени (на полу или стене) от кусочка ленты, прикрепленного к «пружине». Вычислите ожидаемую ширину резонансной кривой на уровне половины максимума. (Вы можете изменить время затухания, если резонанс получается слишком узким или слишком велико время исчезновения переходных биений.)

*Возможные источники трудностей.* Если резиновый жгут, соединяющий один конец «пружины» и карандаш на диске проигрывателя, полностью расслабляется в одном из положений диска и затем резко натягивается, то сила, действующая со стороны резинового жгута (вспомните о фурье-анализе), будет содержать гармоники частоты 45 *об/мин*, а не только эту частоту. Соответственно будут возбуждаться гармоники «пружины». Это затруднение весьма интересно и поучительно. *Другая трудность.* Тряхните резиновый жгут и наблюдайте за его колебаниями. Убедитесь в том, что частота его колебаний гораздо больше 45 *об/мин*. В противном случае в нашем опыте возникнут неожиданные препятствия. Вы можете столкнуться и с другими проблемами. Интересно заметить исчезновение дисперсионной амплитуды и появление амплитуды поглощения вблизи резонанса. Для этого нужно наблюдать за относительной фазой диска (т. е. за карандашом) и «пружины». Чему равно произведение полной резонансной ширины на среднее время затухания? Согласуется ли ваш результат (если принять во внимание ошибки опыта) с уравнением (28)?

**3.8.** Опыт. *Вынужденные колебания системы из двух связанных маятников.* Система показана на рис. 3.3, а соответствующая теория разобрана в пп. 3.3 и 3.4. Нити, на которых подвешены грузы, можно наматывать на горизонтально расположенную палку. Это дает возможность менять частоты маятников. Палки могут быть закреплены на столе, книжном шкафу или другим образом. Нужно иметь возможность менять длину веревок в пределах 30÷70 *см*. Меняя длину нитей, вы меняете $\omega_1^2$ и $\omega_2^2$ таким образом, что их разность остается постоянной. Поэтому изменение длины нити при постоянной частоте возмущающей силы почти эквивалентно изменению частоты возмущающего воздействия при постоянных $\omega_1^2$ и $\omega_2^2$. Для данных длин нитей измерьте частоты обеих мод (при отсоединенном жгуте). Затем подсоедините маятники к диску, вращающемуся со скоростью 45 *об/мин*, и возбудите продольные колебания «пружины». Легко заметить, что продольные и поперечные моды имеют одинаковые наборы частот. Это может создать помехи для опыта, особенно вблизи резонанса, но наблюдать такие помехи поучительно. Имеется пять представляющих особый интерес частот. Это две резонансные частоты, частота, лежащая посередине между ними, и области частот значительно больших, чем резонансные, и значительно меньших. Вспомните характеристики фильтра выше и ниже граничной частоты. Изучите и поймите фазовые соотношения. При отсутствии затухания переходные биения могут длиться очень долго. Лучше всего внести затухание, заставив нити тереться обо что-либо. Вероятно, наблюдение резонансных кривых потребует много времени. (Можете это не делать, если вы выполнили опыт 3.7.) Вместо этого измерьте время затухания для обеих мод и определите ожидаемую ширину резонанса $\Gamma$, используя соотношение $\Delta\nu\tau=1$. Совпадает ли ваш результат с ситуацией, разобранной на рис. 3.4? Справедливы ли здесь уравнения для механического фильтра (п. 3.4)?

Другой способ изменения частоты заключается, очевидно, в использовании различных скоростей вращения диска, которые могут принимать значения 78, 45, 33 и 16 *об/мин*. К сожалению, скорость вращения диска нельзя менять непрерывно.

**3.9.** Отбойный молоток бьет асфальт с частотой 20 *гц*. Рукоятка молотка воздействует на руки рабочего с такой же частотой. Разработайте низкочастотный фильтр и, соединив его с рукояткой, уменьшите амплитуду ее вибраций в 10 раз. Один способ заключается в десятикратном увеличении массы той части молотка, которая испытывает отдачу. Поскольку молоток и без этого весит около 20 *кГ*, попытайтесь воспользоваться пружинами и массами.

**3.10.** Докажите, что среднее во времени значение запасенной энергии для установившихся колебаний определяется выражением (23).

**3.11.** Докажите, что точки половинной мощности для резонансной кривой в установившемся режиме определяются выражениями (25) и (26).

**3.12.** *Механический фильтр* (см. п. 3.4). Весьма чувствительный прибор находится на полу, совершающем вертикальные колебания с частотой около 20 *гц*. Вы хотите ослабить эти колебания в 100 раз и поэтому кладете прибор на «подушку». Как низко опустится вершина «подушки», когда вы положите на нее прибор? (Указание. См. пример, следующий за уравнением (58), п. 3.4. «Подушку» можно аппроксимировать идеальной, т. е. подчиняющейся закону Гука, пружиной.)

Ответ. Около 6 *см*.

**3.13.** Покажите, что уравнение (31) дает точное решение уравнения (14) для осциллятора, находящегося под внешним воздействием (в установившемся режиме), когда коэффициент затухания Γ равен нулю.

**3.14.** Покажите, что если маятники (рис. 3.10) соединены с помощью «пружин», то они имеют такие же уравнения движения для поперечных колебаний в горизонтальной плоскости, как и для показанного на рисунке продольного движения.

**3.15.** Нарисуйте систему индуктивностей и емкостей, которая описывалась бы уравнениями движения, аналогичными уравнению (62), и выведите уравнения движения.

**3.16.** Опыт. *Механический полосовой фильтр*. Имея лишь два связанных маятника, невозможно наблюдать экспоненциальный характер фильтрации, так как через две точки может проходить любая кривая. Поместите между двумя маятниками третий, чтобы получилась система, показанная на рис. 3.6 или 3.7. С помощью вращающегося диска проигрывателя воздействуйте на систему с частотой, большей и меньшей частоты среза. Измерьте отношения $\psi_a/\psi_b$ и $\psi_a/\psi_c$. Равны ли они? Должны ли они быть равны?

**3.17.** Предположим, что у ионосферы существует резкая граница, где граничная частота $\nu_p$ скачком возрастает от 0 до 20 *Мгц*. Найдите глубину проникновения $\delta$ для амплитуды радиоволн с частотой 1000 *кгц*.

Ответ. Около 2,5 *м* независимо от частоты, пока $\omega \ll \omega_p$.

**3.18.** Напишите закон дисперсии для системы связанных индуктивностей и емкостей, используя в качестве аналога систему связанных маятников. Нас интересует закон дисперсии в полосе пропускания и в окрестности обеих граничных частот.

**3.19.** Покажите, что если мы используем приближение слабого затухания и находимся достаточно близко от резонанса, то амплитуда поглощения и амплитуда дисперсии могут быть записаны (при соответствующем выборе единиц) в следующем виде:

$$A_п = \frac{1}{x^2+1}, \quad A_д = \frac{-x}{x^2+1},$$

где $x = (\omega - \omega_0)/{}^1\!/_2\Gamma$.

**3.20.** Предположим, что имеем систему с двумя резонансами (на частотах $\omega_1$ и $\omega_2$), которые дают одинаковый вклад в амплитуду дисперсии некоторого движущегося элемента. Для частоты $\omega$, далекой как от $\omega_1$, так и от $\omega_2$, имеем

$$A_д = \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2}.$$

Покажите, что если $\omega$ отличается от $\omega_1$ и $\omega_2$ на величину значительно большую, чем их разность $\omega_2 - \omega_1$, то $A_д$ (в хорошем приближении) в два раза больше любого из слагаемых. Иными словами, покажите, что

$$A_д = \left(\frac{2}{\omega_{ср}^2 - \omega^2}\right)\{1 + \varepsilon^2 + \ldots\},$$

где

$$\omega_{ср} = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2), \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{\omega_{ср}^2 - \omega^2}.$$

**3.21.** Рассмотрим дисперсионное соотношение для связанных маятников (уравнения (98), (103) и (106)). Положим, что $a/\lambda \ll 1$ и $a/\delta \ll 1$. В этом случае



непрерывное приближение будет достаточно хорошим. (Почему?) Разложите дисперсионное соотношение в ряд Тейлора и оставьте первый член разложения. Сравните результат с тем, который был получен для непрерывного приближения, в п. 3.5.

**3.22.** *Бесконечные переходные биения* (см. п. 3.2). Покажите, что переходные колебания осциллятора с нулевым затуханием имеют вид «амплитудно-модулированных почти гармонических колебаний», т. е. подтвердите уравнение (43).

Покажите, что в случае нулевого затухания и совпадения частоты вынуждающей силы с резонансной частотой модулированная амплитуда линейно растет со временем [уравнение (45)].

**3.23.** Опыт. *Экспоненциальное проникновение волн в реактивную область*. Соберите систему из маятников и «пружин», показанную на рис. 3.12. Воздействуйте на один конец системы с помощью вращающегося проигрывателя. Выберите длины маятников так, чтобы частота 78 *об/мин* была больше верхней граничной частоты, частота 45 *об/мин* лежала бы в полосе пропускания, а частота 33 *об/мин* (и 16 *об/мин*) была меньше нижней граничной частоты. Если вы придумаете быстрый и легкий способ одновременно менять длину всех маятников, то сможете непрерывно изменять $\omega_0^2$ (а тем самым и все резонансные частоты), сохраняя частоту внешнего воздействия постоянной, и искать резонансы.

**3.24.** *Переходные биения*. Получите уравнение (46), которое определяет зависимость от времени энергии, запасенной осциллятором, находящимся под внешним воздействием. В момент $t=0$ энергия равна нулю. Считайте, что затухание мало. Пусть частота внешнего воздействия близка (но не точно равна) к $\omega_1$. Там, где это возможно, положите $\omega/\omega_1 = 1$. (Например, в выражении типа $\cos\omega t - \cos\omega_1 t$ нельзя положить $\omega = \omega_1$, поскольку, какой бы малой ни была разница между $\omega$ и $\omega_1$, она в конечном счете приведет к большим эффектам, т. е. к большим сдвигам фазы.)

**3.25.** Покажите, что решение для осциллятора с большим затуханием [уравнение (9), п. 3.2] следует из решения (7) и формулы (8). (Указание. Докажите тождества $\cos ix = \operatorname{ch} x$, $\sin ix = i \operatorname{sh} x$; воспользуйтесь ими.)

**3.26.** *Критическое затухание*. Исходя из решения для свободных колебаний с затуханием [уравнение (7)], покажите, что для критического затухания решение имеет вид

$$x_1(t) = e^{-{}^1\!/_2\Gamma t}\left\{x_1(0) + \left[\dot{x}_1(0) + \frac{1}{2}\Gamma x_1(0)\right]t\right\}.$$

Покажите, что такой же результат получится, если исходить из решения для осциллятора с большим затуханием [уравнение (9)].

**3.27.** Опыт. *Ширина резонанса для картонной трубки*. Прочитайте абзацы, следующие за формулой (28). Для самой низкой нормальной моды колебаний звуковых волн в трубке, открытой с обоих концов, длина трубки практически равна половине длины волны. (В действительности, благодаря краевым эффектам, длина трубки меньше половины длины волны приблизительно на один диаметр трубки.) Скорость звука около 330 *м/сек*. Если вы работаете с камертоном С523, то громче всего будет резонировать трубка, длина которой близка к 32 *см*.

а) Проверьте это утверждение. Резонансная частота $\nu_0$ для трубки с длиной $L$ равна

$$\nu_0 = \frac{523}{(L/L_0)} = \frac{\omega_0}{2\pi},$$

где $L_0 \approx 32$ *см* ($L_0$ не равно точно 32 *см* в связи со сказанным выше).

б) Проверьте эту формулу. Теперь нарежьте 5 или 6 трубок со значениями $L$, специально выбранными так, чтобы «покрыть» резонансный пик и две точки половинной мощности с каждой стороны пика. Следует считать, что интенсивность звука $I$ будет иметь «резонансную форму»

$$I = \frac{({}^1\!/_2\Gamma)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + ({}^1\!/_2\Gamma)^2}.$$

Здесь величина $I$ нормирована так, чтобы $I = 1{,}0$, при $\omega = \omega_0$. В нашем опыте частота внешнего воздействия $\omega$ определяется частотой камертона и поэтому

постоянна. Резонансная частота изменяется с изменением длины трубки. Вы должны найти длину трубки $L_0$, отвечающую резонансу (легче всего это сделать на слух, ударяя по трубке и сравнивая слышимый звук со звуком камертона). После этого следует найти две длины трубок, соответствующие точкам половинной мощности. Таким образом вы сможете оценить ширину резонанса, т. е. величину $\Gamma$, а следовательно, и время затухания колебаний. Основная трудность в этом опыте — придумать способ, с помощью которого можно оценить двукратное уменьшение интенсивности звука.

3.28. *Два связанных маятника как механический полосовой фильтр.* Рассмотрите систему, показанную на рис. 3.3 и описанную в п. 3.3. Пренебрегая затуханием, покажите, что

$$\psi_a \approx \frac{F_0}{2M}\cos\omega t\left\{\frac{1}{\omega_1^2-\omega^2}+\frac{1}{\omega_2^2-\omega^2}\right\},$$

$$\psi_b \approx \frac{F_0}{2M}\cos\omega t\left\{\frac{1}{\omega_1^2-\omega^2}-\frac{1}{\omega_2^2-\omega^2}\right\}$$

и

$$\frac{\psi_b}{\psi_a} \approx \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2+\omega_1^2-2\omega^2},$$

где $\omega_1$ и $\omega_2$ — соответственно меньшая и большая частота двух мод, а $\omega$ — частота внешнего воздействия.

3.29. *Электрический полосовой фильтр.* Рассмотрите фильтр, показанный на рис. 3.8. Найдите дифференциальные уравнения для $I_a$ и $I_b$. Покажите, что нормальные координаты равны $I_a+I_b$ и $I_a-I_b$ и что моды колебаний определяются уравнениями (59).

3.30. *Связанные маятники.* Рассмотрим линейную последовательность связанных маятников, на которые в точке $z=0$ действует вынуждающая периодическая сила. Ее частота меньше граничной частоты. В точке $z=L$ система прикреплена к твердой стене, как показано на рис. 3.11. Покажите, что если в $z=0$ $\psi(z,t)$ равно $A_0\cos\omega t$, то $\psi(z,t)=A(z)\cos\omega t$, где

$$A(z)=A_0\frac{[e^{-\varkappa z}-e^{-\varkappa L}e^{-\varkappa(L-z)}]}{1-e^{-2\varkappa L}}.$$

Обратите внимание на то, что для $L\to\infty$ это выражение просто равно $A_0e^{-\varkappa z}$.

3.31. *Резонанс в системе связанных маятников.* Прочтите рассуждения, следующие за уравнением (90). Найдите резонансные значения $\omega^2$ следующим образом.

а) Покажите, что при резонансе имеет место равенство

$$k\operatorname{ctg}kL=-\varkappa,$$

из которого следует, что резонансные значения $\theta=kL$ должны лежать во II квадранте (90÷810°), IV квадранте (270÷360°), VI, VIII и т. п. квадрантах.

б) Будем измерять возвращающую силу, приходящуюся на единицу смещения и на единицу массы (т. е. $\omega^2$), в единицах $Ka^2/ML^2$. Обозначим $g/l_1=\omega_1^2$, $g/l_2=\omega_2^2$. Покажите, что резонансные значения $\omega^2$ можно получить, построив график двух функций

$$\omega^2=\omega_1^2+\theta^2,\quad \omega^2=\omega_2^2-\theta^2\operatorname{ctg}^2\theta$$

относительно $\theta$.

Резонансы определяются половиной точек пересечения двух кривых. Почему только половиной? (Замечание. Обратите внимание на то, что $\omega^2$, $\omega_1^2$ и $\omega_2^2$ безразмерны в приведенных выше выражениях, т. е. что они даны в единицах $Ka^2/ML^2$.) Постройте график распределения резонансных частот. Что происходит при очень высоких частотах?

3.32. *Полное отражение видимого света от посеребренного зеркала.* Предположим, что валентный электрон атома серебра становится «свободным» электроном в твердом куске серебра. Посмотрите (в справочниках по химии и физике), чему



равны валентность, атомный вес и плотность серебра. Найдите число свободных электронов в единице объема твердого серебра. Предположим, что дисперсионное соотношение для света в серебре имеет такой же вид, как и для света (или другого электромагнитного излучения) в ионосфере, т. е.

$$\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2,\quad \text{если}\quad \omega^2\geqslant\omega_p^2,$$

$$\omega^2=\omega_p^2-c^2\varkappa^2,\quad \text{если}\quad \omega^2\leqslant\omega_p^2,$$

где $\omega_p=4\pi Ne^2/m$, а $e$ и $m$ — заряд и масса электрона.

а) Вычислите критическую частоту $\nu_p$ для твердого серебра. Покажите, что частота $\nu$ для видимого света меньше критической граничной частоты. Поэтому следует ожидать, что достаточно толстый слой серебра обеспечит полное отражение нормально падающего видимого света. Это и происходит в случае посеребренного зеркала.

б) Вычислите среднюю глубину проникновения $\delta$ для красного света (длина волны в вакууме $0{,}65\cdot10^{-4}$ *см*) и для голубого света (длина волны в вакууме $0{,}45\cdot10^{-4}$ *см*). Полупосеребренное зеркало представляет собой пластинку стекла, на которую нанесен слой серебра с толщиной, меньшей глубины проникновения, так что примерно около половины света проходит через зеркало (т. е. отражение не полное). Предположим, что вы смотрите через полупосеребренное зеркало на «белую» лампу. («Белый» свет в действительности содержит все видимые цвета.) Будет ли пропущенный свет белым? Будет ли он иметь голубой или красный оттенок? Что можно сказать про отраженный свет?

в) Какой толщины должен быть слой серебра, чтобы интенсивность голубого цвета (интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды) уменьшилась в 100 раз на задней поверхности слоя серебра? Такое зеркало должно отражать 99% падающего света. (В действительности для видимого света отражение близко к 95%. Мы пренебрегли потерями энергии, связанными с активным сопротивлением серебра. Кроме того, поверхность серебра может тускнеть из-за образования окиси серебра, свойства которой отличны от свойств металлического серебра.)

г) Для каких частот слой серебра становится прозрачным? (Укажите соответствующую длину волны в вакууме. Излучение такой частоты называется «ультрафиолетовым» светом.)

3.33. Опыт. *Пилообразные стоячие волны в мелкой воде.* Такие волны были рассмотрены в задаче 2.31. Здесь мы хотим узнать, как возбудить самую низкую пилообразную моду в сосуде с водой. Самая низкая мода — это мода «омывания»; она состоит только из половинки зубца. Поверхность воды плоская, и длина сосуда равна половине длины волны. Следующая пилообразная мода будет иметь один полный зубец, т. е. длина сосуда будет равна одной длине волны (первой фурье-компоненты пилообразного зубца). Эта мода не возбуждается, когда вы толкаете сосуд туда и обратно. *Объясните, почему.* Третья мода состоит из 1,5 зубца, т. е. из трех плоских участков. Таким образом, длина сосуда соответствует трем половинам длины волны. Попробуйте возбудить эту моду, слегка потряхивая сосуд. Убедившись в том, что эта мода возбуждена, наблюдайте свободные колебания. После некоторой практики вы сможете легко возбуждать и опознавать эту моду. Приведем более надежный способ. Достаньте метроном или сделайте его сами, воспользовавшись маятником, который производит звук, ударяя по бумаге или еще чему-либо. Установив метроном на определенную частоту, покачивайте сосуд в такт с метрономом до тех пор, пока не получите установившееся состояние. Меняйте частоту метронома, чтобы найти резонанс. Вблизи резонанса вы можете наблюдать *переходные биения*. Они не только красивы; по ним можно судить, как далека система от резонанса. Вычислите ожидаемую резонансную частоту, используя соотношение $\lambda\nu=\sqrt{gh}$. Подсчитайте эту частоту заранее, чтобы быстро достичь резонанса, установив нужную частоту метронома. Когда вы достигните резонанса, предоставьте воде колебаться и измерьте время затухания свободных колебаний.

Если сосуд достаточно легок, так что масса сосуда с водой определяется главным образом массой воды, и если полная масса достаточно велика, чтобы сообщить достаточную отдачу, то резонанс можно почувствовать по ощущению отдачи в руках. В этом случае нет нужды в метрономе. Вы сможете видеть всплески,

если возбудите пилообразные волны в обоих горизонтальных направлениях. В результате вода будет выбрасываться в воздух. Линейная теория колебаний не в силах объяснить это явление.

**3.34.** Опыт. *Прямоугольные двухмерные стоячие волны.* Возьмите прямоугольную коробку из полиэтилена, в которой хранят лед, или другой подобный сосуд. Наполните его до краев водой и затем добавьте воды настолько, чтобы переполнить сосуд. (Это уменьшит затухание, вносимое сторонами коробки.) Легонько стукните по коробке и наблюдайте свободные колебания стоячих волн. Достаньте гироскоп (детскую игрушку). Поднесите вращающийся гироскоп к одной стороне коробки. Вы сможете наблюдать постепенное уменьшение длин волн вынужденных колебаний (стоячие волны) по мере уменьшения скорости вращения гироскопа. Вероятно, вам удастся наблюдать и прохождение через резонанс.

**3.35.** Опыт. *Стоячие волны в воде.*

а) Погрузите вибрирующий камертон в воду и наблюдайте за волнами, особенно за волнами между стержнями камертона.

б) Расположите вибрирующий камертон над поверхностью воды и смотрите в пространство между стержнями камертона. (Некоторые моды камертона быстро затухают. Имеется одна, которая существует несколько секунд.) Попытайтесь осветить камертон под различными углами с помощью небольшой лампочки (параллельно и перпендикулярно гребням), чтобы увидеть удивительную «структуру» колебаний.

**3.36.** *Гармоники и субгармоники.* Дан гармонический осциллятор с частотой собственных колебаний $\nu_0 = 10$ *гц* и очень большим временем релаксации. Если на осциллятор действует гармоническая сила с частотой 10 *гц*, то амплитуда колебаний осциллятора станет большой, т. е. он будет резонировать с частотой возбуждающей силы. Никакая другая гармоническая сила не сможет вызвать колебаний со столь большой амплитудой. (Очевидно, нужно сравнивать силы одинаковой величины, но разной частоты.)

а) Докажите это утверждение. Предположим далее, что осциллятор подвержен действию силы, которая представляет собой повторяющиеся с периодом 1 *сек* прямоугольные импульсы длительностью 0,01 *сек*.

б) Опишите качественно результаты фурье-анализа повторяющихся прямоугольных импульсов.

в) Будет ли гармонический осциллятор резонировать (т. е. приобретать большую амплитуду) под действием этой внешней силы?

г) Положим, что внешняя сила имеет вид таких же импульсов (длительностью 0,01 *сек*), но с периодом 0,5 *сек*. Будет ли осциллятор резонировать? Ответьте на тот же вопрос, если скорость повторения импульсов равна 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 *сек*.

д) Теперь перейдем к новым явлениям. Что произойдет, если действовать на осциллятор импульсами с частотой повторения 20 *гц*? Будет ли осциллятор резонировать? Обратите внимание, что частота осциллятора в этом случае является субгармоникой основной частоты повторения вынуждающих импульсов.

е) Рассмотрите случай, когда частота повторения импульсов внешней силы кратна 3, 4 и т. д. собственным частотам осциллятора. Будет ли осциллятор резонировать? Объясните, что будет происходить.

ж) Теперь опять несколько новых явлений. Предположим, что внешняя сила действует на осциллятор только в те моменты времени, когда его смещения от положения равновесия положительны. Так происходит, например, когда вы раскачиваете качели. Рассмотрите вопрос о возбуждении субгармоник для этого случая. Предположим, что качели колеблются с частотой 1 *гц*. Если вы будете производить толчки с частотой 2 *гц* (независимо от того, где находятся качели, т. е. часть толчков может быть сделана впустую), будут ли качели резонировать? Тот же вопрос для частоты 3 и 3,5 *гц*. Теперь объясните, почему высокочастотные колебания мотора самолета могут возбудить резонанс на значительно более низких частотах, которые являются субгармониками возмущающей частоты, т. е. составляют $^1/_2$, $^1/_3$ и т. д. от этой частоты. Считаете ли вы, что возбуждение субгармоник — обычное явление для вибрирующих систем? Объясните.



ГЛАВА 4

# БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ

## 4.1. Введение

В главах 1—3 были рассмотрены *замкнутые системы*, т. е. системы, заключенные в определенные границы, причем энергия системы локализована в этих границах. Было показано, что свободные колебания замкнутой системы могут быть представлены суперпозицией стоячих волн или мод и что установившиеся вынужденные колебания могут быть описаны суперпозицией стоячих волн, которые представляют собой вклады от каждой моды. Характер входящих в суперпозицию мод определяется граничными условиями.

*Открытые системы.* В этой главе мы будем рассматривать вынужденные колебания *открытых систем*, т. е. систем, *не имеющих внешних границ*. Например, если кто-то играет на трубе, находясь на воздушном шаре высоко над землей, то воздух можно считать открытой системой, если пренебречь эхом, т. е. отражением от земли к трубе. Если труба звучит в комнате с полом из твердой древесины, стенами и потолком, явление будет протекать совершенно по-другому. В этом случае воздух в комнате представляет собой замкнутую систему, и при соответствующих условиях возбуждения он будет резонировать на частотах его мод. Покроем стены комнаты звукопоглощающим материалом. В этом случае звуковые волны от стен не отражаются и комната ведет себя как открытая система, т. е. система без внешних границ. Из этого примера видно, что бесконечная протяженность среды не является необходимым условием для того, чтобы систему можно было считать открытой.

Волны, образованные внешним воздействием, приложенным к открытой среде, называются *бегущими волнами*: они «бегут» от создающего их источника. Важное свойство бегущих волн заключается в том, что они переносят энергию и импульс. Так, например, капля, упавшая на спокойную поверхность водоема, вызывает распространение круговых волн, которые могут сообщить кинетическую энергию

плавающему в отдалении насекомому или увеличить потенциальную энергию прутика, одна половина которого находится в воде, а другая — на песчаном берегу.

Если внешняя сила (приложенная к открытой среде) совершает гармоническое колебание, то вызванные ею волны называются *гармоническими бегущими волнами*. В установившемся состоянии все движущиеся элементы системы совершают гармоническое движение с частотой внешнего воздействия.

*Амплитудные соотношения.* Если волна распространяется в двухмерной или трехмерной среде, то амплитуда движения будет тем меньше, чем дальше от источника находится движущийся элемент (предполагается, что источник мал). С другой стороны, если среда одномерная (например, натянутая струна, к одному концу которой приложена внешняя сила, а другой конец простирается до бесконечности или подсоединен к устройству, которое поглощает волну), то амплитуда движущихся элементов, совершающих гармоническое колебание, не будет уменьшаться с увеличением расстояния от источника (предполагается, что среда однородна). Это может быть справедливо не только для одномерных волн, но и в случае двухмерных «прямых волн» (зыбь на поверхности океана от далекого шторма) и трехмерных «плоских волн» (радиоволны от далеких звезд).

*Фазовые соотношения.* Относительная фаза двух различных движущихся элементов открытой среды, по которой распространяются гармонические бегущие волны, не совпадает с относительной фазой для стоячих волн в замкнутой системе. В случае стоячей волны, которая может быть либо нормальной модой свободных колебаний замкнутой системы, либо ее вынужденным колебанием, все движущиеся элементы колеблются в фазе друг с другом (с точностью до возможного изменения знака смещения). Иначе обстоит дело для бегущей волны. Если движущийся элемент бесконечной струны $b$ находится дальше от внешней силы, чем движущийся элемент $a$, то он будет совершать то же движение, что и $a$, но в более поздний момент времени.

Это запаздывание равно времени, необходимому, чтобы волна пробежала расстояние от $a$ до $b$. Таким образом, фаза элемента $b$ отлична от фазы элемента $a$ на величину, равную произведению частоты на время запаздывания.

## 4.2. Гармонические бегущие волны в одномерном пространстве и фазовая скорость

Предположим, что наша одномерная система является непрерывной однородной струной, простирающейся от $z=0$ до бесконечности. В точке $z=0$ струна присоединена к выходным зажимам устройства («передатчика»), которое может ее «трясти» и таким образом вызывать распространение бегущих волн вдоль струны. Предположим, что смещение на выходе передатчика является гармонической



функцией времени:

$$D(t) = A\cos\omega t. \tag{1}$$

Мы хотим найти смещение $\psi(z, t)$ движущегося элемента, координата $z$ которого лежит где-то между $z=0$ и бесконечностью. Легко написать выражение $\psi(z, t)$ для $z=0$. Так как струна присоединена непосредственно к выходу передатчика, то смещение струны в $z=0$ равно $D(t)$:

$$\psi(0, t) = D(t) = A\cos\omega t. \tag{2}$$

*Фазовая скорость.* Из повседневного опыта нам известно, что бегущие по воде волны распространяются с постоянной скоростью, пока свойства среды (например, глубина воды) не меняются. В случае гармонических бегущих волн эта скорость называется *фазовой скоростью* $v_\Phi$. Мы также знаем, что смещение элемента с координатой $z$ в момент времени $t$ равно смещению элемента с координатой $z=0$ в более ранний момент времени $t'$. Разность между $t$ и $t'$ равна времени, которое нужно волне, распространяющейся со скоростью $v_\Phi$, чтобы пройти расстояние $z$:

$$t' = t - \frac{z}{v_\Phi}. \tag{3}$$

Поэтому уравнение бегущей синусоидальной волны имеет вид

$$\psi(z, t) = \psi(0, t') = A\cos\omega t' =$$

$$= A\cos\omega\left(t - \frac{z}{v_\Phi}\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega z}{v_\Phi}\right). \tag{4}$$

Заметим, что для фиксированного $z$ смещение $\psi(z, t)$ является гармонической функцией времени. Аналогично, для фиксированного времени $t$ функция $\psi(z, t)$ представляет собой синусоиду в пространстве. Конечно, оба эти утверждения справедливы и для синусоидальной стоячей волны, уравнение которой имеет, например, следующий вид:

$$\psi(z, t) = B\cos\omega t\cos(\alpha - kz), \tag{5}$$

где $\alpha$ — константа. Для фиксированного момента времени бегущая волна, определяемая выражением (4), имеет такую же форму, что и стоячая волна (5). Если уравнение бегущей волны переписать в виде

$$\psi(z, t) = A\cos(\omega t - kz), \tag{6}$$

то мы сможем использовать понятие волнового числа $k$ (и длины волны $\lambda$) точно так же, как это было сделано в случае стоячей волны. Сравнивая уравнения (4) и (6), мы видим, что для синусоидальной бегущей волны в фиксированный момент времени скорость возрастания фазового угла на единицу длины (это и есть величина $k$) равна

$$k = \frac{\omega}{v_\Phi}. \tag{7}$$

Это значит, что фазовую скорость можно выразить формулой

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}, \tag{8а}$$

или, так как $\omega = 2\pi\nu$ и $k = 2\pi/\lambda$,

$$v_\phi = \lambda\nu, \tag{8б}$$

или, так как $\nu = 1/T$,

$$v_\phi = \frac{\lambda}{T}. \tag{8в}$$

Фазовая скорость синусоидальной бегущей волны является очень важной величиной. Мы специально привели различные формы уравнения (8), которые рекомендуем выучить наизусть. На рис. 4.1 показана синусоидальная бегущая волна.

Выражения (8) имеют большое значение, и мы получим их другим способом. Определим *фазовую функцию* $\varphi(z, t)$ синусоидальной бегущей волны, распространяющейся в направлении $+z$, как аргумент волновой функции $\cos(\omega t - kz)$:

$$\varphi(z, t) = \omega t - kz. \tag{9}$$

При данном $z$ фаза линейно растет со временем (член $\omega t$). Для заданного $t$ она линейно уменьшается с ростом $z$ (член $-kz$). Увеличение $z$ уменьшает фазу, так как большего значения $z$ достигает волна, испущенная раньше. (Выбранная нами система знаков не может считаться универсальной. Иногда имеют дело с фазой $kz - \omega t$.) Если мы хотим следить за каким-нибудь гребнем волны [максимум $\cos\varphi(z, t)$] или за ее впадиной [минимум $\cos\varphi(z, t)$] при распространении волны, то должны по мере увеличения времени переходить ко все большим значениям $z$, с тем чтобы фаза $\varphi(z, t)$ была постоянна. Беря полный дифференциал от $\varphi(z, t)$ и полагая его равным нулю, легко найти соотношение между $z$ и $t$ для точек постоянной фазы. Полный дифференциал от $\varphi(z, t)$ имеет вид

$$d\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) dt + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) dz = \omega\, dt - k\, dz. \tag{10}$$

Он равен нулю, если

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}. \tag{11}$$

Мы получили равенство (8а).

*Совпадают ли дисперсионные соотношения для бегущей и стоячей волны?* В главе 2 было показано, что дисперсионное соотношение, определяющее зависимость частоты $\omega$ от волнового числа $k$ (или $k$ от $\omega$) для стоячих волн свободных колебаний в данной среде, не



зависит от граничных условий, хотя реализующиеся частные значения $k$ зависят от них. В главе 3 мы нашли, что стоячие волны вынужденных колебаний замкнутой системы удовлетворяют тому же дисперсионному закону, что и стоячие волны свободных колебаний с определенными значениями $k$, зависящими от граничных условий. (Мы открыли также волны нового типа, а именно экспоненциальные волны, которые появляются при воздействии на систему с частотой, большей или меньшей частоты максимальной или минимальной моды.)

Теперь, при рассмотрении бегущих волн в открытых системах, у нас есть только одно граничное условие, относящееся к концу, соединенному с передатчиком. Можно думать, что, как и раньше, дисперсионное соотношение не будет зависеть от граничных условий. Однако бегущая волна отличается от стоячей волны (свободных или вынужденных колебаний) тем, что различные движущиеся элементы системы имеют разные фазы, тогда как в стоячей волне (трением пренебрегаем) все движущиеся элементы имеют одинаковую фазу.

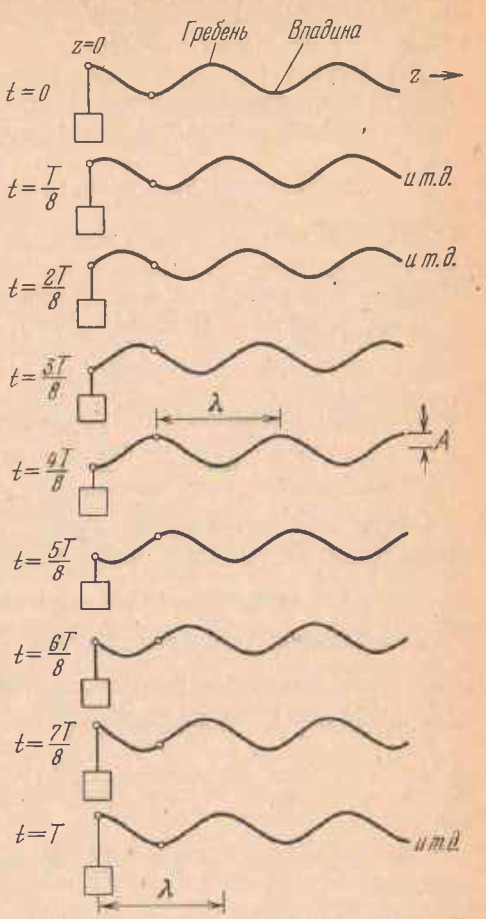



Рис. 4.1. Вынуждающая сила (в точке $z=0$) создает гармоническое движение с периодом $T$. В направлении $+z$ распространяется бегущая волна.

Длина волны $\lambda$. Фазовая скорость равна $\lambda/T = \omega/k = \lambda\nu$. Каждая точка струны повторяет в более поздний момент времени гармоническое движение точки $z=0$.

Не может ли это обстоятельство изменить дисперсионное соотношение? Как мы сейчас покажем, дисперсионное соотношение остается неизменным.

*Дисперсионное соотношение для линейной последовательности связанных маятников.* Рассмотрим частный случай (имеющий, однако, достаточно общее значение), который покажет нам, что дисперсионное соотношение имеет одну и ту же форму как для бегущих, так и для стоячих волн. Мы начали рассмотрение бегущих волн, выбрав в качестве модели непрерывную струну. Однако бегущие волны можно изучать, подобно стоячим волнам, на моделях с

сосредоточенными параметрами. Весьма общие результаты можно получить, рассмотрев уже знакомую нам систему связанных маятников. Мы будем искать *дисперсионное соотношение для бесконечной линейной последовательности связанных маятников*, на которую в точке $z=0$ действует внешняя сила.

Вернемся к рис. 3.10 из п. 3.5, на котором показано взаимное расположение трех связанных маятников. Перепишем точное уравнение (3.62) движения для $n$-го маятника:

$$\ddot{\psi}_n = -\frac{g}{l}\psi_n + \frac{K}{M}(\psi_{n+1} - \psi_n) - \frac{K}{M}(\psi_n - \psi_{n-1}). \qquad (12)$$

В установившейся бегущей волне (так же как и при вынужденных установившихся колебаниях замкнутой системы) все движущиеся элементы совершают гармоническое движение. Поэтому, какой бы ни была фазовая константа, для $\psi_n$ должно выполняться условие

$$\ddot{\psi}_n = -\omega^2\psi_n. \qquad (13)$$

Подставляя уравнение (13) в уравнение (12) и деля на $\psi_n(t)$, получим

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{M} - \frac{K}{M}\frac{(\psi_{n+1} + \psi_{n-1})}{\psi_n}. \qquad (14)$$

*Синусоидальная бегущая волна.* Предположим, что мы имеем *синусоидальную бегущую волну* вида

$$\psi_n = A\cos(\omega t + \varphi - kz), \qquad z = na.$$

Легко показать, что в этом случае

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = 2\psi_n \cos ka$$

и уравнение (14) принимает вид

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{M}(1 - \cos ka) \qquad (15)$$

или

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M}\sin^2\frac{1}{2}ka. \qquad (16)$$

Это соотношение в точности повторяет дисперсионное соотношение [уравнения (3.91)—(3.98), п.3.5] для вынужденных колебаний. Мы видим, что диапазон частот у синусоидальных волн одинаков для бегущих и для стоячих волн и простирается от $\omega_{min}$ до $\omega_{max}$, где

$$\omega_{min}^2 = \frac{g}{l} = \omega_0^2, \quad \omega_{max}^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M}. \qquad (17)$$

*Экспоненциальные волны в открытой системе.* Можно думать, что для открытой системы при частотах возмущающего воздействия, меньших граничной частоты $\omega_{min} = \omega_0$, дисперсионный закон имеет тот же вид, что и для замкнутой системы. Это предположение верно. Для открытой системы связанных маятников, простирающейся от $z=0$ до $+\infty$ (внешнее воздействие приложено в точке $z=0$) и



возбуждаемой в точке $z=0$ частотой $\omega<\omega_0$, имеем

$$\psi(z, t) = Ae^{-\varkappa z}\cos\omega t, \qquad z = na, \qquad (18)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{4K}{M}\operatorname{sh}^2\frac{1}{2}\varkappa a. \qquad (19)$$

*Экспоненциальные «зигзагообразные» волны.* Аналогично, если частота возмущающего воздействия больше верхней граничной частоты, то мы имеем *экспоненциальные «зигзагообразные» волны*:

$$\psi(z, t) = A(-1)^n e^{-\varkappa z}\cos\omega t, \qquad z = na, \qquad (20)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{M}\operatorname{ch}^2\frac{1}{2}\varkappa a. \qquad (21)$$

Таким образом, экспоненциальные волны в открытой системе, находящейся под внешним воздействием, отличаются от тех же волн в закрытой системе лишь отсутствием члена с $\exp \varkappa z$, который обращается в бесконечность при $z=\infty$. Заметим, что в экспоненциальной волне все движущиеся элементы колеблются с одинаковой фазой [см. уравнения (18) и (20)]; поэтому здесь уже нет такого понятия, как фазовая скорость, так как нет ни волны, которая распространялась бы без изменения формы, ни волны, распространяющейся с изменением формы, но с различимыми гребнями и впадинами.

Мы показали на примере связанных маятников, что закон дисперсии для данной среды, связывающий $\omega$ и $k$, одинаков как для бегущих волн, так и для стоячих волн, обусловленных либо свободными колебаниями, либо установившимися вынужденными колебаниями замкнутой системы.

*Диспергирующие и недиспергирующие синусоидальные волны.* Волны называют *недиспергирующими* (или волнами без дисперсии), если закон дисперсии имеет вид

$$v(k) = \frac{\omega(k)}{k} = \text{константа (не зависит от } k). \qquad (22)$$

В противном случае волны называют *диспергирующими* (или волнами с дисперсией). Символ $k$ в выражении (22) напоминает нам, что мы имеем дело с синусоидальными волнами. Диспергирующая волна, представляющая собой суперпозицию бегущих волн с различными волновыми числами, будет менять свою форму по мере распространения в пространстве, так как составляющие с различными длинами волн распространяются с разной скоростью. Таким образом, различные по частоте составляющие расходятся («диспергируют») в пространстве. *Диспергирующими волнами* или *волнами с дисперсией называются синусоидальные волны, для которых фазовая скорость* $v_\phi = \omega/k$ *изменяется с длиной волны.*

*Реактивные экспоненциальные волны.* Когда частота возмущающего воздействия $\omega$ не лежит в полосе пропускания между нижней и верхней граничными частотами (в некоторых случаях первая из этих частот может быть равна нулю, а вторая — бесконечности), то, как мы только что видели, волны имеют в пространстве экспонен-

циальную форму. Такой тип волны иногда называют «реактивной» волной. Иногда говорят о «дисперсивной» среде и о «реактивной» среде, имея в виду прозрачную и непрозрачную среду соответственно (см. главу 3, стр. 135). Очевидно, что одна и та же среда может быть дисперсивной в одном частотном диапазоне (полоса пропускания или прозрачности) и реактивной в другом диапазоне (полоса поглощения или непрозрачности).

В приведенных ниже примерах мы будем иметь дело с фазовыми скоростями диспергирующих волн.

Пример 1. *Поперечные волны в струне с грузами.* Дисперсионное соотношение *) для поперечных волн в струне с грузами имеет вид [см. уравнение (2.70), п. 2.4]

$$\omega^2 = \frac{4T_0}{Ma}\sin^2\frac{1}{2}ka, \qquad 0 \leqslant k \leqslant \frac{\pi}{a}, \tag{23}$$

где $T_0$ — натяжение в равновесном состоянии, $M$ — масса грузика и $a$ — расстояние между грузиками. Отсюда следует, что фазовая скорость поперечных бегущих волн в этом случае равна

$$v_\Phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{4T_0}{Ma}\frac{\sin^2\frac{1}{2}ka}{k^2} \tag{24}$$

для $0 \leqslant k \leqslant \pi$. Для частот, больших граничной частоты

$$\omega_0 = \sqrt{4T_0/Ma},$$

имеем экспоненциальные «зигзагообразные» волны, и в этом случае не существует понятия фазовой скорости. Для частот между нулем и $\omega_0$ имеем диспергирующие волны, так как фазовая скорость не постоянна, а зависит от $k$. Для больших длин волн (или маленьких расстояний между грузиками), когда $a/\lambda \ll 1$, фазовая скорость перестает зависеть от длины волны и волны приобретают характер волн без дисперсии. Это можно показать, разложив $\sin {}^1/_2 ka$ в ряд Тейлора:

$$v_\Phi = \sqrt{\frac{T_0 a}{M}}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}ka\right)}{\left(\frac{1}{2}ka\right)} = \sqrt{\frac{T_0 a}{M}}\frac{\left(\frac{1}{2}ka\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}ka\right)^3 + \ldots}{\left(\frac{1}{2}ka\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{T_0 a}{M}}\left[1 - \frac{1}{24}(ka^2) + \ldots\right]. \tag{25}$$

Введя понятие средней массы на единицу длины (в состоянии равновесия), т. е. $\rho_0 \equiv M/a$, получим для *непрерывной струны*

$$v_\Phi = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}. \tag{26}$$

*) Прекрасная демонстрация дисперсионного соотношения [см. уравнение (23)] дана в статье: J. M. Fowler, J. T. Brooks, E. D. Lambe, One-dimensional Wave Demonstration (Опыты с одномерными волнами), Am. J. Phys. 35, 1065 (1967).



Таким образом, фазовая скорость поперечных бегущих волн для непрерывной струны постоянна и не зависит от частоты. Уравнение (26) аналогично результату, полученному в главе 2 для отношения $\omega/k$ в случае стоячих волн в непрерывной струне [уравнение (2.22), п.2.2].

Пример 2. *Продольные волны в струне с грузами.* Закон дисперсии в этом случае можно получить из закона дисперсии для поперечных волн, если заменить натяжение $T_0$ произведением коэффициента жесткости $K$ пружины на расстояние между грузами $a$ [см. уравнение (2.78), п.2.4]. В непрерывном приближении получим [подставляя в уравнение (26) $Ka$ вместо $T_0$]

$$v_\Phi = \sqrt{\frac{Ka}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{K_L L}{\rho_0}}. \tag{27}$$

Обозначение $Ka = K_L L$ должно напомнить, что если вы добавите последовательно еще несколько пружин и полная длина пружин станет равной $L$, то коэффициент жесткости всей пружины $K_L$ будет

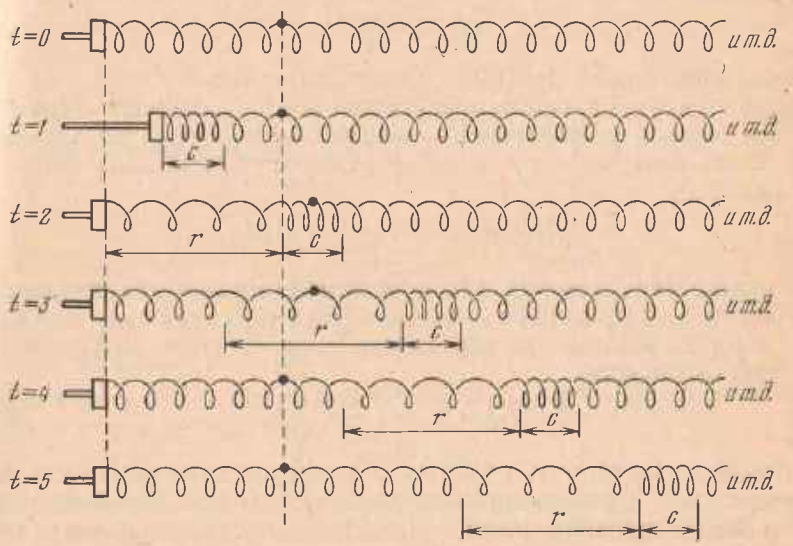



Рис. 4.2. Продольные бегущие волны сжатия ($c$) и разрежения ($r$) в пружине. Шестой виток спирали отмечен, что позволяет следить за его движением.

равен произведению $a/L$ на $K$, где $K$ — коэффициент жесткости для одного элемента пружины длиной $a$. В соответствии с уравнением (27) продольные волны в непрерывной струне не имеют дисперсии. На рис. 4.2 показан бегущий «волновой пакет», состоящий из областей сжатия и разрежения.

*Фазовая скорость звука. Модель Ньютона.* Ньютон первым вывел уравнение, позволяющее определить скорость звуковых волн в воздухе. Однако его формула дала неверный результат — около

280 *м/сек*, в то время как измеренная на опыте скорость звука равна 332 *м/сек* (при нормальных температуре и давлении, т. е. при давлении в 1 атмосферу и температуре 0° С). Вывод формулы Ньютона чрезвычайно прост, а причина ошибки достаточно интересна. Рассмотрим этот вывод.

Если воздух находится в замкнутом сосуде, то он создает определенное давление на его стенки: воздух ведет себя как *сжатая* пружина, которая стремится выпрямиться. Предположим, что сосуд представляет собой цилиндр, плотно закрытый неподвижной стенкой с одной стороны, а с другой — невесомым поршнем, способным перемещаться. Воздух, подобно пружине, стремится вытолкнуть из цилиндра поршень, действуя на него с силой $F$. В равновесии внешняя сила, действующая на поршень, уравновешена силой, с которой воздух действует на поршень. Для пружины, начальная длина которой $L_1$, а длина в сжатом состоянии $L$ ($L<L_1$) и коэффициента жесткости $K_L$, сила $F$ равна $F=K_L(L_1-L)$. Изменение силы $F$ при изменении длины пружины $L$ мы получим, дифференцируя это выражение:

$$dF = -K_L dL. \tag{28}$$

Аналогично, воздух действует на поршень с силой $F=pA$, где $p$ — давление, а $A$ — площадь поперечного сечения цилиндра. При смещении поршня от положения равновесия на небольшую величину $dL$ объем изменяется на $dV=A\,dL$. Соответственно сила меняется на величину

$$dF = A\,dp = A\left(\frac{dp}{dV}\right)_0 A\,dL, \tag{29}$$

где индекс нуль означает, что производная $dp/dV$ взята при равновесном объеме. Сравнивая уравнения (28) и (29), мы можем написать для воздуха в цилиндре выражение, эквивалентное коэффициенту жесткости пружины:

$$K_L = -A^2\left(\frac{dp}{dV}\right)_0. \tag{30}$$

Рассмотрим сжатую пружину с коэффициентом жесткости $K_L$, находящуюся в равновесии при длине $L_0$. Пусть линейная плотность массы пружины равна $\rho_0$ (лин.). В этом случае фазовая скорость продольных волн равна [см. уравнение (27)]

$$v^2 = \frac{K_L L_0}{\rho_0\,(\text{лин.})}. \tag{31}$$

Мы найдем с помощью выражения (31) скорость звука, если воспользуемся формулой (30) для $K_L$. Объем воздуха в равновесии равен $V_0=AL_0$, а линейная плотность массы воздуха в цилиндре равна

$$\rho_0\,(\text{лин.})\,L_0 = \rho_0\,(\text{объемн.})\,AL_0, \tag{32}$$

где $\rho_0$(объемн.) — объемная плотность массы в состоянии равновесия. Подставляя выражения (30) и (32) в (31) и опуская обозначение (объ-



сми.) у $\rho_0$, получим следующее выражение для скорости звука:

$$v^2 = -\frac{V_0\,(dp/dV)_0}{\rho_0}. \tag{33}$$

Нам остается найти $dp/dV$ — скорость изменения давления при изменении объема. Ньютон использовал закон Бойля — Мариотта, из которого следует, что при постоянной температуре произведение давления на объем есть постоянная величина:

$$pV = p_0V_0, \quad p = \frac{p_0V_0}{V}. \tag{34}$$

Здесь $p_0$ — давление в равновесном состоянии. После дифференцирования имеем

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p_0V_0}{V^2}.$$

В состоянии равновесия, когда $V=V_0$, получим

$$V_0\left(\frac{dp}{dV}\right)_0 = -p_0. \tag{35}$$

Подставляя это выражение в формулу (33), получаем *результат Ньютона*:

$$v_{\text{Ньютона}} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}. \tag{36}$$

Для нормальных условий имеем

$$p_0 = 1\,атм = 1{,}01\cdot 10^6\ дин/см^2,$$
$$\rho_0 = \frac{29\ г/моль}{22{,}4\ л/моль} = 1{,}29\cdot 10^{-3}\ г/см^3, \tag{37}$$

и численное значение скорости звука, найденное Ньютоном, равно

$$v_{\text{Ньютона}} = \sqrt{\frac{1{,}01\cdot 10^6}{1{,}29\cdot 10^{-3}}} = 2{,}80\cdot 10^4\ см/сек = 280\ м/сек. \tag{38}$$

Полученное *экспериментально* значение скорости (которое вы должны помнить) для нормальных условий равно

$$v = 332\ м/сек. \tag{39}$$

[Вспомните обычный способ расчета расстояния до вспышки молнии по количеству секунд, разделяющих вспышку и гром. В этой оценке «три километра примерно равны 10 секундам».]

*Исправление ошибки Ньютона.* Теперь возникает законный вопрос: что не верно в выводе Ньютона, который дает результат, отличающийся на 15% от действительного? Оказывается, что все дело в законе Бойля — Мариотта, который справедлив только при постоянной температуре. Температура в звуковой волне не остается постоянной. В такой волне, как мы уже говорили, существуют области сжатия и разрежения. В областях сжатия температура чуть-чуть выше, чем в областях разрежения (энергия сохраняется, так как избыток энергии при сжатии компенсирует уменьшение энергии при разрежении). При сжатии давление увеличивается из-за возрастания

температуры и становится больше, чем предсказываемое законом Бойля — Мариотта, а при разрежении, наоборот, меньше. Это явление приводит к большему значению возвращающей силы, чем то, которое ожидалось, и поэтому фазовая скорость возрастает.

Вместо закона Бойля — Мариотта (который справедлив для постоянной температуры) нам следует применить адиабатический газовый закон, который дает соотношение между $p$ и $V$ при отсутствии теплообмена. (Тепло не успевает переместиться из области сжатия в область разрежения, и температура не может выравняться. Прежде чем такой поток возникнет, уже пройдет половина цикла и в области сжатия возникнет разрежение. Таким образом, можно представить себе условно, что области сжатия и разрежения разделены стенкой, которая не дает теплу перетекать из данной области в смежные.)

*Адиабатический закон для газа* имеет вид

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma, \quad p = p_0V_0^\gamma V^{-\gamma}, \tag{40}$$

где $\gamma$ — постоянная, называемая отношением удельной теплоемкости при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме. Она равна $\gamma=1{,}40$ для воздуха при нормальных условиях. Дифференцируя выражение (40) и полагая $V=V_0$, получим

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma p_0V_0^\gamma V^{-\gamma-1}, \quad V_0\left(\frac{dp}{dV}\right)_0 = -\gamma p_0.$$

Подставляя это выражение в (33), получаем правильный результат для скорости звука:

$$v_{\text{зв}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{1{,}40}\, v_{\text{Ньютона}} = 332\ м/сек. \tag{41}$$

Рассмотрим подробнее, почему тепловой поток не успевает выравнять температуры в смежных областях сжатия и разрежения. Чтобы это выравнивание имело место, необходимо, чтобы тепловой поток проходил расстояние в полдлины волны (от области сжатия к разрежению) за время, меньшее половины периода колебаний (после половины периода области сжатия и разрежения меняются местами). Таким образом, тепло будет течь достаточно быстро при выполнении неравенства

$$v_{\text{п}} \gg \frac{{}^1/_2\lambda}{{}^1/_2T} = v_{\text{зв}}, \tag{42а}$$

где $v_{\text{п}}$ — скорость теплового потока.

Известно, однако, что поток тепла возникает главным образом потому, что молекулы передают друг другу кинетическую энергию поступательного движения посредством столкновений. Для молекулы воздуха с массой $M$ при абсолютной температуре воздуха $T$ среднеквадратичное значение тепловой скорости (скорость поступательного движения, обусловленная тепловой энергией) в направлении $z$ равно

$$v_{\text{ср. кв}} = \langle v_z^2\rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{kT}{M}}. \tag{42б}$$



Здесь $k$ — постоянная Больцмана. Скорость звука также можно выразить через $T$ и $M$:

$$v_{\text{зв}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma kT}{M}}. \tag{42в}$$

Таким образом, с точностью до $\sqrt{\gamma}$ скорость звука равна среднеквадратичной тепловой скорости молекул в направлении $z$. Если бы молекулы двигались по прямым, смещаясь на расстояния порядка $\lambda/2$ до столкновения, то они «как раз успевали бы» переносить тепло. Молекулы в среднем не удовлетворяют условию (42а), но для некоторых очень быстрых молекул оно будет справедливо. Таким образом, за один полупериод могло бы быть передано заметное количество тепла. В действительности молекулы не смещаются по прямой на расстояние порядка $\lambda/2$. Они совершают хаотическое движение, которое имеет случайный характер. При нормальных условиях молекулы воздуха между двумя столкновениями проходят расстояния порядка $10^{-5}$ *см*. Поэтому для всех длин волн больших, чем $10^{-5}$ *см*, адиабатический закон является очень хорошим приближением. [Самая короткая длина еще ощутимой нашим ухом звуковой волны соответствует частоте $\nu\approx20000$ *гц*, т. е. $\lambda=v/\nu\approx3{,}32\cdot10^4/(2\cdot10^4)=1{,}6$ *см*.]

Пример 3. *Электромагнитные волны в ионосфере Земли и фазовые скорости, превышающие скорость света c.* Дисперсионное соотношение для электромагнитных волн в ионосфере имеет (приближенно) следующий вид:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2, \tag{43}$$

где $c$ — скорость света, а $\omega_p=2\pi\nu_p$ — круговая частота колебаний плазмы. Для частот $\omega$, больших граничной частоты $\omega_p$, ионосфера — дисперсивная среда и электромагнитные волны синусоидальны. Это типичные частоты телевидения или частотно-модулированных волн (ЧМ), близкие к 100 *Мгц*. Фазовая скорость бегущей волны при частоте $\omega$ равна

$$v_\Phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}. \tag{44}$$

Очевидно, что эта скорость больше скорости света в вакууме $c$ (и скорости всех других электромагнитных волн, включая волны телевидения).

Действительно, фазовая скорость оказывается *больше c*, но это не противоречит теории относительности. Напомним, что фазовая скорость $v_\Phi$ определяет разность фаз между *установившимися* гармоническими колебаниями движущегося элемента (электрона в ионосфере) в положении $z_1$ и другого движущегося элемента в положении $z_2$. При установившемся гармоническом колебании нельзя утверждать, что колебание в $z_2$ является «результатом» колебания в $z_1$. Вся система находится в установившемся состоянии, и переходные процессы в ней давно окончились. В главе 6 мы увидим, что *модулированные колебания*, примером которых могут служить

модулированные по амплитуде электромагнитные волны, *не распространяются с фазовой скоростью*. Скорость их распространения называется групповой скоростью. Групповая скорость всегда меньше скорости $c$ света в вакууме.

Попробуем понять, как возникает фазовая скорость, бóльшая $c$. Источник наших «трудностей» заключен в постоянном слагаемом $\omega_p^2$, входящем в дисперсионное соотношение. При $\omega_p^2$, равном нулю, фазовая скорость была бы равна $c$. Константа $\omega_p^2$ равна возвращающей силе, действующей на один электрон и отнесенной к единице массы и единице смещения. Эта постоянная определяет частоту свободных колебаний электронов плазмы:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{M}. \tag{45}$$

В системе связанных маятников величине $\omega_p^2$ соответствует вклад в возвращающую силу, возникающий от силы тяжести. Дисперсионное соотношение для системы связанных маятников имеет вид (в приближении длинных волн)

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{Ka^2}{M} k^2. \tag{46}$$

Это выражение аналогично дисперсионному соотношению для ионосферы [формула (43)].

Предположим, что мы перерезали пружины, соединяющие расположенные в ряд маятники. Это означает, что $K = 0$. [Заметим, что мы не можем с такой же легкостью сделать $c = 0$ в уравнении (43). Поэтому система связанных маятников для наших рассуждений более удобна.] Тогда фазовая скорость для системы маятников будет равна

$$v_\Phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{lk^2}. \tag{47}$$

Выбрав $lk^2$ достаточно малым, мы можем сделать выражение (47) большим скорости *света* в вакууме! Это возможно, если в системе отсутствуют связи между маятниками, а вся система представляет собой группу маятников, устроенную таким образом, что все они колеблются с одинаковой амплитудой, а сдвиг фазы между данным маятником и следующим все время возрастает, так что длина волны (расстояние, на котором фазовая постоянная возрастает на $2\pi$) оказывается больше, чем произведение $c$ на период маятника. В этом случае фазовая скорость превышает $c$!

Итак, фазовая скорость может быть *больше* $c$.

Очевидно, что *изменить* амплитуду движения какого-либо маятника с такой безумной скоростью невозможно. Связав маятники друг с другом, мы можем изменить характер движения какого-либо дальнего маятника, воздействуя на ближний маятник группы. При этом обнаружим, что скорость, с которой передается создаваемая нами модуляция, меньше фазовой скорости. Скорость перемещения модуляции называется групповой скоростью, и она меньше $c$.



Пример 4. *Передающая линия — фильтр низких частот.* Исследуемая нами система показана на рис. 4.3. Внешнее воздействие в виде синусоидально изменяющегося напряжения приложено ко входному концу системы ($z=0$). Активным сопротивлением линии мы пренебрегаем. В п. 2.4 было найдено, что уравнение движения такой системы совпадает с уравнением движения для продольных колебаний системы из масс и пружин, если заменить $K$ на $C^{-1}/a$

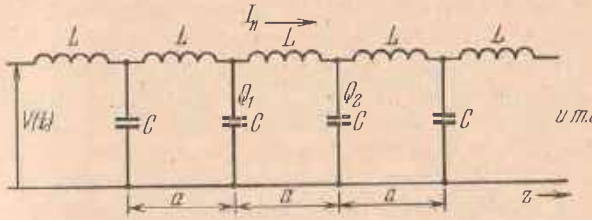



Рис. 4.3. Передающая линия возбуждается в точке $z=0$ и простирается до бесконечности.

и $M$ на $L/a$. Было показано, что в дисперсивном диапазоне частот (полоса пропускания системы), простирающемся от нуля до $\omega_0 = 2\sqrt{C^{-1}/L}$, закон дисперсии имеет вид

$$\omega^2 = \frac{4C^{-1}}{L} \sin^2 \frac{1}{2} ka.$$

В низкочастотном пределе (когда $k \approx 0$) или в пределе непрерывной линии ($a \approx 0$) мы можем заменить $\sin {}^1/_2 ka$ на ${}^1/_2 ka$. Тогда фазовая скорость будет равна

$$v_\Phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{(C/a)(L/a)}. \tag{48}$$

Здесь $C/a$ — шунтирующая емкость на единицу длины, а $L/a$ — последовательная индуктивность на единицу длины *). Таким образом, для непрерывной передающей линии (такую линию может составить любая пара проводников) в вакууме фазовая скорость обратно пропорциональна квадратному корню из произведения погонных емкости и индуктивности. Фазовая скорость постоянна и не зависит от частоты. Таким образом, в рассматриваемом пределе волны напряжения и тока — недиспергирующие волны.

*Может ли фазовая скорость в рассмотренной передающей линии превышать скорость света $c$?* Из примера 3 (распространение радиоволн в ионосфере) нам известно, что фазовая скорость этих волн может превышать скорость света $c$ и что в этом нет противоречия с теорией относительности.

Мы видим, что наличие граничной частоты $\omega_0$ позволяет иметь, по крайней мере в этом случае, практически любую фазовую скорость. Даже в системе связанных маятников можно иметь фазовую

*) Будем называть эти величины погонной емкостью и погонной индуктивностью соответственно.

скорость, превышающую скорость $c$. В случае низкочастотного фильтра нет соответствующей частоты, аналогичной граничным частотам этих примеров. Это объясняется отсутствием возвращающей силы, действующей на токи в индуктивностях, помимо той, которая обусловлена присутствием емкостей. Поэтому мы не можем ожидать, что фазовая скорость будет больше $c$. Рассмотрим уравнение (48). Постараемся получить максимально большую фазовую скорость. Это значит, что погонная индуктивность $L$ и погонная шунтирующая емкость $C$ должны быть предельно малыми величинами. Из рис. 4.3 мы видим, что для индуктивности это условие можно выполнить, заменив ее прямым проводником, а для емкости — просто убрать емкость. Теперь вы можете предположить, что величины $C/a$ и $L/a$ будут равны нулю и фазовая скорость будет равна бесконечности. Однако это не так. Мы должны помнить, что два проводника (направления токов в проводниках противоположны) имеют вполне определенную, не равную нулю, погонную индуктивность и погонная емкость между проводниками также не равна нулю. Вы можете сами показать (вспомнив соответствующие места из тома II), что погонная емкость и погонная индуктивность для *двух бесконечно длинных, прямых и параллельных проводников* соответственно равны (задача 4.8)

$$\frac{C}{a}=\frac{1}{4\ln\left(\frac{D+r}{r}\right)}\text{ ед. СГСЭ}, \tag{49}$$

$$\frac{L}{a}=\frac{4}{c^2}\ln\left(\frac{D+r}{r}\right)\text{ ед. СГСЭ}. \tag{50}$$

Здесь $r$ — радиус провода, а $D$ — расстояние между проводами (от поверхности одного провода до поверхности другого). Перемножая уравнения (49) и (50), получаем замечательный результат:

$$\frac{C}{a}\frac{L}{a}=\frac{1}{c^2}. \tag{51}$$

Таким образом, *фазовая скорость бегущих волн тока (или напряжения) в передающей линии, образованной двумя прямыми и параллельными проводами, равна скорости света в вакууме.*

Пример 5. *Передающая линия из параллельных пластин.* Система, показанная на рис. 4.4, состоит из двух параллельных проводящих пластин. Ширина пластин $w$, а расстояние между внутренними поверхностями $g$. По пластинам в направлении $z$ течет ток. Мы хотим вычислить погонные емкость и индуктивность в направлении оси $z$. Предположим, что потенциал между пластинами в точке $z=0$ постоянен. Тогда имеем постоянный ток. (Можно считать, что пластины соединены в точке $z=\infty$, т. е. цепь замкнута. Мы могли бы предположить, что обе пластины простираются до бесконечности, не соединяясь. Результат не изменился бы.)

Будем считать, что нижняя пластина заряжена положительно, а верхняя — отрицательно. *Электрическое поле* в этом случае *направлено по оси* $+x$ (см. рис. 4.4). Допустим, что $w$ велико по сравнению с $g$, и поэтому пренебрежем краевыми эффектами. Пусть $Q$ — заряд, расположенный на площади, ограниченной шириной линии $w$ и длиной $a$ вдоль оси $z$ (см. рис. 4.4). Пусть $C$ — емкость этой части системы. В этом случае справедливы следующие соотношения (если вы забыли их, посмотрите во II томе п. 3.5):

$$Q=CV, \tag{52}$$

$$V=gE_x, \tag{53}$$

$$E_x=\frac{4\pi Q}{wa}. \tag{54}$$

Выражения (52) и (53) записываются в единицах СГСЭ или в единицах СИ. Выражение (54) представляет собой произведение $4\pi$ на

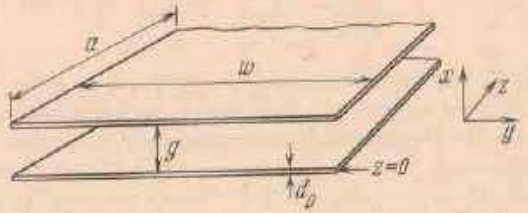



Рис. 4.4. Передающая линия из параллельных пластин.
Вынуждающая сила (не показана) создает разность потенциалов $V(t)$ между пластинами в точке $z=0$ и ток $I(t)$, который (в данный момент) направлен по $+z$ в одной пластине и по $-z$ в другой; $a$ — произвольная длина вдоль оси $z$, малая по сравнению с длиной бегущей волны.

заряд, приходящийся на единицу площади, и определяет электрическое поле в единицах СГСЭ. Решая эти уравнения относительно $C$, получим погонную емкость нашей передающей линии:

$$\frac{C}{a}=\frac{w}{4\pi g}. \tag{55}$$

Теперь найдем $L/a$ — значение погонной индуктивности. Считаем, что нижняя пластина подсоединена к положительному зажиму источника питания, а верхняя — к отрицательному. Поэтому положительный ток $I$ по нижней пластине течет в направлении $+z$ и в направлении $-z$ по верхней пластине. С помощью правила правой руки и рис. 4.4 легко убедиться, что *магнитное поле между пластинами направлено по положительной оси* $y$. Вне пластины магнитное поле равно нулю. Пусть $L$ — самоиндукция части пластин, указанной на рис. 4.4. Магнитный поток через сечение $ga$ равен

$$\Phi=B_y ga. \tag{56}$$

Магнитное поле $B_y$ определится из условия

$$wB_y=\frac{4\pi I}{c}. \tag{57}$$

(См. том II, п. 6.6; поверхностная плотность тока, введенная там, соответствует нашей величине $I/w$.) Самоиндукция $L$ определяется равенством [см. том II, п. 7.8, формулы (7.53) и (7.54)]

$$L\frac{dI}{dt}=\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Для постоянного тока $I$

$$LI = \frac{1}{c}\Phi. \tag{58}$$

Решая уравнения (56), (57) и (58) относительно $L$, найдем, что погонная самоиндукция равна

$$\frac{L}{a} = \frac{4\pi g}{c^2 w}. \tag{59}$$

Возможно, вас несколько смущает наше вычисление самоиндукции с помощью постоянного тока, тогда как уравнение Максвелла, из которого следует уравнение (57) для постоянного тока, имеет вид (том II, п.7.13)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{60}$$

Мы пренебрегаем током смещения, определяемым членом $(1/c)\partial\mathbf{E}/\partial t$. Оказывается (задача 4.10), что такое пренебрежение законно, пока толщина $d_0$ каждой пластины удовлетворяет условию

$$d_0 \ll \lambda. \tag{61}$$

Будем считать, что это условие выполняется.

Фазовая скорость бегущих волн равна [используем равенства (48), (55) и (59)]

$$v_\Phi = \frac{1}{\sqrt{(L/a)(C/a)}} = c. \tag{62}$$

Мы нашли, что в двух различных примерах передающих линий из проводов и пластин фазовая скорость равна $c$. Поэтому кажется правдоподобным и более общий результат: *фазовая скорость для любой передающей линии, состоящей из двух изолированных, одинаковых, прямых и параллельных проводников, в вакууме равна $c$.*

### 4.3. Показатель преломления и дисперсия

Если все пространство между параллельными пластинами передающей линии заполнено диэлектриком с диэлектрической постоянной $\varepsilon$, то емкость увеличивается в $\varepsilon$ раз (см. том II, п. 9.9). (То же справедливо и для передающей линии из двух проводников, только в этом случае мы должны заполнить диэлектриком все пространство. В случае параллельных пластин электрическое поле вне области между пластинами равно нулю и поэтому не имеет значения, есть ли диэлектрик вне пластин, или его там нет.)

Аналогично, если магнитная проницаемость среды равна $\mu$, то погонная самоиндукция $L$ возрастает в $\mu$ раз. (Мы будем рассматривать такие материалы, как стекло, вода, воздух или им подобные, для которых магнитная проницаемость равна единице. В дальнейшем при общих выводах мы будем учитывать $\mu$, а при рассмотрении частных примеров будем полагать $\mu$ равным единице.) Фазовая скорость бегущих волн напряжения и тока, распространяющихся вдоль



передающей линии из параллельных пластин (или вдоль любой другой передающей линии, образованной прямыми и параллельными проводниками), находящихся в пространстве, заполненном веществом с диэлектрической постоянной $\varepsilon$ и магнитной проницаемостью $\mu$, равна

$$v_\Phi = \sqrt{\frac{a}{L}\frac{a}{C}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\, v_\Phi \text{ (вакуум)},$$

т. е.

$$\boxed{v_\Phi = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}. \tag{63}$$

Выражение (63), полученное для специального случая бегущих волн напряжения или тока в передающей линии, на самом деле имеет весьма общее значение. Оно справедливо для распространяющихся в веществе электромагнитных волн любого типа, например для видимого света, распространяющегося в стекле или в другом диэлектрике.

Убедимся в общности выражения (63). Мы показали, что оно справедливо для волн тока и напряжения в передающей линии. В пространстве между пластинами передающей линии сосредоточено электрическое и магнитное поля. (Электрическое поле определяется напряжением на пластинах, а магнитное поле — током, текущим вдоль них.) Поэтому магнитное и электрическое поля должны распространяться вдоль линии с такой же скоростью, с какой распространяются волны тока и напряжения. (Поля представляют собой те же волны: они изменяются в пространстве и времени и имеют все характеристики, соответствующие волне.) В случае, когда среда — вакуум, скорость равна $c$. Мы знаем, что $c$ — это скорость *любых* электромагнитных волн в вакууме, в частности электромагнитных волн, распространяющихся между пластинами передающей линии. Если пространство заполнено средой с постоянными $\varepsilon$ и $\mu$, то скорость волн электрического и магнитного полей (связанных с волнами напряжения и тока) равна $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Очевидно, что с такой скоростью в данном веществе распространяются любые электромагнитные волны, каков бы ни был их источник: это скорость как для электромагнитных волн, связанных с напряжением и током, так и для электромагнитных волн, созданных лампой накаливания или испущенных радиоантенной или звездой.

В главе 1—3 мы пытались показать, что *дисперсионное соотношение зависит не от граничных условий, а только от свойств среды и волн*. Электромагнитные волны могут быть образованы при помощи напряжения, приложенного к одному концу передающей линии, или при помощи передающей антенны. Этим двум случаям соответствуют различные граничные условия, т. е. различные способы воздействия на систему. (Система — это среда с постоянными $\mu$ и $\varepsilon$.) Закон дисперсии, выражаемый формулой (63), не зависит от этих

условий. Мы не доказали этого строго, но надеемся, что наши слова достаточно убедительны. (Отложим доказательство до главы 7.)

Формула (63) справедлива для любого электромагнитного излучения и, в частности, для света. (Более подробно мы будем рассматривать электромагнитное излучение в главе 7.) Величину $\sqrt{\mu\varepsilon}$ называют показателем преломления и обозначают буквой $n$. Полезно запомнить приведенные ниже выражения, в которые входит показатель преломления. Следует иметь в виду, что показатель преломления стекла для видимого света близок к 1,5. Из приведенных ниже выражений видно, как меняются величины $\lambda$ и $k$ в стекле по сравнению с вакуумом:

$$n = \frac{c}{v_\Phi} = \sqrt{\mu\varepsilon}, \tag{64}$$

$$\lambda = \frac{1}{n}\frac{c}{\nu} = \frac{1}{n}\lambda\,(\text{вакуум}), \tag{65}$$

$$k = n\frac{\omega}{c} = nk\,(\text{вакуум}). \tag{66}$$

Конечно, среда не может изменить частоту «вынуждающей силы». Поэтому вместо того, чтобы писать $\lambda$ (вакуум), мы можем записать эту величину как $c/\nu$. Аналогично $k$ (вакуум)$=\omega/c$. В стекле длина волны видимого света составляет приблизительно $^2/_3$ от длины волны в вакууме. Соответственно число длин волн на один сантиметр, $\sigma = 1/\lambda$, больше в 1,5 раза в стекле, чем в вакууме.

Таблица 4.1

| Название вещества | Показатель преломления для $\lambda = 5893$ Å |
|---|---|
| Воздух (при нормальных условиях) | 1,0002926 |
| Вода (20 °C) | 1,33 |
| Цинковый крон (стекло) | 1,52 |
| Тяжелое свинцовое стекло | 1,90 |
| Люцит | 1,50 |

В табл. 4.1 приведены значения показателей преломления обычных веществ для желтой линии натрия с длиной волны $\lambda = 5893$ Å ($1\text{Å} = 10^{-8}$ *см*). Полезно запомнить примерные значения показателя преломления следующих веществ: для стекла и пластика $n \approx {}^3/_2$, для воды $n = {}^4/_3$ и для воздуха $n \approx 1 + 0{,}3 \cdot 10^{-3}$.

*Изменение показателя преломления с цветом — дисперсия.* Призма (кусок стекла или другого прозрачного материала клиновидной формы) отклоняет пучок падающего света на величину, которая зависит от цвета, т. е. от длины волны света. Различные цвета из параллельного пучка «белого» света отклоняются на разные углы. Пучки выходят из призмы под разными углами, и на экране за призмой получается цветное изображение, подобное радуге. Это схематически показано на рис. 4.5.

*Преломление и закон Снеллиуса.* Пучок света определенного цвета отклоняется (*преломляется*) всякий раз, когда на его пути

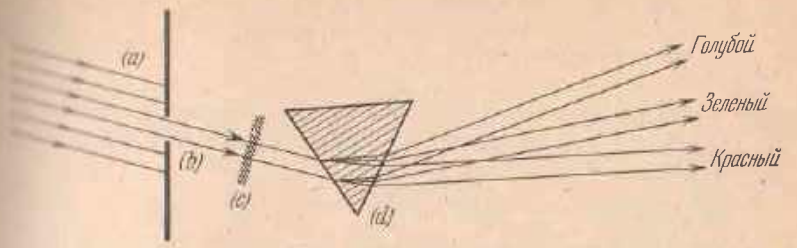



Рис. 4.5. Дисперсия.

Солнечный свет (*a*) падает на непрозрачный экран со щелью (*b*), перпендикулярной плоскости рисунка. Пучок белого света, образованный щелью, проходит через фильтр (*c*), пропускающий определенный цвет, и через призму (*d*). Отклонение в призме зависит от цвета. Голубой свет отклоняется сильнее красного. Без фильтра мы видим все цвета, разложенные в той же последовательности, что и в радуге.

встречается поверхность, где фазовая скорость принимает новое значение, т. е. при изменении коэффициента преломления $n$. Величина отклонения зависит от отношения $n_1/n_2$ коэффициентов преломления среды 1 (из которой пучок выходит) и среды 2 (в которую пучок входит). Преломление зависит также и от *угла падения*. Углом падения называется угол между направлением падающего пучка и нормалью к поверхности, на которую падает пучок. *Угол преломления* определяется как угол между преломленным пучком и нормалью к поверхности. (Мы будем всегда считать углы падения и преломления положительными углами, заключенными в пределах от 0 до 90°.) Принятые определения иллюстрируются рис. 4.6.

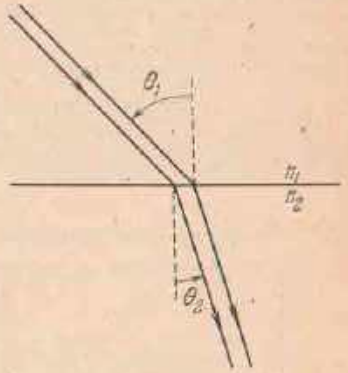



Рис. 4.6. Обозначения.

Для света, падающего в направлении стрелок, $\theta_1$ — угол падения, $\theta_2$ — угол преломления.

Легко получить соотношение между $n_1/n_2$ и углами $\theta_1$ и $\theta_2$. Фронт волны перпендикулярен направлению распространения пучка света. Положим, что фронт достигает границы сред, где показатель преломления возрастает (например, границы воздух — стекло). Один край фронта волны достигает границы раньше другого. Поэтому на одном краю фазовая скорость уменьшилась, в то время как на другом (еще не достигшем границы) она сохраняет свое значение. Из-за этого угол, под которым распространяется фронт, изменится. То же происходит и в том случае, если в ряду марширующих один фланг замедлил скорость передвижения, а другой нет. Рис. 4.7 иллюстрирует сказанное.

Рассмотрим два прямоугольных треугольника, имеющих общую гипотенузу $x$ (рис. 4.7). Имеем

$$l_1 = x \sin \theta_1, \quad l_2 = x \sin \theta_2. \tag{67}$$

Пусть $t$ — это время, необходимое бегущей волне, чтобы пройти расстояние $l_1$ в среде 1 или расстояние $l_2$ в среде 2.

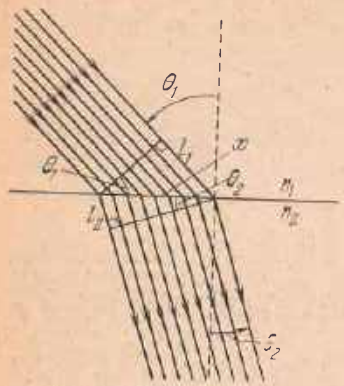


Рис. 4.7. Преломление.
Если $n_2 > n_1$, то правая точка фронта волны (если смотреть по ходу лучей) проходит расстояние $l_2$, которое меньше расстояния $l_1$, проходимого левой точкой. Поэтому пучок поворачивается к нормали, что показано на рисунке.

Тогда

$$l_1 = \frac{ct}{n_1}, \quad l_2 = \frac{ct}{n_2}, \tag{68}$$

или

$$ct = n_1 l_1 = n_2 l_2.$$

Используя (67), получим

$$\boxed{n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.} \tag{69}$$

Зависимость (69) называется *законом преломления Снеллиуса*.

*Дисперсия в стекле.* Теперь мы понимаем, что дисперсия в призме возникает из-за того, что *показатель преломления $n$ для голубого цвета больше, чем для красного*.

В табл. 4.2 приведены некоторые значения величины $n(\lambda)$ для оптического стекла, имеющего название «цинковый крон», взятые

Таблица 4.2

**Дисперсия показателя преломления стекла**

| Цвет | $\lambda$, Å | $\lambda$, *мкм* | $\nu$, $10^{14}$ *гц* | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| Близкий ультрафиолет | 3610 | 0,361 | 8,31 | 1,539 |
| Темно-голубой | 4340 | 0,434 | 6,92 | 1,528 |
| Голубовато-зеленый | 4860 | 0,486 | 6,18 | 1,523 |
| Желтый | 5890 | 0,589 | 5,10 | 1,517 |
| Красный | 6560 | 0,656 | 4,57 | 1,514 |
| Темно-красный | 7680 | 0,768 | 3,91 | 1,511 |
| Инфракрасный | 12000 | 1,20 | 2,50 | 1,505 |
| Далекий инфракрасный | 20000 | 2,00 | 1,50 | 1,497 |

из справочника по физике. Длины волн даны в Å ($10^{-8}$ *см*) и микронах ($10^{-4}$ *см*), а частоты — в герцах (*гц*).

Содержание табл. 4.2 можно описать следующим образом. Коэффициент преломления для стекла близок к 1,5 для всего видимого диапазона частот. *Дисперсия*, т. е. скорость изменения $n$ в зависи-



мости от $\lambda$, такова, что $n$ *увеличивается* примерно на 0,006 на каждые 1000 Å *уменьшения* длины волны.

Дисперсию воды можно исследовать с помощью простой призмы, сделанной из двух предметных стекол микроскопа (с применением замазки и ленты), и фильтра, который поглощает зеленый, но пропускает красный и голубой цвета. (См. домашний опыт 4.12.)

*Почему показатель преломления меняется с частотой?* Вернемся к передающей линии. Фазовая скорость для нее равна

$$v_\Phi = \frac{1}{\sqrt{(C/a)(L/a)}}.$$

При увеличении $C$ фазовая скорость уменьшается, так как уменьшается возвращающая сила $C^{-1}a$ для данного заряда. Фазовая скорость будет уменьшаться и при увеличении $L$, так как при этом возрастает инерция.

Рассмотрим вещества, для которых магнитная проницаемость $\mu = 1{,}0$. (Для стекла $\mu$ отличается от единицы лишь в пятом знаке после запятой.) Таким образом, нам нужно понять, почему выражение

$$v_\Phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n} \tag{70}$$

зависит от частоты.

Мы знаем (см. том II, п. 9.9), что если конденсатор заполнен диэлектриком и электрическое поле, вызванное зарядом $Q$ на пластинах конденсатора, равно $\mathbf{E}_Q(t)$, то поле $\mathbf{E}(t)$ в какой-либо точке диэлектрика равно суперпозиции $\mathbf{E}_Q(t)$ и поля $-4\pi\mathbf{P}$, являющегося результатом электрической поляризации:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_Q(t) - 4\pi\mathbf{P}(t). \tag{71}$$

Здесь $\mathbf{P}(t)$ — индуцированный дипольный момент на единицу объема:

$$\mathbf{P}(t) = Nqx(t)\hat{\mathbf{x}}. \tag{72}$$

В этой формуле $N$ — *плотность* поляризуемых зарядов (число зарядов в единице объема), $q$ — величина заряда, $x(t)$ — смещение заряда от положения равновесия и $\hat{\mathbf{x}}$ — единичный вектор. Будем считать, что $\mathbf{E}_Q$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ направлены вдоль $\hat{\mathbf{x}}$, и опустим обозначения векторов. Так как емкость $C$ равна $C = Q/V$ (где $V$ — разность потенциалов между пластинами), то уменьшение электрического поля, вызванное поляризацией диэлектрика (и пропорциональное уменьшению $V$), вызывает увеличение $C$. Коэффициент, на который умножается $C$, называют диэлектрической постоянной $\varepsilon$. Таким образом, в соответствии с уравнениями (71) и (72) мы имеем

$$\varepsilon = \frac{E_Q}{E} = 1 + \frac{4\pi P(t)}{E(t)} = 1 + \frac{4\pi N q x(t)}{E(t)}. \tag{73}$$

Пример 6. *Простая модель «молекулы стекла».* Несмотря на простоту модели, которую мы будем рассматривать, она достаточно хорошо отражает существенные черты любой классической

(т. е. доквантовой) модели взаимодействия света с веществом. Мы увидим, что наша модель дает возможность предсказать много замечательных свойств этого явления. Хотя квантовомеханическое описание единственно правильное, классическое описание ему не противоречит, а является его предельным случаем.

Предположим, что «молекула стекла» состоит из тяжелого неподвижного ядра, с которым связан заряд $q$, имеющий относительно малую массу $M$. Заряд «прикреплен» к ядру «пружиной» с коэффициентом жесткости $M\omega_0^2$. Движение заряда затухает, и коэффициент затухания равен $\Gamma$. Уравнение движения заряда $q$ имеет вид

$$M\ddot{x} = -M\omega_0^2 x - M\Gamma\dot{x} + qE(t). \tag{74}$$

Предположим, что внешнее поле $E_Q(t)$ гармонически меняется с угловой частотой $\omega$. В этом случае $P(t)$ и $E(t)$ будут изменяться с той же частотой $\omega$ и поле, действующее на некоторую «среднюю» молекулу, будет иметь вид

$$E(t) = E_0 \cos \omega t. \tag{75}$$

В этом случае уравнение (74) описывает движение гармонического осциллятора, находящегося под гармоническим внешним воздействием (см. п. 3.2), причем $F_0 = qE_0$. Для установившихся колебаний решение $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = A_д \cos \omega t + A_п \sin \omega t, \tag{76}$$

где $A_д$ и $A_п$ — амплитуда дисперсии и амплитуда поглощения. У молекул бесцветного прозрачного вещества (например, стекла или воды) в видимом диапазоне частот нет резонансов. (Именно поэтому вещество прозрачно и бесцветно.) Для цветного стекла или какого-нибудь фильтра из вашего оптического набора в видимом диапазоне частот имеются резонансы. Эти резонансы вызывают поглощение энергии на резонансных частотах, определяемое членом $A_п \sin \omega t$. При поглощении выпадает часть падающего белого света, и остается только тот свет, который вы видите. Мы не будем рассматривать поведение цветных фильтров на частотах, близких к резонансным частотам поглощения. Поэтому пренебрежем членом $A_п \sin \omega t$ в уравнении (76). Из главы 3 нам известно, что вдали от резонанса такое приближение является достаточно хорошим. Общий случай (включая поглощение) рассмотрен в дополнении 9. Коэффициент преломления определяется выражением

$$n^2 = \varepsilon = 1 + 4\pi N q \frac{x(t)}{E(t)} = 1 + 4\pi N q \frac{A_д}{E_0}. \tag{77}$$

Предполагая, что мы далеки от резонанса, считаем $\Gamma = 0$ в уравнении (74). Имеем [см. уравнение (3.17), п.3.2]

$$A_д = \frac{F_0}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{qE_0}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$



Таким образом, получим

$$\boxed{\frac{c^2k^2}{\omega^2} = n^2 = \varepsilon = 1 + \frac{4\pi N q^2}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.} \tag{78}$$

Чтобы применить этот результат, полученный для простой модели с одним резонансом, к реальному стеклу, мы должны просуммировать вклады в $n^2 - 1$ по всем существенным резонансам. Поэтому $\omega_0$, грубо говоря, имеет смысл средней резонансной частоты (см. задачу 3.20), а $N$ равно произведению числа молекул стекла в кубическом сантиметре на среднее число учитываемых резонансов для молекулы. Число электронов, которые дают реальный вклад в (78), равно числу электронов на внешней оболочке атома, т. е. валентных электронов.

Для частоты $\omega$ в диапазоне частот видимого света наиболее существенные резонансы в стекле находятся в ультрафиолетовой области, соответствующей длинам волн $\lambda = c/\nu$ порядка 1000 Å ($10^{-5}$ см) или меньше. Длины волн видимого света примерно в пять раз больше, и частоты $\omega$ видимого света соответственно в пять раз меньше, чем средняя резонансная частота $\omega_0$. В этом случае в соответствии с уравнением (78) $n^2 - 1$ положительно, что согласуется с опытом. Заметим также, что при возрастании $\omega$ ($\omega$ всегда остается меньше, чем $\omega_0$) знаменатель $\omega_0^2 - \omega^2$ в уравнении (78) уменьшается и $n^2 - 1$ возрастает. Поэтому голубой свет (более высокие частоты) должен иметь больший показатель преломления, чем красный. Это находится в согласии с опытом: призма отклоняет голубой свет сильнее, чем красный.

*Фазовые скорости, большие $c$.* Когда частота $\omega$ внешнего воздействия (представляющего собой свет, т. е. электромагнитное излучение) меньше резонансной частоты $\omega_0$, мы имеем приведенный выше результат. Из него следует, что фазовая скорость меньше $c$, длина волны меньше длины волны в вакууме и возрастание частоты вызывает увеличение показателя преломления. Такое изменение показателя преломления с частотой называется «нормальной» дисперсией. Если же сместиться в область ультрафиолета, где частота внешнего воздействия больше резонансной частоты, то величина $n^2 - 1$, как это видно из (78), станет отрицательной ($n^2$ меньше единицы). Если $n^2$ лежит между нулем и единицей, мы опять имеем нормальную дисперсию. Но в этом случае фазовая скорость больше $c$, длина волны больше длины волны в вакууме и увеличение частоты приводит к возрастанию показателя преломления (когда частота станет в конце концов очень большой, то $n$ приблизится к единице и среда будет вести себя подобно вакууму). В частотном диапазоне вблизи резонансной частоты $\omega_0 - {}^1/_2\Gamma < \omega < \omega_0 + {}^1/_2\Gamma$ показатель преломления уменьшается с возрастанием $\omega$. Это область «аномальной» дисперсии.

Физическая причина того, что фазовые скорости могут быть больше $c$, заключается в существующем соотношении между фазой

возмущающей силы $qE(t)$ и фазой колебаний $x(t)$ заряда $q$, на который действует эта сила. Мы знаем, что если частота внешнего воздействия меньше резонансной частоты, то смещение $x(t)$ будет «следовать» за $qE(t)$, т. е. заряд будет колебаться в фазе с внешней силой. При смещении заряда возникает электрическое поле, которое уменьшит внешнее поле. Уменьшение внешнего поля приведет к уменьшению возвращающей силы и соответственно к уменьшению фазовой скорости. После перехода через резонанс (когда $\omega > \omega_0$) смещение заряда $x(t)$ находится в противофазе с внешней силой $qE(t)$. Поле, образованное смещением заряда, усиливает внешнее поле $E(t)$, что в свою очередь приводит к увеличению возвращающей силы, и фазовая скорость будет больше скорости света $c$ в вакууме.

Хорошей иллюстрацией сказанного может быть пример с маятником. Если на маятник действует периодическая сила с частотой, меньшей собственной частоты колебаний маятника, то колебания происходят в фазе с этой силой. Если же частота вынуждающей силы больше резонансной частоты, то колебания маятника будут в противофазе с внешней силой. Можно сказать, что в факте превышения фазовой скорости скорости $c$ таинственного и непонятного не больше, чем в том, что гиря маятника движется направо, тогда как внешняя сила направлена налево.

*Экспоненциальные волны — реактивный частотный диапазон.* Если частота внешней силы $\omega > \omega_0$, то в соответствии с (78) $n^2 < 1$. При значениях $n^2$ между нулем и единицей мы имеем синусоидальные волны, т. е. $k^2$ — положительное число. Это совершенно справедливо для случая достаточно больших $\omega$ (когда $\omega \gg \omega_0$), так как для таких значений $\omega$ величина $n^2$ лишь незначительно отличается от единицы. Однако в области частот от $\omega = \omega_0$ до $\omega = \omega_0$ плюс несколько $\Gamma$ величина $n^2$ отрицательна. Эта область частот определяется неравенством

$$\frac{4\pi N q^2}{M} > \omega^2 - \omega_0^2. \tag{79}$$

Мы должны оговорить, что $\omega^2 - \omega_0^2 \gg \Gamma\omega_0$ (т. е. мы находимся достаточно далеко за резонансом и поэтому можем использовать приближенное выражение для $A_д$). Таким образом, если выполнено условие (79), то из (78) следует, что $n^2$ отрицательно, а это означает, что $k^2$ также отрицательно. Полученный результат означает, что дифференциальное уравнение волны в пространстве

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} = -k^2 \psi(z, t), \qquad k^2 > 0, \tag{80а}$$

будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} = +\varkappa^2 \psi(z, t), \qquad \varkappa^2 > 0, \tag{80б}$$

и его решением будут не синусоидальные, а экспоненциальные волны. С подобным положением мы встречались и раньше в случае



ионных маятников. (Когда дисперсионное соотношение для $k^2$ дает отрицательные значения $k^2$, мы меняем обозначение $k^2$ на $-\varkappa^2$.)

Мы приведем качественный вывод условий, для которых справедливо уравнение (79), после того, как рассмотрим специальный случай $\omega_0 = 0$. Этот специальный случай дает закон дисперсии для ионосферы.

Пример 7. *Дисперсия в ионосфере.* В п. 2.4 (пример 6) мы дали простую модель плазмы в ионосфере Земли и определили частоту $\omega_0$ свободных колебаний плазмы. В этой модели мы пренебрегли движением положительных ионов, а также затуханием движения свободных электронов. (В действительности существует затухание, обусловленное столкновениями между электронами и ионами, при которых энергия колебаний переходит в «беспорядочную» тепловую энергию.) Уравнение движения отдельного электрона с зарядом $q$ и массой $M$ имеет вид

$$M\ddot{x} = qE(t), \tag{81}$$

где $E(t)$ — электрическое поле в месте нахождения электрона. В случае свободных колебаний $E(t)$ задается величиной поляризации, приходящейся на единицу объема:

$$E(t) = -4\pi P(t) = -4\pi N q x(t). \tag{82}$$

Из (81) и (82) следует уравнение свободных колебаний

$$\ddot{x} = -\frac{4\pi N q^2}{M} x \equiv -\omega_p^2 x. \tag{83}$$

Таким образом, мы повторили (более кратко) вывод уравнения движения для колебаний плазмы при частоте $\omega_p$. Теперь предположим, что один «конец» плазмы находится под действием силы, вызванной радио- или телепередатчиком. (Чтобы упростить задачу, предположим, что ее «геометрия» эквивалентна передающей линии из параллельных пластин.) В этом случае $E(t)$ будет суперпозицией двух величин [по аналогии с (71)]:

$$E(t) = E_п - 4\pi P(t). \tag{84}$$

Здесь $E_п$ (индекс «п» означает передатчик) — поле, которое существовало бы в отсутствие свободных колебаний. Уравнение движения электрона в плазме аналогично уравнению движения электрона в «молекуле стекла» [уравнение (74)] при условии, что коэффициент упругости $K = M\omega_0^2$ и коэффициент затухания $\Gamma$ равны нулю. Таким образом, свободный электрон имеет «нулевую резонансную частоту», т. е. $\omega_0 = 0$. Поэтому значение показателя преломления или дисперсионное соотношение для этого случая можно получить, положив $\omega_0 = 0$ в уравнении (78):

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = n^2 = \varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \tag{85}$$

где $\omega_p^2 = 4\pi N e^2/M$. Умножая обе части уравнения (85) на $\omega^2$, получим уравнение, которое было выведено в главе 2:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2, \quad \omega^2 \geqslant \omega_p^2. \tag{86}$$

Для реактивной области частот имеем экспоненциальные волны:

$$\omega^2 = \omega_p^2 - c^2\varkappa^2, \quad \omega^2 \leqslant \omega_p^2. \tag{87}$$

Нужно, однако, заметить, что наша модель ионосферы не совсем точна. Некоторые физические предположения, сделанные нами, не выполняются в действительности, и дисперсионное соотношение имеет более сложный вид, чем выражения (86) и (87). Например, для существенно низких частот электрон в среднем испытывает несколько соударений с ионами за один цикл колебаний. В этом случае необходимо учитывать затухание, мы же пренебрегали им. Далее, при некоторых частотах, отличных от $\omega_p$, в плазме возникают резонансы. Например, для низких частот становятся важными колебания плазмы, обусловленные движением ионов. (Частота таких колебаний плазмы близка к 100 *кгц*.) Нужно также учитывать «циклотронную частоту» $\omega_c$, которая соответствует круговому движению электронов в магнитном поле Земли. (Это поле порядка 0,5 *гс* *).)

*Качественное объяснение граничной частоты.* Мы знаем, что для любой системы (например, для системы связанных маятников) частота первой моды свободных колебаний является также самой низкой частотой синусоидальных волн, когда система находится под действием внешней силы. Таким образом, частота первой моды является также граничной частотой вынужденных колебаний. Для частот внешнего воздействия, меньших этой частоты, волны экспоненциальны. Точно на частоте порога длина волны синусоидальных волн бесконечна (в этом случае все маятники колеблются в фазе). Таким образом, если мы хотим узнать дисперсионное соотношение для граничной частоты, нам следует положить $k=0$. Частота, полученная из дисперсионного соотношения при $k=0$, и будет граничной частотой. Эту частоту будем обозначать $\omega_{гр}$. В нашем примере коэффициент преломления равен [см. уравнение (78)]

$$n^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 + \frac{4\pi Nq^2}{M}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Полагая $k=0$, получим значение граничной частоты:

$$\omega_{гр}^2 = \omega_0^2 + \frac{4\pi Nq^2}{M}. \tag{88}$$

Теперь вспомним, что $\omega^2$ — это возвращающая сила, приходящаяся на единицу массы и единицу смещения. В соответствии с тем, что говорилось выше для ионосферы, возвращающая сила (на единицу массы и единицу смещения) для свободных колебаний электрона в ионосфере равна $\omega_p^2 = 4\pi Nq^2/M$. Это первая нормальная мода колебаний для электронов, которая имеет бесконечную длину волны (т. е. все электроны колеблются в фазе). Очевидно, что если теперь к каждому колеблющемуся заряду приложить связывающую силу с помощью «пружины с коэффициентом жесткости» $M\omega_0^2$, то мы просто увеличим возвращающую силу (на единицу массы и единицу смещения), действующую на каждый заряд, на $\omega_0^2$. В этом случае заряды опять колеблются в фазе и $k$ равно нулю, так что поведение системы соответствует первой моде свободных колебаний. Теперь мы видим, что правая часть уравнения (88) определяет возвращающую силу на единицу массы и на единицу смещения для первой моды свободных колебаний. Поэтому это — граничная частота. Таким образом, уравнение (88), так же как и неравенство (79), справедливо для реактивной области частот, где волны экспоненциальны.

Приведем еще одно физическое объяснение существования граничной частоты. Для простоты положим $\omega_0=0$. В этом случае наша «модель» — это ионосфера. Нас интересует причина существования граничной частоты, равной

$$\omega_{гр}^2 = \frac{4\pi Nq^2}{M}. \tag{89}$$

Заметим, что ионосфера (или наша модель ионосферы) во многих отношениях похожа на металлический проводник. В обоих случаях существуют свободные электроны, которые могут создавать электрический ток, если приложено электрическое поле. Далее, если металлический проводник находится в статическом электрическом поле (когда заряды внутри проводника неподвижны, а приложенное поле постоянно во времени), то поле внутри проводника равно нулю, так как внешнее поле уравновешивается полем, образованным зарядами, которые под действием внешнего поля продвинулись к поверхности металла. Если внешнее поле внезапно изменится, то электронам потребуется определенное время, чтобы занять новое положение равновесия и образовать поле, которое уравновесит внешнее поле внутри проводника. Поэтому в первый момент времени, пока электроны не заняли равновесного положения, поле внутри проводника не равно нулю. Среднее время, которое нужно электронам, чтобы занять равновесное положение, назовем временем релаксации и обозначим через $\tau$. Если время изменения внешнего поля будет меньше $\tau$, то поток зарядов не успеет образовать поле, противоположное внешнему. Таким образом, мы можем сказать, что *граничная частота системы порядка* $\tau^{-1}$. Для электромагнитного излучения с частотой большей, чем $1/\tau$, электроны не успевают занять такое положение, при котором созданное ими поле уничтожит внешнее поле. Поэтому можно сказать, что наша среда прозрачна для частот, больших пороговой частоты $1/\tau$. В случае «бесконечно большой» частоты электроны вообще не будут двигаться и вещество, подобно вакууму, будет прозрачно для излучения. Если же один конец системы возбуждается с частотой, меньшей граничной частоты, то система будет аналогична фильтру высоких частот, находящемуся под внешним воздействием с частотой, меньшей граничной частоты. В точках среды, близко расположенных к концу, находящемуся под внешним воздействием, поле будет равно внешнему полю. В более далеких точках у электронов будет достаточно времени, чтобы занять положение, при кото-

*) Интересное обсуждение экспериментальных данных можно найти в статье: W. Calvert, R. Knecht, T. Van Zandt, Science **146**, 391 (1964).

ром внешнее поле внутри среды уничтожится. Таким образом, по мере удаления от места приложения внешней силы (излучения) мы будем наблюдать экспоненциальное уменьшение поля внутри среды с ростом расстояния. Аналогичную картину мы наблюдали для фильтра высоких частиц, составленного из связанных маятников.

Оценим время релаксации $\tau$. Предположим, что в момент времени $t=0$ возникает поле $E_0$. В результате электроны начинают двигаться с ускорением, равным $a=qE_0/M$. Если в течение времени $t$ это ускорение остается постоянным, то электроны пройдут расстояние, равное $^1/_2\, at^2$. Для наших грубых оценок мы можем опустить $^1/_2$. Тогда получим

$$x \approx \frac{qE_0}{M} t^2. \tag{90}$$

Предположим, что движение зарядов ограничено поверхностями плазмы (ионосферы) или металла. В этом случае избыток заряда на одной поверхности (и уменьшение заряда на другой поверхности) равен

$$Q = NqxA, \tag{91}$$

где $N$ — плотность числа зарядов, $A$ — площадь поверхности и $x$ — смещение. Заряд $Q$ на одной поверхности и $-Q$ на другой образуют поле $E$, равное

$$E = 4\pi \frac{Q}{A} = 4\pi Nqx \approx 4\pi Nq \frac{qE_0 t^2}{M}. \tag{92}$$

Если время $t$ достаточно, чтобы поле $E$ (уравновешивающее поле) смогло достичь значения $E_0$, наступает равновесие. Поэтому время релаксации получается из (92) заменой $t$ на $\tau$ и $E$ на $E_0$. Имеем

$$\omega_{\text{гр}}^2 \approx \tau^{-2} \approx \frac{4\pi Nq^2}{M},$$

а это согласуется с точной формулой (89).

*Качественное обсуждение поведения показателя преломления в дисперсионной полосе частот.* Изолированная заряженная частица, колеблющаяся в вакууме, излучает электромагнитные волны, которые распространяются в вакууме со скоростью света. Поэтому заряд, совершающий под действием падающего света установившиеся колебания, испускает электромагнитное излучение, распространяющееся в вакууме со скоростью $c$. Вследствие суперпозиции первичного поля с полем, образованным колеблющимся зарядом, возникает некое результирующее поле. При большом числе зарядов (кусок стекла или ионосфера) каждый из них находится под действием электрического поля, существующего в окрестности заряда. Это локальное поле является суперпозицией «первичного поля», которое имело бы место при отсутствии зарядов, и поля, образованого всеми колеблющимися зарядами.

Каждый колеблющийся заряд (в куске стекла, например) испускает волны, распространяющиеся в данной среде с той же самой



скоростью $c$, что и скорость света в вакууме. Каким же образом суперпозиция волн, имеющих одинаковую скорость $c$, одинаковую частоту $\nu$ и поэтому одинаковую длину волны $c/\nu$, дает длину волны $\lambda$, отличную от $c/\nu$, и фазовую скорость, отличную от $c$? Оказывается, что «дело в фазе». Все зависит от соотношения фаз поля, образованного зарядом, и внешнего поля, действующего на заряд. Если поле, образованное зарядом, находится в фазе с внешним полем, то в некоторой удаленной точке оно будет увеличивать внешнее поле (будет иметь место, как говорят теоретики, конструктивная интерференция), но не изменит фазу общего поля, и поэтому фазовая скорость не изменится. Аналогично, если излучаемое поле сдвинуть по фазе на 180° относительно внешнего, то суперпозиция этих двух полей даст результирующее поле меньшей величины, чем внешнее поле (деструктивная интерференция), однако фаза снова не будет изменена. Для того чтобы фаза результирующего поля изменилась, необходимо, чтобы поле, излучаемое зарядом, было сдвинуто на $\pm 90°$ относительно внешнего поля.

Предположим, что в определенной точке, куда приходит волна, при отсутствии стекла существует внешнее поле $E_0 \cos \omega t$. Это поле может быть вызвано, например, световым излучением лампы. Если поместить между наблюдателем и лампой стекло, то поле от лампы будет *по-прежнему* равно $E_0 \cos \omega t$ и будет распространяться через стекло со скоростью $c$. Теперь предположим, что колеблющаяся молекула стекла дает вклад в поле, равный $\mathscr{E} \sin \omega t$, где $\mathscr{E}$ очень мало и (например) положительно. Это излучение также проходит через стекло со скоростью $c$, но имеет 90°-ный сдвиг относительно внешнего поля. Результирующее поле в точке наблюдения равно

$$E(t) = E_0 \cos \omega t + \mathscr{E} \sin \omega t;$$

для $\mathscr{E} \ll E_0$ это равносильно равенству

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t - \delta), \quad \delta \equiv \frac{\mathscr{E}}{E_0} \ll 1.$$

Таким образом, наличие стекла вызывает в точке наблюдения результирующее поле $E(t)$, сдвинутое по фазе на угол $\delta$. Наблюдатель в этой точке должен ждать дольше, чем, допустим наблюдатель вне стекла, чтобы фаза $E(t)$ приобрела заданное значение, т. е. он должен ждать до тех пор, пока величина $\omega t - \delta$ достигнет значения $\omega t$ вне стекла. Поэтому он считает, что фазовая скорость меньше $c$. Заметим, что если бы вклад от молекулы стекла был пропорционален $\cos \omega t$, то не было бы сдвига фазы результирующего поля

$$E(t) = (E_0 + \mathscr{E}) \cos \omega t$$

и скорость равнялась бы скорости света в вакууме $c$. Опыт, однако, показывает, что фазовая скорость результирующего излучения отлична от $c$, несмотря на то что каждое слагаемое суперпозиции распространяется со скоростью, равной $c$. Это означает, что излучение молекул стекла в момент времени $t$ сдвинуто по фазе относительно внешнего излучения в этот же момент времени на $\pm 90°$.

Нам осталось показать, как возникает такой сдвиг. Предположим, что внешнее поле равно $E_0 \cos \omega t$. Тогда смещение заряда будет $x(t)=A_x \cos \omega t$, если частота $\omega$ далека от резонансной. В главе 7 мы увидим, что излучение колеблющегося заряда пропорционально «запаздывающему ускорению». Это значит, что поле на расстоянии $z$ пропорционально ускорению, которое заряд имел в более раннее время $t-(z/c)$. Для гармонического движения ускорение равно произведению $-\omega^2$ на смещение. Таким образом, мы получаем «ужасный» результат, из которого следует, что излучение от каждого колеблющегося заряда пропорционально $\cos \omega t$, тогда как для получения фазовой скорости, отличной от $c$, *необходимо*, чтобы оно было пропорционально $\sin \omega t$! Объяснение заключается в следующем.

Предположим, что плоская волна излучения распространяется в направлении $z$. Тогда в данный момент времени мы должны рассматривать вклад не только от одной молекулы, но и от всех молекул, заключенных в тонкой пластинке стекла, перпендикулярной направлению распространения волны. Как мы только что видели, молекулы вблизи точки наблюдения дают бесконечно малые вклады, находящиеся в фазе с внешним полем (мы пренебрегаем знаком); но другие молекулы в пластинке находятся на большем расстоянии от точки наблюдения. Излучению от этих молекул требуется некоторое время, чтобы подойти к точке наблюдения. (Излучение распространяется со скоростью $c$.) После интегрирования по бесконечно широкой пластинке (см. главу 7) результирующий вклад будет сдвинут на $-90°$ относительно вклада, даваемого молекулами в точке наблюдения, или, что то же самое, относительно внешнего возмущения. Таким образом, мы знаем источник 90-градусного сдвига и понимаем теперь, каким образом много волн, каждая из которых распространяется со скоростью $c$, могут в результате суперпозиции дать результирующую волну, фазовая скорость которой не равна $c$. Будет ли фазовая скорость больше или меньше $c$, зависит только от того, находятся вынужденные колебания в фазе или в противофазе с внешним воздействием, а это в свою очередь зависит от того, будет ли частота внешнего воздействия меньше или больше резонансной частоты.

*Терминология. Почему мы говорим об электрическом поле* **E** *и пренебрегаем магнитным* **B**. Мы поступаем так не всегда, но достаточно часто. Частично причина в следующем: когда электромагнитные волны взаимодействуют с частицей, имеющей заряд $q$ и скорость $\mathbf{v}$, на частицу действует лоренцевская сила (том II, п. 5.2)

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}+q\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}.$$

В случае электромагнитных волн в вакууме **E** и **B** имеют одинаковые значения. Поэтому второй член в выражении для лоренцевской силы меньше первого на множитель $|\mathbf{v}/c|$. Если, например, поле создано обыкновенным источником света или даже очень мощным



лазером, то напряженности **E** и **B** настолько малы, что максимальная скорость $|\mathbf{v}|$, которую может приобрести электрон в установившемся движении, значительно меньше $c$. Поэтому во многих физических ситуациях можно пренебречь силой, связанной с **B**.

Возможны случаи, когда влияние поля **B** будет преобладать. Если поля **E** и **B** созданы не излучением (бегущей волны), а (например) статическими полями независимых зарядов или токов, то **B** и **E** не обязательно будут равны по величине. Например, легко представить себе случай, когда $|\mathbf{E}|=0$, а $|\mathbf{B}|=100$ *кгс*.

## 4.4. Импеданс и поток энергии

При изучении мод и стоячих волн мы узнали, что непрерывную среду можно характеризовать двумя параметрами: «возвращающей силой» и «инерцией». Для непрерывной струны возвращающая сила определяется натяжением $T_0$ в равновесном состоянии, а инерция определяется линейной плотностью $\rho_0$. У передающей линии соответствующими параметрами являются $(C/a)^{-1}$, т. е. величина, обратная емкости на единицу длины, и $L/a$ — индуктивность на единицу длины. Для продольных волн в струне параметр, характеризующий возвращающую силу,— это $Ka$, а параметр, определяющий инерцию, равен $M/a=\rho_0$. Для звуковых волн такими параметрами соответственно являются $\gamma p_0$ и объемная плотность $\rho_0$. Во всех случаях моды стоячих волн ведут себя аналогично простому гармоническому осциллятору. (Для таких систем, как связанные маятники или широкополосный фильтр, нам необходим еще один параметр, а именно граничная частота.)

Однако для описания бегущих волн рассмотренные параметры не подходят. Бегущие волны переносят энергию и импульс, и фазовые соотношения для бегущих волн отличны от фазовых соотношений для стоячих волн. Бегущие волны в непрерывной протяженной среде не похожи на большой гармонический осциллятор, и такие характеристики гармонического осциллятора, как возвращающая сила и инерция, не годятся для описания бегущих волн. Величиной, которая может характеризовать среду, где распространяются бегущие волны, является фазовая скорость $v_\phi$. Для поперечных волн в струне фазовая скорость равна

$$v_\phi=\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}. \tag{93}$$

Это выражение является своего рода комбинацией параметров $T_0$ и $\rho_0$, определяющих возвращающую силу и инерцию. Возможна еще одна независимая комбинация этих параметров:

$$Z=\sqrt{\rho_0 T_0}, \tag{94}$$

которая называется *характеристическим импедансом* или просто *импедансом* для поперечных волн в непрерывной струне. Мы покажем, что импеданс характеризует скорость, с которой энергия

распространяется вдоль струны, когда на струну действует внешняя сила. Фазовая скорость и импеданс представляют собой параметры, которые характеризуют бегущие волны в непрерывной среде.

Пример 8. *Поперечные бегущие волны в непрерывной среде.* Рассмотрим непрерывную струну, левый конец которой находится в точке $z=0$. Пусть на этот конец струны действует поперечная гармоническая сила (рис. 4.8). Назовем точку приложения внешней

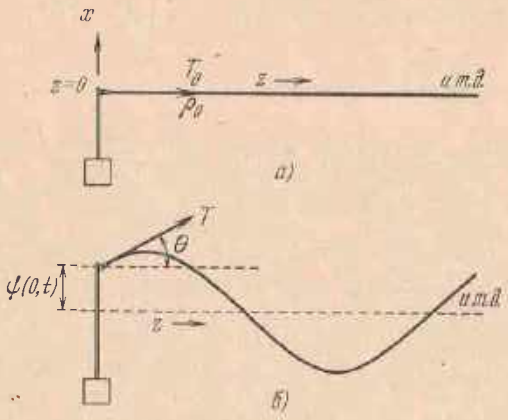



Рис. 4.8. Испускание поперечных бегущих волн.
*а)* Равновесие; *б)* конфигурация в общем случае.

силы «выходным зажимом передатчика». Обозначим эту точку буквой $L$, а точку струны, находящуюся в контакте с выходным зажимом, буквой $R$. В состоянии равновесия (рис. 4.8, *а*) поперечная составляющая силы отсутствует и единственной силой, действующей на струну, является натяжение $T_0$, направленное по оси $z$. В общем случае, показанном на рис. 4.8, *б*, натяжение струны в точке ее соединения с выходным зажимом передатчика равно $T$ и направлено по касательной к струне в этой точке. Поперечная составляющая силы, с которой струна (ее конец $R$) действует на выходной зажим $L$ передатчика, равна

$$F_x(R,\ L) = T\sin\theta = (T\cos\theta)\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = T_0\operatorname{tg}\theta = T_0\frac{\partial\psi}{\partial z}. \qquad (95)$$

Этот результат справедлив для идеальной «пружины», когда $T = T_0/\cos\theta$. В случае малых $\theta$ он справедлив для любой пружины.

*Характеристический импеданс.* Предположим, что передатчик воздействует на открытую среду (струну) и происходит установившийся *процесс распространения бегущих волн вдоль направления* $+z$. В этом случае функция $\psi(z,\ t)$ имеет вид

$$\psi(z,\ t) = A\cos(\omega t - kz). \qquad (96)$$



Дифференцирование дает

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = kA\sin(\omega t - kz), \qquad (97)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\omega A\sin(\omega t - kz). \qquad (98)$$

Сравнивая выражения (97) и (98) и используя равенство $v_\phi = \omega/k$, мы получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{v_\phi}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \qquad (99)$$

Подставляя (99) в (95), получим (для бегущих волн)

$$F_x(R,\ L) = -\frac{T_0}{v_\phi}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \qquad (100)$$

Величина $\partial\psi/\partial t$ — это поперечная скорость струны в точке соединения струны с выходным зажимом передатчика. Величина $T_0/v_\phi$ является константой. Таким образом, когда передатчик излучает бегущие волны, реакция среды (т. е. сила, с которой она воздействует на выходной зажим передатчика) является *демпфирующей*, или *затормаживающей*, силой. Эта сила обратно пропорциональна фазовой скорости распространения волн вдоль струны. Величина $T_0/v_\phi$ называется *характеристическим импедансом* $Z$:

$$F_x(R,\ L) = -Z\frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad (101)$$

где

$$Z = \frac{T_0}{v_\phi}. \qquad (102)$$

Для поперечных бегущих волн в непрерывной струне имеем

$$v_\phi = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\ \text{см/сек}. \qquad (103)$$

Тогда

$$Z = \frac{T_0}{v_\phi} = \sqrt{T_0\rho_0}\ \text{дин}\cdot\text{сек/см}. \qquad (104)$$

*Мощность на выходе передатчика.* Демпфирующая сила вызывает «поглощение» или «рассеивание» энергии. Это самое важное свойство демпфирующей силы. Наш пример соответствует случаю, когда энергия *поглощается* в форме «излучения» с выхода передатчика. Энергия, отдаваемая передатчиком, не рассеивается, в том смысле, что она не переходит в тепло. Эта энергия «распространяется» вдоль струны, которая может доставить ее к приемнику, расположенному на некотором расстоянии. Излучаемая на выходе передатчика мощность равна произведению поперечной силы, с которой передатчик воздействует на струну в точке $z=0$, на поперечную скорость струны в этой точке. Имея в виду, что согласно третьему закону Ньютона сила $F_x(L,\ R)$ равна взятой с обратным знаком силе $F_x(R,\ L)$, мы можем воспользоваться уравнением (101),

изменив в нем знак. Тогда для величины мгновенной выходной мощности (в *эрг/сек*) мы получим

$$P(t) = F_x(L, R)\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \text{(общий случай)}, \qquad (105)$$

$$P(t) = \left(Z\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\frac{\partial\psi}{\partial t} = Z\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \quad \text{(случай бегущей волны)}.$$

Первое равенство (105) имеет общий смысл, второе справедливо только для бегущих волн.

В формулах (105) мы выразили выходную мощность через мгновенную поперечную скорость струны $\partial\psi/\partial t$ (в точке $z=0$). Другой важной величиной, характеризующей волну, является поперечная сила, определяемая формулой (95) (с обратным знаком). Мощность на выходе передатчика может быть выражена через эту величину с помощью уравнений (95) и (99):

$$P(t) = F_x(L, R)\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-T_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \text{(общий случай)},$$

$$P(t) = \left[-T_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\left[-v_\phi\frac{\partial\psi}{\partial z}\right] = \frac{v_\phi}{T_0}\left[-T_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]^2 = \qquad (106)$$

$$= \frac{1}{Z}\left[-T_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]^2 \quad \text{(случай бегущей волны)}.$$

Первое уравнение (106) справедливо в общем случае, а второе — только для бегущих волн.

Мощность $P(t)$ может быть выражена двумя различными, но эквивалентными способами [уравнения (105) и (106)]. Действительно, всегда оказывается, что существуют две величины, представляющие физический интерес при описании поведения волны. В одних системах мы можем использовать первую из этих величин, а в других системах вторую. Например, мы обнаружили, что для звуковых волн избыток давления играет роль, аналогичную поперечной возвращающей силе $-T_0\,\partial\psi/\partial z$ для струны, а продольная скорость воздуха в звуковой волне играет роль, аналогичную поперечной скорости струны $\partial\psi/\partial t$. Для электромагнитного излучения (мы докажем это) роль, аналогичную поперечной скорости струны $\partial\psi/\partial t$, играет поперечное магнитное поле $B_y$, а поперечное электромагнитное поле $E_x$ аналогично возвращающей силе $-T_0\,\partial\psi/\partial z$ струны.

*Энергия, переносимая бегущей волной.* Мощность $P(t)$, испускаемая передатчиком в точке $z=0$ в виде бегущих волн, равна величине энергии, переносимой волной в направлении $+z$ в единицу времени мимо какой-либо точки $z$. (Мы пренебрегаем затуханием.) Действительно, вычисляя потоки энергии с выходного зажима передатчика, мы могли бы рассматривать вместо точки $z=0$ любую точку на оси $z$. Единственное требование к среде заключается в том, чтобы в ней могли распространяться бегущие волны. Повторив сделанные ранее вычисления для любой точки струны $z$, мы обнаружим, что «испущенная» мощность, переносимая бегущими волнами мимо точки $z$



в направлении $+z$, определяется выражениями, аналогичными (105) и (106), за исключением того, что поперечная скорость $\partial\psi/\partial t$ и возвращающая сила $-T_0\,\partial\psi/\partial z$ должны быть взяты в точке $z$ вместо точки $z=0$. Таким образом, для бегущих волн в струне получаем

$$P(z, t) = Z\left[\frac{\partial\psi(z, t)}{\partial t}\right]^2 \qquad (107)$$

или

$$P(z, t) = \frac{1}{Z}\left[-T_0\frac{\partial\psi(z, t)}{\partial z}\right]^2. \qquad (108)$$

Пример 9. *Бегущие продольные волны в пружине.* Перейдем к рассмотрению продольных волн сжатия и растяжения в пружине. Мы попытаемся применить полученные результаты к описанию излучения звуковых волн. Для этого мы используем модель Ньютона, с теми улучшениями, которые были сделаны в п. 4.2.

Исследуемая нами система показана на рис. 4.9.

Величина $Ka$ входит в уравнение для продольных колебаний пружины с грузами точно так же, как равновесное натяжение $T_0$ —

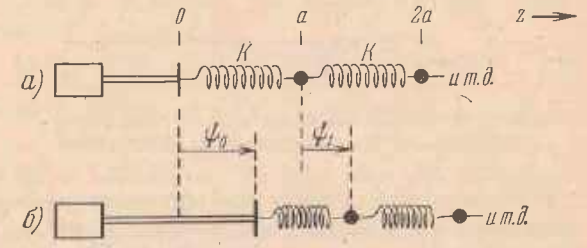



Рис. 4.9. Испускание продольных бегущих волн.
*а)* Равновесие; *б)* конфигурация в общем случае.

в уравнение движения для поперечных колебаний такой пружины [см. уравнение (2.77), п. 2.4 и последующее обсуждение]. Поэтому величина фазовой скорости получается простой заменой $T_0$ на $Ka$ [см. уравнение (27), п. 4.2]. Точно так же мы найдем выражение для характеристического импеданса и потока энергии в случае продольных волн, если заменим в соответствующих выражениях для поперечных колебаний $T_0$ на $Ka$. Окончательно из выражений (103), (104), (107) и (108) получаем для продольных волн

$$v_\phi = \sqrt{\frac{Ka}{\rho_0}}, \quad Z = \sqrt{Ka\rho_0}. \qquad (109)$$

Для мощности, переносимой бегущей волной, имеем (в *эрг/сек*)

$$P(z, t) = Z\left[\frac{\partial\psi(z, t)}{\partial t}\right]^2 = \frac{1}{Z}\left[-Ka\frac{\partial\psi(z, t)}{\partial z}\right]^2. \qquad (110)$$

Величина $\psi(z, t)$ представляет собой смещение от положения равновесия точки $z$ на струне. Она положительна, если смещение происходит в направлении $+z$. Соответствующая этому смещению скорость равна $\partial\psi(z, t)/\partial t$. Величина $-Ka\,\partial\psi(z, t)/\partial z$ представляет

собой силу, действующую на пружину в направлении $+z$ и приложенную справа от точки $z$. Если к этой силе прибавить силу $F_0$, определяемую начальным натяжением, мы получим полную силу, действующую на точку $z$ в направлении $+z$ (см. задачу 4.29):

$$F_z(L,\ R) = F_0 - Ka\frac{\partial\psi(z,\ t)}{\partial z}. \qquad (111)$$

Сила $F_0$ в выражении (111) возникает из-за сжатия или растяжения пружины в положении равновесия. Она не дает вклада в волну. Действительно, в выражение (110) входит лишь избыток полной силы над $F_0$, а именно $-Ka\,\partial\psi/\partial z$.

Пример 10. *Звуковые волны.* Для рассмотрения звуковых волн мы воспользуемся моделью Ньютона (см. п. 4.2). Система показана на рис. 4.10.

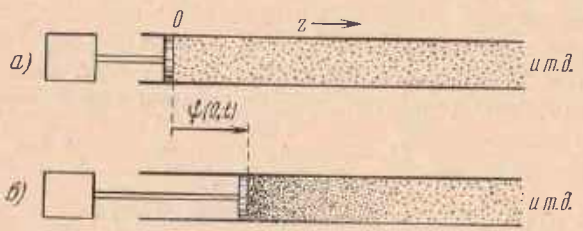



Рис. 4.10. Испускание продольных звуковых волн.
*а)* Равновесие; *б)* конфигурация в общем случае.

В п. 4.2, используя предложенную Ньютоном аналогию между звуковыми волнами и продольными волнами в струне, мы нашли фазовую скорость звука. Из модели Ньютона следует, что равновесную линейную плотность для струны следует заменить на равновесную объемную плотность воздуха, а произведение $Ka$ для струны — на произведение равновесного давления $p_0$ на константу $\gamma$. Теперь нам нетрудно написать выражения для импеданса и энергии звуковых волн. Для этого нужно в соответствующих выражениях для продольных волн в пружине заменить $Ka$ на $\gamma p_0$. Из равенств (109) и (110) мы получаем

$$v_\Phi = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}},\quad Z = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}. \qquad (112)$$

Величина потока энергии в бегущей звуковой волне [в единицах *эрг/(см²·сек)*] равна

$$I(z,\ t) = Z\left[\frac{\partial\psi(z,\ t)}{\partial t}\right]^2 = \frac{1}{Z}\left[-\gamma p_0\frac{\partial\psi(z,\ t)}{\partial z}\right]^2. \qquad (113)$$

Величина $\psi(z,\ t)$ представляет собой смещение «небольшого объема воздуха» (в направлении $z$) от равновесного положения $z$. Величина $\partial\psi(z,\ t)/\partial t$ — это соответствующая скорость рассматриваемого объема. Величина $-\gamma p_0\,\partial\psi(z,\ t)/\partial z$ равна силе, действующей на единицу площади в направлении $+z$. Это сила, с которой воздух слева от $z$ действует на воздух справа от $z$. Суперпозиция этой силы с силой $p_0$, действующей в равновесном состоянии, определяет результирующую силу в направлении $+z$ (напомним, что координата $z$ соответствует равновесному, а не мгновенному положению):

$$\frac{F_z(L,\ R)}{A} = p_0 - \gamma p_0\frac{\partial\psi(z,\ t)}{\partial z}. \qquad (114)$$

Это выражение следует из (111) при замене $F_0$ на $p_0$ и $Ka$ на $\gamma p_0$. Равновесное давление $p_0$ никак не влияет на волну. Мы будем называть величину $-\gamma p_0\,\partial\psi/\partial z$ *звуковым давлением*:

$$p_{зв} = -\gamma p_0\frac{\partial\psi(z,\ t)}{\partial z}. \qquad (115)$$

Для воздуха при нормальных условиях имеем $p_0 = 1\ атм = 1{,}01\times 10^6\ дин/см^2$ и $\rho_0 = 1{,}29\cdot 10^{-3}\ г/см^3$. Тогда из выражений (112) получаем

$$v_\Phi = 3{,}32\cdot 10^4\ см/сек, \qquad (116)$$

$$Z = 42{,}8\ \frac{дин/см^2}{см/сек}. \qquad (117)$$

*Единица интенсивности звука.* Интенсивность бегущих звуковых волн определяется как энергия, переносимая через единичную площадь в единицу времени. Обычно за единицу интенсивности звука принимают величину

$$I_0 = 1\ мквт/см^2 = 10\ эрг/(см^2\cdot сек), \qquad (118)$$

где $1\ мквт = 10^{-6}\ вт$, а $1\ вт = 10^7\ эрг/сек$. Речь, ведущаяся в умеренном тоне, соответствует испусканию около 100 *эрг/сек* звуковой энергии. Площадь отверстия рта во время речи близка к 10 $см^2$. Поэтому, если вы говорите в один конец трубы, так что вся энергия переносится в направлении $z$, то интенсивность звука будет близка к $(100\ эрг/сек)/10\ см^2 = I_0$. Чтобы почувствовать эту величину, послушайте что-нибудь через короткую трубу. (В длинной трубе звук будет ослабляться из-за трения о стенки и из-за испускания звуковых волн боковыми поверхностями трубы.) Если кричать в трубу как можно громче, то интенсивность будет порядка $100\ I_0$. При интенсивности между $100\ I_0$ и $1000\ I_0$ возникают болезненные ощущения в ухе.

Интенсивность самого слабого звука, который может быть услышан, зависит от частоты. При частоте 440 *гц* порог слышимости «среднего человека» близок к $10^{-10}\ I_0$. Таким образом, человеческое ухо работает в колоссальном динамическом диапазоне интенсивности, занимающем 12 порядков (от $100\ I_0$ до $10^{-10}\ I_0$).

*Терминология; децибел.* Когда интенсивность звука возрастает в 10 раз, то говорят, что она возросла на 1 *бел*. Таким образом, динамический диапазон человеческого уха близок к 12 *бел*. Увеличение интенсивности в $10^{0{,}1}$ раз означает увеличение в 0,1 *бел*, или 1 *децибел*. Таким образом,

$$\left.\begin{array}{l} 1\ дб — \text{изменение интенсивности в } 10^{0{,}1} = 1{,}26 \text{ раза,} \\ 1\ бел — \text{изменение интенсивности в } 10 \text{ раз.} \end{array}\right\} \qquad (119)$$

Люди с нормальным слухом могут обнаружить увеличение громкости, не меньшее 1 *дб*.

Ниже даны задачи (а—д) на вычисления звукового импеданса и потока.

а) *Среднеквадратичное значение звукового давления при болезненных ощущениях.* Интересно получить представление о величине звукового давления (в атмосферах), вызывающего у человека болезненное ощущение, и выяснить, имеет ли оно ту же природу, что и боль в ухе, возникающая при погружении в воду на глубину около 5 *м*. При погружении на 10 *м* давление увеличивается на 1 *атм*, соответственно на глубине 5 *м* давление возрастет на $^1/_2$ *атм*. Сравним с этой величиной давление звука, вызывающего болезненные ощущения.

Р е ш е н и е. Будем считать, что болезненные ощущения возникают при интенсивности $I=1000\ I_0$. В соответствии с уравнением (113) имеем

$$\langle p_{зв}^2\rangle^{1/2} = (ZI)^{1/2} = (1000ZI_0)^{1/2} = [(1000)\,(42{,}8)\,(10)]^{1/2} = 650\ дин/см^2.$$

Эта величина в 1500 раз меньше давления в 1 *атм* $=1{,}01\cdot 10^6\ дин/см^2$. Из нашей оценки видно, что болезненные ощущения не являются следствием большого давления. Давление 600 $дин/см^2$ равно $6\times 10^{-4}$ *атм* и «соответствует» погружению на глубину около 0,5 *см*.

б) *Амплитуда звука при болезненных ощущениях.* Вычислим амплитуду колебаний молекул воздуха для болезненно громкого звука. Пусть $\psi(z,\ t)=A\cos(\omega t-kz)$. Тогда производная $\partial\psi/\partial t$, возведенная в квадрат и усредненная по одному циклу (при фиксированном $z$), будет равна $^1/_2\ \omega^2A^2$. Используя уравнение (113) и предполагая, что частота равна 440 *гц*, имеем

$$A=\frac{(2\ I/Z)^{1/2}}{\omega}=\frac{(2\cdot 1000\cdot 10/42{,}8)^{1/2}}{(6{,}28)\,(440)}=2{,}5\cdot 10^{-2}\ см=\frac{1}{4}\ мм.$$

в) *Амплитуда едва слышимого звука.* Вычислим амплитуду колебаний у порога слышимости. Положим интенсивность звука равной $10^{-10}\ I_0$. Амплитуда пропорциональна корню квадратному из $I$. Для частоты 440 *гц* искомая амплитуда будет равна корню квадратному из $10^{-13}$, умноженному на результат, полученный в предыдущем приложении, где мы считали $I=1000\ I_0$. Имеем

$$A=10^{-6{,}5}\,(2{,}5\cdot 10^{-2})=\frac{2{,}5\cdot 10^{-8}}{\sqrt{10}}\approx 10^{-8}\ см.$$

Это — величина порядка диаметра атома. Таким образом, наше ухо настолько чувствительно, что может воспринимать смещения барабанной перепонки, равные диаметру атома!

г) *Мощность на выходе высококачественного громкоговорителя.* Оценим величину мощности на выходе высококачественного громкоговорителя. Предположим, что с помощью этого громкоговорителя озвучивается длинная комната, имеющая отражающие боковые стенки и поглощающую звук заднюю стенку. Пусть интенсивность звука равна 100 $I_0$, а поперечное сечение комнаты 3 *м*$\times$3 *м*$\approx 10^5$ *см*$^2$. Можно считать, что в том месте, где установлен громкоговоритель, он воздействует на целую стенку, которая и передает излучение, или что в этой части комнаты имеется постепенно сужающийся к громкоговорителю рупор. Это нужно для согласования импедансов громкоговорителя и комнаты (согласование импедансов рассмотрено в главе 5). Выходная мощность равна

$$P=1\times(\text{площадь})=100\ I_0\cdot 10^5=10^7\ мквт=10\ вт.$$

д) *Совместное действие двух звуков, интенсивность которых близка к болезненной.* Предположим, что человек еще может терпеть боль при интенсивности 100 $I_0$ при частоте 440 *гц*, но боль трудно переносима при интенсивности 200 $I_0$ и той же частоте. Предположим, что то же справедливо и для частоты 512 *гц*. Пусть две ноты A440 и C512 звучат одновременно и интенсивность каждой будет 100 $I_0$. Сможет ли человек выдержать их одновременное звучание? Полная интенсивность в этом случае равна 200 $I_0$.

Мы надеемся, что теперь у вас достаточно знаний, чтобы разобраться в ряде интересных задач о звуке. Мы не рассматривали стоячих звуковых волн. Их поведение аналогично стоячим продольным волнам в «пружине». Теперь вам следует перейти к домашним опытам, касающимся звука. Мы надеемся, что они не вызовут затруднений.

П р и м е р 11. *Бегущие волны в передающей линии.* Линия, о которой идет речь, показана на рис. 4.11. Вынуждающая сила

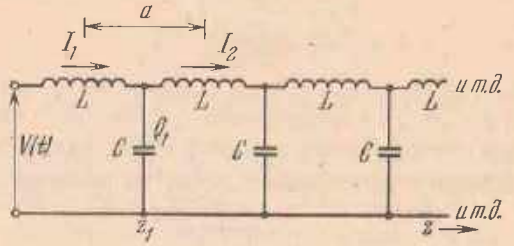



Рис. 4.11. Бегущие волны в передающей линии.

представляет собой напряжение $V(t)$, приложенное в начале линии (точка $z=0$). Будем рассматривать приближение длинных волн, когда $V(z,\ t)$ и $I(z,\ t)$ — непрерывные функции $z$. Если передающая линия бесконечно длинная (или нагружена на полностью поглощающий приемник), то мы имеем открытую систему, в которой распространяются бегущие волны напряжения $V(z,\ t)$ и тока $I(z,\ t)$. Если вынуждающая сила $V(t)$ на входном конце имеет вид

$$V(t)=V_0\cos\omega t, \tag{120}$$

то волна напряжения $V(z,\ t)$ в точке $z=0$ равна $V_0\cos\omega t$, и мы можем записать

$$V(z,\ t)=V_0\cos(\omega t-kz). \tag{121}$$

Мы хотим найти связь между $V(z,\ t)$ и $I(z,\ t)$. Оказывается, что (для бегущих волн) эти величины пропорциональны друг другу (между ними нет сдвига фаз). Предположим, что выражение для $I(z,\ t)$ имеет вид

$$I(z,\ t) = I_0 \cos(\omega t - kz) + J_0 \sin(\omega t - kz). \qquad (122)$$

Мы покажем, что $J_0$ равно нулю.

Рассмотрим первую емкость на рис. 4.11. Заряду этой емкости $Q_1(t)$ соответствует разность потенциалов $V_1(t)$:

$$Q_1(t) = CV_1(t) = CV(z_1,\ t). \qquad (123)$$

Тогда

$$C\frac{\partial V(z_1,\ t)}{\partial t} = \frac{dQ_1}{dt} = I_1 - I_2 = -(I_2 - I_1) = -a\frac{\partial I(z_1,\ t)}{\partial z}.$$

В последнем равенстве мы использовали непрерывное приближение. Таким образом,

$$\frac{\partial V(z_1,\ t)}{\partial t} = -\left(\frac{C}{a}\right)^{-1}\frac{\partial I(z_1,\ t)}{\partial z}. \qquad (124)$$

Подставляя уравнения (121) и (122) в уравнение (124), мы видим, что постоянная $J_0$ в уравнении (122) должна равняться нулю. После подстановки получаем

$$-\omega V_0 \sin(\omega t - kz) = -\left(\frac{C}{a}\right)^{-1} I_0 k \sin(\omega t - kz),$$

т. е.

$$V_0 = \frac{(C/a)^{-1}}{v_\Phi} I_0, \qquad (125)$$

откуда

$$V(z,\ t) = \frac{(C/a)^{-1}}{v_\Phi} I(z,\ t) = ZI(z,\ t) \qquad (126)$$

по определению $Z$. Таким образом, фазовая скорость и характеристический импеданс (для линии с распределенными параметрами) равны

$$v_\Phi = \sqrt{\frac{(C/a)^{-1}}{(L/a)}}, \qquad (127)$$

$$Z = \frac{(C/a)^{-1}}{v_\Phi} = \sqrt{\left(\frac{L}{a}\right)\left(\frac{C}{a}\right)^{-1}}. \qquad (128)$$

Мгновенное значение мощности на выходе передатчика (в точке $z=0$) равно

$$P(t) = V(t)\,I(t) = V(0,\ t)\,I(0,\ t) = ZI^2(0,\ t). \qquad (129)$$

Эту мощность можно записать иначе:

$$P(t) = V(0,\ t)\,I(0,\ t) = \frac{V^2(0,\ t)}{Z}. \qquad (130)$$

Заметим, что мы могли бы получить выражение для $Z$ простой заменой $K$ на $C^{-1}$ и $M$ на $L$ в результате, полученном при рассмотрении продольных колебаний системы масс и пружин. Однако из-за важности этого примера мы рассмотрели его отдельно.



Пример 12. *Передающая линия из параллельных пластин.* Этот важный пример приведет нас к весьма общему результату. В соответствии с уравнениями (55) и (59) (п. 4.2) погонные емкость и индуктивность для передающей линии из параллельных пластин (между пластинами вакуум) равны

$$\frac{C}{a} = \frac{w}{4\pi g}, \qquad \frac{L}{a} = \frac{4g}{wc^2}. \qquad (131)$$

Здесь $w$ — ширина пластин, а $g$ — расстояние между пластинами. Характеристический импеданс [см. уравнение (128)] равен

$$Z = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} = \frac{4\pi}{c}\frac{g}{w}. \qquad (132)$$

(Здесь $Z$ выражено в единицах СГСЭ.)

Испускаемая мощность определяется уравнением (130):

$$P(t) = \frac{1}{Z}V^2(0,\ t) = \frac{c}{4\pi}\frac{w}{g}V^2(0,\ t). \qquad (133)$$

Выразим мощность через напряженность электрического поля $E_x$ (компоненты электрического поля $E_y$ и $E_z$ равны нулю), которая определена в каждой точке между пластинами. Имеем

$$V(0,\ t) = gE_x(0,\ t). \qquad (134)$$

Подставляя (134) в (133), имеем

$$P(t) = \frac{c}{4\pi} wgE_x^2(0,\ t). \qquad (135)$$

Заметим, что $wg$ — поперечное сечение передающей линии. Разделив уравнение (135) на $wg$, получим интенсивность излучения [в *эрг/(см²·сек)*], которую для электромагнитных волн удобно обозначить через $S$ (символ $I$ занят для обозначения тока). Вспомнив наш опыт со струнами и звуковыми волнами, мы можем говорить об интенсивности в точке $z$, заменив в уравнении $z=0$ на $z$. Для бегущих плоских электромагнитных волн, распространяющихся в направлении $z$ в передающей линии из параллельных пластин, энергия, переносимая за секунду через площадь в 1 *см²*, равна интенсивности излучения:

$$\boxed{S(z,\ t) = \frac{c}{4\pi}E_x^2(z,\ t).} \qquad (136)$$

Найдем теперь отношение не равной нулю компоненты магнитного поля $B_y(z,\ t)$ (компоненты $B_x$ и $B_z$ равны нулю) к $E_x(z,\ t)$. Мы можем его найти, зная, что $V(z,\ t)$ и $I(z,\ t)$ связаны через $Z$, и зная, как связаны $V$ и $E_x$, $B_y$ и $I$. Имеем

$$V = ZI,$$

т. е.

$$gE_x = \frac{4\pi}{c}\frac{g}{w}I. \qquad (137)$$

В соответствии с уравнением (57) (п. 4.2) имеем

$$wB_y = \frac{4\pi}{c} I. \tag{138}$$

Сравнивая уравнения (137) и (138), мы видим, что для бегущей плоской электромагнитной волны, распространяющейся в передающей линии из параллельных пластин в направлении $+z$, электрическое и магнитное поля в любой точке $z$ и в любое время перпендикулярны друг другу и направлению распространения, равны по величине, а их знаки таковы, что векторное произведение $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ совпадает с направлением распространения волны. Короче:

$$\boxed{E_x(z,\ t) = B_y(z,\ t).} \tag{139}$$

*Плоские электромагнитные волны в прозрачной среде.* Предположим, что передающая линия заполнена веществом с диэлектрической постоянной $\varepsilon$ и магнитной проницаемостью $\mu$. Приложенное напряжение равно $V(t)$. Испускаемая мощность равна

$$P(t) = \frac{V^2}{Z},$$

где

$$V = gE_x \text{ и } Z = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} Z_{\text{вакуум}},$$

т. е.

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w}. \tag{140}$$

Из этих трех уравнений получаем интенсивность $S = P/gw$:

$$\boxed{S(z,\ t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{c}{4\pi} E_x^2(z,\ t).} \tag{141}$$

Найдем также отношение $B_y$ к $E_x$. При заданном токе $I$ магнитное поле должно возрасти в $\mu$ раз:

$$wB_y = \mu \frac{4\pi}{c} I,$$

но

$$V = ZI,$$

т. е.

$$gE_x = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w} I.$$

Сравнивая полученные выражения для $E_x$ и $B_y$, имеем

$$\frac{B_y}{E_x} = \sqrt{\varepsilon\mu},$$

т. е.

$$\boxed{B_y = \sqrt{\varepsilon\mu}\, E_x = nE_x.} \tag{142}$$



*Плоские электромагнитные волны в безграничном вакууме.* Уравнения (136) и (139), справедливые для вакуума,

$$S(z,\ t) = \frac{c}{4\pi} E_x^2(z,\ t), \quad B_y(z,\ t) = E_x(z,\ t), \tag{143}$$

были выведены для электромагнитных волн, которые возникают от волн тока и напряжения в прямой параллельной передающей линии. Рассмотренную линию можно считать однородной (предполагается, что краевые эффекты отсутствуют). Электрическое и магнитное поля $E_x(z,\ t)$ и $B_y(z,\ t)$ тоже однородны, т. е. при достаточной ширине пластин линии $w$, когда краевыми эффектами можно пренебречь, $E_x$ можно считать одинаковым для всех значений $x$ и $y$ (для заданных $z$ и $t$); то же справедливо для $B_y$. Такие волны называются *плоскими*. Любая плоскость, перпендикулярная оси $z$ (оси, вдоль которой распространяются волны), является плоскостью постоянной фазы, т. е. в этой плоскости $(\omega t - kz) = \text{const}$. Такая плоскость называется *волновым фронтом*.

Существует несколько способов получения бегущих плоских электромагнитных волн. Один способ, связанный с использованием передающей линии из параллельных пластин, мы только что рассмотрели. Источником плоских электромагнитных волн может быть и точечный источник (например свеча, уличный фонарь или звезда), если только наблюдать волны на достаточно далеком расстоянии от источника. (В следующей главе мы установим, при каких размерах источника его можно считать точечным.) В этом случае все излучение в области вблизи наблюдателя распространяется в определенном направлении при условии, что эта область не слишком велика. (Дальше мы установим критерии «не слишком большой» области. Они зависят от характера выполняемых опытов.) Выражения (143) описывают локальные свойства электромагнитных плоских волн (это утверждение кажется правдоподобным, но в следующей главе мы докажем его, исходя из уравнений Максвелла) и не зависят от граничных условий, т. е. от конфигураций тока и заряда, которые ответственны за электромагнитное излучение. Разумеется, тот факт, что у вектора $\mathbf{E}$ есть только составляющая $E_x$, зависит от начальных условий, связанных с геометрией передающей линии.

Теперь мы сформулируем важные результаты, заключенные в выражениях (143), в более общем виде.

*Бегущие электромагнитные плоские волны, распространяющиеся в направлении $+\mathbf{z}$ в вакууме, обладают следующими свойствами* (не все из них независимы):

1. $\mathbf{E}(z,\ t)$ и $\mathbf{B}(z,\ t)$ перпендикулярны $\hat{\mathbf{z}}$ и друг другу.
2. $\mathbf{E}(z,\ t)$ и $\mathbf{B}(z,\ t)$ равны по величине.
3. Направления $\mathbf{E}(z,\ t)$ и $\mathbf{B}(z,\ t)$ таковы, что вектор $\mathbf{E}(z,\ t) \times \mathbf{B}(z,\ t)$ направлен вдоль $+\hat{\mathbf{z}}$.
4. Первые три свойства означают, что $\mathbf{B}(z,\ t) = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(z,\ t)$, что эквивалентно соотношениям $B_y(z,\ t) = E_x(z,\ t)$ и $B_x(z,\ t) = -E_y(z,\ t)$.

5. Фазовая скорость равна $c$ и не зависит от частоты, т. е. электромагнитные волны в вакууме — не диспергирующие волны.

6. Мгновенная интенсивность (в единицах *эрг/(см²·сек)*) равна

$$S(z,\ t)=\frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}^2(z,\ t)=\frac{c}{4\pi}\,[E_x^2(z,\ t)+E_y^2(z,\ t)]. \qquad (144)$$

Для этой величины используют также синонимы: интенсивность, поток, поток энергии.

Приведенные выше соотношения очень важны и являются совершенно общими. Они справедливы для всех частот, например от частоты $\nu=1$ цикл в 100 000 лет (ей соответствует длина волны $c/\nu$ в 100 000 световых лет, что примерно равно диаметру нашей Галактики) до частот порядка $\nu\approx 3\cdot 10^{25}$ *гц*, которым соответствует длина волны порядка $10^{-15}$ *см* или энергия фотона $h\nu$ порядка 100 *Гэв*.

Приложение. *Определение солнечной постоянной.* Этот пример иллюстрирует понятие о потоке энергии и состоит из домашнего опыта и вычислений.

Задача (домашний опыт). Определить среднеквадратичное значение электрического поля бегущих волн солнечного света на земной поверхности.

Решение. (Данный опыт связан с рядом приближений и допущений, что накладывает некоторые ограничения на полученный результат. Такое замечание, впрочем, можно сделать по поводу любого опыта.) Возьмите 200—300-ваттную осветительную лампу с прозрачным баллоном (т. е. не матовую) и нитью не длиннее 2,5 *см*. Теперь закройте глаза. Приблизьте зажженную лампу к лицу. Ваши веки почувствуют тепло, созданное поглощением невидимого инфракрасного излучения лампы, а закрытые веками глаза *(веки играют роль фильтров)* ощутят красноту, обусловленную проникающим через веки светом. Выключите лампу и выйдите на улицу (предположим, что день солнечный). «Посмотрите» закрытыми глазами на солнце. Вы опять ощутите теплоту на веках и «красноту» солнечного света, проникающего через веки. Вернемся к электрической лампе. Найдите расстояние $R$ от век до нити, на котором свет от лампы вызывает те же тепловые и цветовые ощущения, что и свет солнца. На этом заканчивается экспериментальная часть задачи. Остались вычисления. Будем считать, что нить излучает одинаково во всех направлениях, и вычислим (зная мощность лампы $P$ и расстояние $R$) поток энергии $S$, падающий на веки. Легко видеть, что поток $S$ (т. е. средняя во времени интенсивность излучения, попадающего на веки) равен

$$\langle S(z,\ t)\rangle \equiv S=\frac{P}{4\pi R^2}. \qquad (145)$$

Из условий нашего опыта следует, что этой же величине равна средняя во времени интенсивность солнечного света, падающего на веки. Разумеется, все это относится к воспринимаемому в данном опыте нашим глазом участку спектра (в него входит также часть инфракрасной области спектра, воспринимаемой веками). Предположим



далее, что спектр излучения лампы и солнца примерно одинаков. Тогда мы можем, воспользовавшись выражением (145), оценить полный поток от солнца. Величина $S$ называется солнечной постоянной и приведена в справочниках физических констант. Вы найдете там, что $S$ равно 1,94 калории на 1 *см²* в одну минуту. Напомним, что 1 *кал*=4,18 *дж* и что 1 *дж/сек*=1 *вт*.

Таким образом, в привычных нам единицах солнечная постоянная *на границе атмосферы Земли* равна

$$S=\frac{(1{,}94)\ (4{,}18)\ \text{дж}}{60\ \text{сек}}=135\ \text{мвт/см}^2. \qquad (146)$$

Воспользовавшись этой величиной, найдем среднеквадратичное значение электрического поля в *в/см*:

$$S=0{,}135\cdot 10^7\,\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2\cdot\text{сек}}=\frac{c}{4\pi}\langle E^2\rangle,$$

$$\langle E^2\rangle=\frac{(12{,}57)\ (0{,}135\cdot 10^7)}{3\cdot 10^{10}}=5{,}6\cdot 10^{-4},$$

$$\langle E^2\rangle^{1/2}=2{,}4\cdot 10^{-2}\ \text{ед. СГСЭ}_V.$$

Но

$$1\ \text{ед. СГСЭ}_V=300\ \text{в},$$

таким образом,

$$\langle E^2\rangle^{1/2}=7{,}2\ \text{в/см}. \qquad (147)$$

*Измерение потока энергии электромагнитного излучения.* В приведенном выше примере глаза и веки были использованы для определения солнечной постоянной. Разумеется, это далеко не типичные детекторы излучения. Заметим, что, по-видимому, их можно считать квадратичными детекторами. Действительно, ведь они не чувствительны к фазе регистрируемых колебаний. (Вспомним, что ухо также является квадратичным детектором звука.) Для подобных детекторов величиной, описывающей падающий поток, является не мгновенное значение потока $S(z,\ t)$, а скорее среднее по времени значение потока за один цикл колебаний:

$$S\equiv\langle S(z,\ t)\rangle=\frac{c}{4\pi}\langle\,\mathbf{E}^2(z,\ t)\rangle \qquad (148)$$

(для плоской волны средняя по времени интенсивность не зависит от $z$).

Обычно квадратичный детектор содержит в себе широкополосный фильтр (который пропускает излучение только в определенной полосе частот), соединенный со входом «датчика», воспринимающего падающий поток с минимальными потерями на отражение. Выходной сигнал датчика пропорционален величине поглощенной энергии (или по крайней мере зависит от нее). Очень часто в таких детекторах в качестве чувствительного элемента, поглощающего энергию, используется чувствительный *калориметр*. Величину поглощенной в единицу времени энергии можно определить, измеряя либо скорость возрастания температуры поглотителя, либо равновесное превышение температуры чувствительного элемента над температурой окружающей среды (которая может быть весьма

низкой, если в качестве среды взят, например, жидкий гелий). В последнем случае равновесие поддерживается постоянной утечкой тепла от чувствительного элемента к окружающей среде. Такой детектор должен содержать устройство для калибровки, которое заключается в том, например, что детектор изолируют от внешнего излучения и пропускают в течение определенного времени $t$ известный ток по эталонному сопротивлению $R$, вмонтированному в чувствительный элемент детектора. Таким способом можно определить энергию ($I^2Rt$), рассеянную сопротивлением. Эта энергия должна быть равна поглощенной детектором энергии, которая вызывает такое же повышение температуры относительно окружающей среды, как и ток, пропущенный по сопротивлению. Детекторы такого типа имеют много различных модификаций.

К другому классу детекторов относится *счетчик фотонов*, каким является, например, фотоумножитель. Когда фотон падает на катод фотоумножителя, он выбивает из него один электрон. Этот электрон ускоряется разностью потенциалов около 100 *в* и при столкновении с первым электродом (он называется динодом) создает несколько (обычно 3—4) вторичных электронов. Выбитые из первого динода электроны снова ускоряются и попадают на второй динод, где каждый из них выбивает 3—4 или большее число электронов, и т. д. В результате один фотон, попавший на фотокатод умножителя, вызывает появление после десятого динода около $(3{,}5)^{10}$ электронов. Эти электроны собираются на аноде фотоумножителя. Проходя через сопротивление, соединенное с анодом, они образуют импульс напряжения. Такие импульсы могут быть записаны и сосчитаны. Каждый импульс соответствует *поглощению одного фотона, который имеет энергию* $h\nu$ ($\nu$ — частота колебаний, $h$ — постоянная Планка). *Эффективность фотоумножителя* для фотонов частоты $\nu$ можно определить с помощью эталонного источника излучения. *Средняя скорость счета* $R$ за интервал времени $t_0$ определяется как отношение числа $N$ сосчитанных за это время событий к величине $t_0$:

$$R = \frac{N \pm \sqrt{N}}{t_0}. \qquad (149)$$

Указанная здесь ошибка $\pm\sqrt{N}$ является мерой статистической неопределенности опыта. Зная величину $R$ и эффективность детектора $e(\nu)$, можно определить поток энергии $S$. Эти величины связаны соотношением

$$R = \left(\frac{S}{h\nu}\right) Ae(\nu) = \frac{1}{h\nu}\,\frac{c}{4\pi}\,\langle \mathbf{E}^2(z,\ t)\rangle\, Ae(\nu), \qquad (150)$$

где $A$ — площадь фотокатода (в $см^2$), $S$ — усредненная по времени интенсивность, т. е. поток энергии [в $эрг/(см^2 \cdot сек)$], $S/h\nu$ — средний во времени поток фотонов [в единицах $фотон/(см^2 \cdot сек)$] и $e(\nu)$ — эффективность детектора к излучению данной частоты.

Эффективность детектора представляет собой вероятность того, что падающий на фотокатод электрон будет поглощен, образовав



при этом хотя бы один фотоэлектрон. Обычно эффективность фотоумножителей лежит в пределах $1 \div 20\%$.

Примером неквадратичного детектора может служить система из приемной антенны, резонансной схемы, на которую подается напряжение, наведенное на антенне, усилителя и осциллографа. На экране осциллографа можно наблюдать мгновенные значения фазы и интенсивности излучения от удаленного передатчика. Фазу электромагнитной волны можно измерить с неограниченной точностью, если существует поток большого числа фотонов, при котором эффект от действия отдельного фотона незаметен. В этом случае вы можете наблюдать зависимость электрического поля от времени. Для одного фотона нельзя определить фазовую константу $\varphi$ в световой волне, описываемой зависимостью $E_x = A\cos(\omega t - kz + \varphi)$.

*Эталон силы видимого света — стандартная свеча.* В Палате мер и весов хранится эталон силы света, который называется *свечой*. Мы не будем описывать сложное устройство этого эталона. Укажем, что яркость стандартной эталонной свечи сравнима с яркостью обычной свечки. Полная мощность излучения, испускаемого эталонной свечой в полосе частот видимого света, равна 20,3 *мвт*:

$$1\ св \approx 20\ мвт \text{ видимого света.} \qquad (151)$$

Представим себе точечный источник видимого света силой в 1 *св*. Он равномерно излучает по всем направлениям. Световой поток, испускаемый таким источником в единице телесного угла, равного одному стерадиану, называется *люменом*.

*Поверхностная яркость.* Каждая часть поверхности пламени обычной свечи испускает свет во всех направлениях. При этом поверхность свечи кажется одинаково яркой независимо от того, с какого расстояния вы за ней наблюдаете. То же справедливо, например, для Луны, для листа белой бумаги и приблизительно справедливо для поверхности нематовой лампы накаливания. *Поверхностная яркость* или просто *яркость* определяется как световой поток в направлении, перпендикулярном поверхности, испускаемый с единичной площади. Эта величина может измеряться в ваттах видимого света или в свечах, отнесенных к единичной площади. Пламя обычной свечи имеет площадь порядка 2 $см^2$, и испускаемый ею световой поток близок к 1 *св*. Таким образом, яркость пламени свечи имеет порядок:

$$\text{Поверхностная яркость свечи} \approx \frac{1\ св}{2\ см^2} = 0{,}5\ \frac{св}{см^2}. \qquad (152)$$

Обычная 40-ваттная 127-вольтовая лампа с вольфрамовой нитью накаливания имеет абсолютную световую эффективность около 1,8%, 100-ваттная лампа имеет эффективность 2,5%. Это значит, что лишь около 1,8% от 40 *вт* приходится на ту часть спектра, которая ощущается глазом. Бо́льшая часть излучения лампы глазом не воспринимается и рассеивается в виде тепла. (Некоторая часть мощности теряется в месте соединения нити и цоколя, а часть излучения

инфракрасной области спектра поглощается стеклянным баллоном лампы. Действительно, даже чистый баллон, прозрачный для видимого излучения, быстро становится очень горячим.) Оценим яркость 40-ваттной лампы. Диаметр баллона лампы около 6 *см*. Если внимательно посмотреть на лампу, то можно убедиться, что ее яркость не однородна и уменьшается с расстоянием от центра. Этим яркость лампы отличается от яркости Луны или белого листа бумаги. Лампа кажется однородно яркой вблизи центра, в области сферы с радиусом около $r=1$ *см*, и за ее пределами яркость быстро падает. Поэтому наши оценки мы сделаем для сферической поверхности радиусом 1 *см*. Ее площадь $4\pi r^2=4\pi=12{,}6$ *см*$^2$. Яркость поверхности такой фиктивной сферы равна отношению «видимой» мощности к площади сферы. «Видимая» мощность равна произведению 40 *вт* на эффективность, равную 0,018. Ответ (в *св/см*$^2$):

Яркость поверхности 40-ваттной лампы =

$$=\frac{(40)\,(0{,}018)}{(12{,}6)\,(20\cdot 10^{-3})}=2{,}8\ \frac{св}{см^2}\,. \qquad (153)$$

Вы можете сравнить этот результат с яркостью лампы с вольфрамовой нитью, указанной в каком-нибудь справочнике физических констант. В заключение отметим, что наряду с обычными и матовыми лампами существуют лампы «мягкого белого света», которые дают практически однородную яркость по всей поверхности.

*Почему при приближении к Луне она не кажется ярче?* Попытаемся понять, почему яркость какой-либо поверхности, испускающей свет во всех направлениях (например, листа белой бумаги, или Луны, или Солнца, или голубого неба), не зависит от расстояния до этой поверхности. Предположим, что вы смотрите на стену, сплошь заполненную лампами «мягкого белого света». Пусть $D$ — плотность ламп на стене в единицах «одна лампа на единицу площади стены». По определению яркость стены будет такой же, как яркость отдельной лампы. Далее, визуальное ощущение яркости зависит от величины световой энергии, попадающей на глаз (от источника) из «стандартного конуса» с вершиной в глазу и с некоторой угловой апертурой. В данный момент времени вы смотрите на небольшую часть яркой поверхности и ваше ощущение яркости зависит от энергии, попадающей на глаз с поверхности, ограниченной определенным конусом. Допустим, что расстояние от глаза до стены равно $R$ и что $\Delta A$ — площадь стены, на которую вы смотрите. Телесный угол, под которым ваш глаз видит площадь $\Delta A$, равен

$$\Delta\Omega=\frac{\Delta A}{R^2}\,. \qquad (154)$$

Площадь $\Delta A$ ориентирована перпендикулярно линии взгляда, и ее линейные размеры значительно меньше $R$. Данный угол $\Delta\Omega$ соответствует конусу с определенным углом раствора при вершине. *Ощущение яркости пропорционально энергии, попадающей на ваш глаз с поверхности, ограниченной некоторым определенным телесным углом.* Число ламп $N$ внутри конуса с телесным углом $\Delta\Omega$ равно



плотности ламп $D$, умноженной на площадь $\Delta A$:

$$N=D\,\Delta A=D\,\Delta\Omega\cdot R^2. \qquad (155)$$

Теперь допустим, что вы удаляетесь от стены. Число ламп $N$, которое будет попадать в ваше поле зрения, пропорционально только $R^2$, так как $\Delta\Omega$ и $D$ постоянны. Однако интенсивность, которая определяет ощущение яркости для каждой отдельной лампы, уменьшается, как $1/R^2$, так как мощность лампы $P$ равномерно распределена по площади $4\pi R^2$. Эти две причины нейтрализуют друг друга. Число ламп $N$, умноженное на $1/R^2$, есть величина постоянная. Таким образом, интенсивность $S$, попадающая на ваш глаз из конуса с телесным углом $\Delta\Omega$, постоянна:

$$S=\frac{NP}{4\pi R^2}=D\,\frac{\Delta\Omega}{4\pi}\,P\,\frac{эрг}{см^2\cdot сек}\,. \qquad (156)$$

Мы показали, что стена, составленная из ламп, выглядит одинаково ярко как издали, так и вблизи. То же справедливо и для листа белой бумаги.

В приведенном рассуждении мы предполагали, что линия взгляда перпендикулярна стене с лампами. Допустим теперь, что стена с лампами наклонена под большим углом к линии взгляда. Можно думать, что чем больше ламп окажется в конусе, тем ярче будет наклоненная поверхность. Однако это не так: при наклоне стены лампы будут частично затемнять друг друга. Если взять две лампы и загородить одной другую, то загороженная лампа не даст вклада в освещенность. Излучающая поверхность двух перекрывающихся ламп не ярче, чем поверхность одной лампы.

Если осветить белую бумагу или соль или сахар, рассыпанный на некоторой поверхности, то свет проникнет на некоторую глубину. То же можно сказать о поверхности Луны, освещаемой Солнцем. Свет же, излучаемый с поверхности, многократно рассеян. Полный вклад в освещенность в этом случае будет таким же, как если бы мы имели дело с многослойными стенками, состоящими из ламп «мягкого белого света». Чтобы убедиться в том, что значительная часть испускаемого света может приходить с глубины, положите лист белой папиросной бумаги на черную поверхность. Добавьте второй, третий листы и т. д. По мере добавления листов бумага будет казаться все более белой.

*Освещенность.* Освещенность определяется как световой поток, приходящийся на единицу освещаемой поверхности. Освещенность, создаваемая данным источником, пропорциональна его яркости и телесному углу, под которым он виден с освещаемой поверхности. Например, если бы диаметр Луны увеличился вдвое, то яркость ее поверхности не изменилась бы (яркость Луны определяется освещением ее Солнцем), но телесный угол, под которым Луна видна с Земли, возрос бы в четыре раза. Поэтому световой поток на Землю и ее освещенность стали бы в четыре раза больше. Освещенность

имеет размерность *эрг/(см²·сек)*. Ее измеряют обычно в люменах на квадратный метр. Эта единица освещенности называется *люксом*.

В качестве примера заметим, что в США и Англии иногда пользуются другой единицей освещенности. Это освещенность, создаваемая точечным источником силой в 1 *св* на расстоянии в один фут. Такая единица освещенности называется *фут-свечой*. Из выражения (151) легко получить (сделайте это сами), что

$$1\ \textit{фут-св} \approx 1{,}8\ \textit{мквт/см}^2. \qquad (157)$$

Приложение 1. *Сравнение освещенности от 40-ваттной лампы и от Луны.* В табл. 4.3 приведена яркость ряда важных источников света. Мы видим, что яркость неба и свечи одинакова

Таблица 4.3

**Яркость поверхности различных источников света**

| Поверхность | Яркость поверхности, *св/см²* |
|---|---|
| Свеча | 0,5 |
| 40-ваттная матовая лампа | 2,5 |
| Чистое небо | 0,4 |
| Луна | 0,25 |
| Солнце | 160 000 |
| 40-ваттная прозрачная лампа | 200 |

свечу с трудом можно заметить на фоне голубого неба. Только различие голубого цвета неба и желтого пламени свечи позволяет ее обнаружить. Рассмотрим такую задачу: на каком расстоянии $R$ 40-ваттная матовая лампа с «эффективным» диаметром 2 *см* создаст ту же освещенность, что Луна? Из табл. 4.3 следует, что яркость поверхности лампы в 10 раз больше яркости полной Луны. Ту же освещенность, что и Луна, эта лампа создаст в телесном угле, равном 1/10 от телесного угла, под которым Луна видна с Земли. Поэтому угловой диаметр лампы должен составлять $1/\sqrt{10} = 1/3{,}2$ от углового диаметра Луны. Последний равен

$$\frac{\text{Диаметр Луны}}{\text{Расстояние от Земли до Луны}} = 1/100\ \textit{рад}.$$

Таким образом, чтобы освещенность от Луны была равна освещенности от лампы, последняя должна быть видна под углом 1/320 *рад*. Имеем $1/320 = 2\ \textit{см}/R$, откуда $R = 6{,}4\ \textit{м}$; 40-ваттная лампа на расстоянии 6,4 *м* даст ту же освещенность, что Луна. Это справедливо как для матовой, так и для обыкновенной лампы. Обыкновенная лампа будет только выглядеть ярче, но создаст ту же освещенность.

Приложение 2 (добавлено редактором перевода). В заключение этого раздела, посвященного измерению световых потоков, рассмотрим выполненную Ньютоном около 300 лет назад оценку расстояния до «неподвижных» звезд. Эта оценка основана на хорошо известном Ньютону экспериментальном факте, который заключается в том, что освещенность, создаваемая в фокальной плоскости телескопа планетой Сатурн (она светит отраженным светом Солнца), близка к освещенности от некоторых звезд, и на предположении, что эти звезды идентичны Солнцу. Приведем соответствующее место *) из произведения Ньютона «О системе мира», по-видимому, представляющего собой предварительный вариант третьей книги «Математических начал натуральной философии» (см. немецкий перевод Вольферса (J. P. Wolfers «Mathematische Principien der Naturlehre, Berlin, 1872), стр. 551):

«На диск Сатурна падает около $\frac{1}{2\,100\,000\,000}$ части солнечного света **). Во столько же раз поверхность этого диска меньше сферической поверхности, радиус которой равен радиусу орбиты Сатурна. Предположим далее, что Сатурн отражает $^1/_4$ этого света. Тогда отраженный полусферой Сатурна свет будет составлять $\frac{1}{4\,200\,000\,000}$ часть света, испущенного полусферой Солнца.

Уменьшение света обратно пропорционально второй степени расстояния до светящегося тела. Поэтому, если Солнце было бы на расстоянии от Земли в $10\,000\sqrt{42}$ раз большем, чем Сатурн, оно оказалось бы таким же ярким, каким кажется Сатурн без своего кольца. Такое свечение немного превосходило бы свечение неподвижной звезды первой величины. Таким образом, расстояние, с которого Солнце светило бы, как неподвижная звезда, приблизительно в 100 000 раз больше расстояния до Сатурна. При этом его угловой диаметр был бы равен $7^{IV}\ 16^{V}$, а параллакс, созданный годичным движением Земли, составил бы $13^{III}$. Таковы расстояния, угловой диаметр и параллакс звезд первой величины, которые равны нашему Солнцу по величине и свету».

К этому замечательному отрывку из книги Ньютона остается добавить перечень расстояний до нескольких ярких и сравнительно близких к нам звезд. Выраженные в расстояниях от Солнца до Сатурна, они приведены в таблице:

| | |
|---|---|
| α Центавра | 28 000 |
| Сириус | 58 000 |
| Процион | 75 000 |
| Альтаир | 101 000 |

Таким образом, не выходя из комнаты, по сравнению освещенностей Ньютон правильно оценил порядок расстояния до звезд.

*) Редактор благодарен И. Ю. Кобзареву, от которого он узнал об этой оценке.

**) В таблицах физических и химических констант (Кэй и Лэби, Физматгиз, 1962) вы найдете, что диаметр Сатурна равен $d = 1{,}21 \cdot 10^5\ \textit{км}$, а его среднее расстояние от Солнца $R = 1{,}43 \cdot 10^9\ \textit{км}$. Таким образом, Сатурн, рассматриваемый с Солнца, занимает $\frac{1}{4}\frac{\pi d^2}{4\pi R^2} = \frac{1}{2\,240\,000\,000}$ часть сферы. Это число близко к приведенному Ньютоном.

**4.1.** Конец струны в точке $z=0$ под действием гармонической силы колеблется с частотой 10 *гц* и амплитудой 1 *см*. Второй конец струны находится достаточно далеко, т.е. система открыта (или нагружена на нагрузку, не дающую отражения). Фазовая скорость равна 5 *м/сек*. Напишите выражения для движения точек струны, расположенных на расстояниях $z=325$ *см* и $z=350$ *см* от выходных зажимов передатчика ($z=0$).

**4.2.** Понятие фазовой скорости $v_\phi$ было введено при описании бегущих волн, для которых $v_\phi=\lambda\nu$. Понятия длины волны $\lambda$ и частоты $\nu$ сохраняются и для стоячих волн. Поэтому мы можем найти фазовую скорость $v_\phi$, рассматривая стоячие волны вместо бегущих.

а) Рояльная струна длиной 1 *м* имеет частоту первой моды (A440), равную 440 *гц*. Найдите фазовую скорость волны, бегущей по этой струне.

б) Покажите, что для струны скрипки или рояля, закрепленной на концах, период $T$ первой моды определяется временем распространения импульса от одного конца струны к другому и обратно, если импульс распространяется с фазовой скоростью. Чему равны периоды более высоких мод?

в) Объясните результат, полученный в б), считая, что молоточек рояля ударяет струну у одного из концов и таким образом генерирует «волновой пакет» или «импульс», распространяющийся по струне с фазовой скоростью. Подумайте, как произвести фурье-анализ движения *любой* данной точки струны. Вспомните, что было сказано о фурье-анализе в главе 2.

г) Рассмотрим струну, закрепленную в точке $z=0$ и свободную в точке $z=L$. Покажите, что период первой моды равен времени прохождения импульсом расстояния «туда — обратно» и опять «туда — обратно», т. е. расстояния $4L$ с фазовой скоростью.

**4.3.** Предположим, что диаметр струны рояля [задача 4.2, часть в)] равен 1 *мм* и что струна сделана из стали, плотность которой 7,9 *г/см*$^3$. Найдите натяжение в динах и *кГ*.

Ответ. Около 500 *кГ*.

**4.4.** Опыт. *Фазовая скорость волн в «пружине»*.

а) Измерьте фазовую скорость с помощью стоячих волн (см. задачу 4.2).

б) Вычисления. Покажите «теоретически», что фазовая скорость для «пружины» (состоящей из фиксированного числа витков) пропорциональна ее длине. Если вы удвоите длину «пружины», растянув ее, то фазовая скорость возрастет в два раза.

в) Докажите это экспериментально с помощью стоячих волн.

г) Пошлите вдоль «пружины» короткий импульс или волновой пакет. В то же время заставьте «пружину» колебаться в самой низкой поперечной моде. Равно ли в этом случае время распространения импульса туда и обратно периоду самой низкой моды?

**4.5.** Опыт. *Затухание в пучке резинок*. Соберите пучок резинок длиной 60—100 *см*, связав вместе несколько резиновых нитей. Попробуйте показать, что фазовая скорость для продольных волн больше, чем для поперечных. Вы обнаружите, что продольные моды сильнее затухают. Расположите одну из резиновых нитей у губ. Неожиданно растяните ее. Подождите немного и затем ослабьте натяжение. Что говорят вам результаты этого опыта о затухании? Почему продольные моды затухают значительно сильнее поперечных? Как при таком большом затухании можно получить хорошие продольные колебания?

**4.6.** Опыт. *Измерение скорости звука с помощью волновых пакетов*. Рассмотрим два способа.

а) Для первого способа необходим помощник, который поджег бы «хлопушку» примерно в километре от вас. Увидев вспышку света от разорвавшейся хлопушки, включите секундомер и остановите его, когда услышите звук взрыва. Измерьте шагами расстояние. Проделайте этот опыт для двух расстояний, отличающихся в два раза. Изобразите графически зависимость времени прихода звуковой волны от расстояния (по двум точкам). Пересекает ли прямая линия, проведенная через обе точки, начало координат? Если нет, то почему? Если линия не проходит через начало координат, можете ли вы тем не менее определить скорость?



б) Найдите школьный двор или площадку для игр, которые представляли бы собой широкое плоское пространство, ограниченное с одной стороны каким-либо строением, так чтобы можно было услышать чистое эхо, хлопая в ладоши на расстоянии примерно пятидесяти метров от стены. Время прохождения звуком расстояния туда и обратно будет порядка двух-трех десятых секунды. Его трудно измерить точно даже с помощью секундомера. Покажем, как это сделать с помощью обычных часов (с секундной стрелкой). Положите часы на землю, чтобы видеть их при хлопках. Начните ритмично хлопать; вначале медленно, прислушиваясь к хлопку и к эху. Увеличивайте темп до тех пор, пока эхо не будет приходить точно в момент хлопка. Такой темп может соответствовать примерно двум хлопкам в секунду. Поддерживайте его примерно в течение 10 *сек*, наблюдая за часами и одновременно считая хлопки. (Несколько минут у вас уйдет на практику.) Измерьте шагами расстояние до вертикальной стены, которая давала эхо. Теперь дело за арифметикой.

**4.7.** *Коаксиальная передающая линия*. Покажите, что погонная емкость $C/a$ для коаксиальной передающей линии с радиусами внутреннего и внешнего проводников соответственно $r_1$ и $r_2$ и вакуумом между проводниками равна (в единицах СГСЭ, т. е. в *см* емкости, отнесенных к *см* длины линии)

$$\frac{C}{a}=\frac{1}{2\ln(r_2/r_1)}.$$

Покажите, что погонная самоиндукция $L/a$ равна (в ед. СГСЭ)

$$\frac{L}{a}=\frac{2}{c^2}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Чтобы получить величину $C/a$, воспользуйтесь тем, что $Q=CV$, и законом Гаусса (см. том II, п.3.5). Чтобы получить величину $L/a$, вспомните, что $L=(1/c)\Phi/I$, где $\Phi$ — магнитный поток, образованный током $I$ [см. том II, п.7.8, уравнения (7.53) и (7.54)].

**4.8.** *Передающая линия из параллельных проводов*. Начните с задачи 4.7, в которой может быть использована симметрия линии. В данной задаче такая симметрия отсутствует, но ее легко решить с помощью принципа суперпозиции. Вычислите вклад в поле от отдельного провода. Затем умножьте полученный результат на 2. Покажите, что $C/a$ и $L/a$ равны

$$\frac{C}{a}=\frac{1}{4\ln[(r+D)/r]},\qquad \frac{L}{a}=\frac{4}{c^2}\ln\frac{r+D}{r},$$

где $r$ — радиус каждого из проводов, а $(r+D)$ — расстояние от оси одного провода до поверхности другого. Заметьте, что вычисления очень похожи на вычисления в задаче 4.7, за исключением того, что здесь появляется множитель 2. Объясните его происхождение.

**4.9.** Покажите (например, при помощи простых рассуждений, основанных на симметрии задачи), что электрическое и магнитное поля равны нулю снаружи внешнего проводника коаксиальной передающей линии и внутри внутреннего проводника. Покажите, что электрическое и магнитное поля равны нулю вне области между пластинами передающей линии из плоскопараллельных пластин.

**4.10.** Покажите, что индуктивность передающей линии из плоскопараллельных пластин определяется уравнением (59) п.4.2 до тех пор, пока длина волны велика по сравнению с толщиной пластины $d_0$. [Обсуждение этого вопроса см. в п.4.2, включая уравнение (60). В качестве отправного пункта используйте уравнение (60).]

**4.11.** В соответствии с табл. 9.1, том II, п.9.1, диэлектрическая постоянная воздуха при нормальных условиях равна 1,00059. (Предположим, что магнитная проницаемость равна единице.) Таким образом, в соответствии с уравнением (69) п. 4.3 показатель преломления воздуха при нормальных условиях равен $\sqrt{1{,}00059}=1{,}00029$. Этот результат хорошо согласуется с экспериментальным значением, приведенным в табл. 4.1 п.4.3. С другой стороны, диэлектрическая

постоянная воды равна 80, но ее показатель преломления не равен $\sqrt{80} \approx 9$, а равен примерно 1,33. Как объяснить такое большое различие?

**4.12.** Опыт. *Водяная призма; дисперсия воды.* Сделайте водяную призму, соединив два предметных стекла микроскопа, чтобы образовалось V-образное «корыто». Скрепите концы этого корыта с помощью замазки, пластилина, ленты скотча. Наполните призму водой и смотрите через призму, расположив ее близко к глазу. Цветные края белых предметов, которые вы увидите через призму, возникают вследствие явления, которое называется в оптике линз хроматической аберрацией и от которого стараются избавиться. Теперь посмотрите на точечный или линейный источник белого света. [Самым хорошим точечным источником для этого и других домашних опытов может служить простой фонарь. Отверните стекло фонаря и покройте алюминиевый отражатель куском черной (или темной) материи с отверстием для маленькой лампочки фонаря. Наилучшим линейным источником света является простая 25-или 40-ваттная лампа с прозрачным стеклянным баллоном и прямой нитью длиной в несколько *см*.] Поместите «пурпурный» фильтр между глазом и источником света. Вы увидите два «виртуальных» источника: один красный, другой голубой. (Чтобы понять действие фильтра, посмотрите на источник белого света через фильтр и без него, используя вместо призмы дифракционную решетку. Вы увидите, что зеленый свет поглощается, в то время как красный и голубой проходят через фильтр и видны после решетки.) Предположим, что средняя длина волны голубого света, прошедшего через фильтр, равна 4500 Å, а средняя длина волны красного света равна 6500 Å. (После того как мы рассмотрим работу дифракционных решеток, вы сможете измерить эти длины волн более точно.) Измерьте видимое угловое расстояние между «виртуальными», голубым и красным, источниками света. Для этой цели можно воспользоваться куском бумаги с нанесенными на нее метками, расположив ее рядом с источником. Двигайтесь по направлению к источнику. По мере продвижения угловое расстояние между линиями на бумаге изменяется, и на определенном расстоянии линии на бумаге совпадут с эффективными источниками. Теперь вы можете определить расстояние между источниками (оно просто равно расстоянию между линиями на бумаге). Угловое же расстояние будет равно отношению расстояния между источниками к расстоянию от глаза до источника. Наклоняя призму, определите, сильно ли зависит угловое расстояние между эффективными источниками от угла падения пучка света на грань призмы. Получите форму зависимости угла отклонения луча от угла при вершине призмы и от показателя преломления. (*Указание.* Эту зависимость легко получить, приняв, что на первую грань призмы свет падает под прямым углом.) Измерьте угол призмы. Будет ли наблюдаться угловое отклонение (или смещение) пучка света, если предметные стекла будут параллельны (т. е. угол призмы равен нулю)? Как это можно проверить экспериментально? Наконец, определите величину изменения показателя преломления воды на каждую тысячу ангстрем длины волны. Сопоставьте эти результаты с результатами, полученными для стекла (см. табл. 4.2, п.4.3). (Возможно, окажется, что дисперсия в воде будет больше, хотя показатель преломления у воды меньше. Так ли это?) В качестве некоторого развлечения проделайте этот же эксперимент, используя вместо воды тяжелое минеральное масло. Попробуйте использовать и другие прозрачные жидкости.

**4.13.** Бесконечная струна с линейной плотностью 0,1 *г/см* и натяжением 50 *кГ* находится под действием гармонической силы, приложенной в точке $z=0$. Этот конец струны колеблется с частотой 100 *гц* и амплитудой 1 *см*. Чему равен средний во времени поток энергии в ваттах?

Ответ. Около 40 *вт* (дайте более точный ответ).

**4.14.** Одной из лучших демонстраций волн является опыт с «крутильной» волновой машиной. Она состоит из длинного «хребта», расположенного вдоль оси $z$, и поперечных «ребер», находящихся друг от друга на расстоянии $a=1$ *см*. «Хребет» представляет собой стальной провод с сечением около $2\times2$ *мм*$^2$. Каждое «ребро» — это железный стержень диаметром примерно 0,5 *см* и длиной 30 *см*. Эти стержни в своей средней части скреплены со стальным стержнем — «хребтом». Пусть возвращающий момент равен постоянной $K$, умноженной на угол закручивания (в радианах). Пусть $I$ — момент инерции одного стержня («ребра») относительно его середины.



а) Выведите формулу для скорости и импеданса волн скручивания. Импеданс определите следующим образом: «крутящий момент $= Z \times$ угловая скорость». Считайте, что длина волны много больше расстояния $a$ между соседними «ребрами».

б) Покажите, что дисперсионное соотношение в этом случае имеет вид $\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2(\frac{1}{2}ka)$, и найдите выражение для $\omega_0$.

в) До сих пор мы пренебрегали возвращающей силой, связанной с тяжестью. Предположим теперь, что все стержни колеблются вместе относительно своего горизонтального положения равновесия (так что «хребет» не скручивается) с угловой частотой $\omega_0$. Как выглядит закон дисперсии в этом случае? [Чтобы ответить на этот вопрос, а также чтобы познакомиться с некоторыми экспериментальными результатами, посмотрите статью B. A. Burgel, Am. J. Phys. 35, 913 (1967).]

**4.15.** Опыт. *Резонатор из бутылки (резонатор Гельмгольца).* Если дуть у горлышка кувшина или бутылки, то можно услышать звуковые колебания определенного тона, связанные с возбуждением самой низкой моды. Попытайтесь вычислить частоту колебаний, рассматривая бутылку как однородную, закрытую с одного конца трубку и считая, что длина трубки от закрытого до открытого конца равна $l$. Вы получите удивительный результат. Частота звука будет значительно выше измеренной. (Используя открытую бутылку из-под виски, автор предсказал частоту 110 *гц* и с помощью рояля нашел, что на самом деле это 130 *гц*.) Предположим, что воздух в большом объеме $V_0$ действует подобно пружине. Он подсоединен к массе, которой является воздух в горлышке бутылки. Эта масса равна $\rho_0 al$, где $l$ — длина горлышка, $a$ — его площадь поперечного сечения и $\rho_0$ — плотность воздуха. Предположение Гельмгольца заключается в предположении, что движение воздуха происходит только в горлышке и что возвращающая сила возникает вследствие изменения давления в объеме $V_0$.

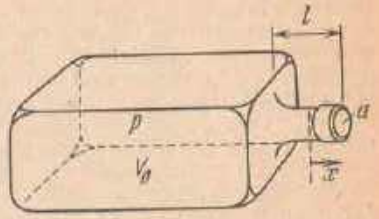


Рис. к задаче 4.15.

а) Покажите, что если смещение воздуха вдоль оси равно $x$, а возвращающая сила $F_x$ образуется благодаря разности давлений $p-p_0$ (где $p$ — давление при объеме $V_0$, а $p_0$ — равновесное давление), то

$$F_x = -\frac{\gamma p_0 a^2 x}{V_0},$$

где $\gamma$ — отношение удельных теплоемкостей $c_p/c_V$, которое для воздуха равно 1,4.

б) Покажите, что звуковые колебания будут иметь угловую частоту $\omega$, равную

$$\omega^2 = v^2 \frac{a}{V_0 l},$$

где $v$ — скорость звука. При использовании этой формулы длину горлышка $l$ нужно заменить эффективной длиной, равной длине $l$ плюс (с обоих концов) 0,6 радиуса горлышка. Если действительная длина горлышка равна нулю, то формула все равно будет давать правильный результат. (Длина $l$ в этом случае будет полностью определяться «концевым эффектом».)

Если очень сильно подуть у отверстия в бутылке, то можно возбудить и более высокие моды. Услышав их однажды, вы сможете различать их и при слабом дутье. Нужно сказать, что нет простого «одномерного» способа вычисления более высоких резонансных частот. Вы обнаружите, что две бутылки различной формы имеют различные отношения частот для своих первой и второй или третьей мод.

**4.16.** Опыт. *Скорость звука в воздухе, гелии и природном газе.* Возьмите обыкновенный свисток, подуйте в него и запомните тон звука. Теперь подсоедините свисток к резиновому баллону с гелием (который можно иметь в любой физической лаборатории) и воспроизведите свист, используя струю гелия. Каким теперь будет тон слышимого вами звука? Измерьте экспериментально отношение тонов звука

в случае гелия и воздуха. Наиболее легкий способ — это отождествление тонов и затем определение частот по таблице. (Воспользуйтесь справочником по физике или посмотрите домашний опыт 2.6.) Покажите, что теоретически ожидаемое отношение тонов равно примерно $^5/_3$. Экспериментальное значение близко к 2,5. Объясните, почему? Можете ли вы улучшить этот эксперимент? В каком соотношении находятся длины волн звука в свистке в случае гелия и воздуха? Вместо гелия или воздуха используйте нейтральный газ, подсоединив свисток с помощью шланга к газу. Чему равно отношение тонов? Что можно узнать о молекулярных свойствах газа, измеряя отношения тонов для газа и для воздуха?

**4.17.** Найдите среднеквадратичное значение электрического поля (усредненного по всем частотам) на расстоянии 1 *м* от 40-ваттной лампы.

**4.18.** Опыт. *Измерение солнечной постоянной на поверхности Земли.* Этот опыт описан в п.4.4. на стр. 194. Сделайте его и дайте ответ в *вт/см*$^2$. Чтобы уменьшить инфракрасное излучение (т. е. тепло), поступающее от лампы к векам, поместите между лампой и глазами одну или несколько стеклянных пластин, которые будут выполнять роль «атмосферы», в значительной степени поглощающей инфракрасное излучение Солнца. Таким образом, ограничив себя видимым светом (обнаруживаемым закрытыми глазами), вы сможете определить солнечную постоянную вне земной атмосферы. Температура вольфрамовой нити меньше температуры Солнца, а спектр длин волн зависит от цвета. Постройте график зависимости испущенной энергии от длины волны для Солнца с температурой на поверхности около 5000 °К и для вольфрамовой нити с температурой около 3000 °К и оцените часть полного потока, регистрируемую глазами в обоих случаях. Переоценили вы или недооценили полный поток от Солнца (включая невидимую часть спектра), сравнивая его с потоком от лампы в видимом диапазоне частот?

**4.19.** *Скорость счета фотоумножителя.* Предположим, что мы имеем фотоумножитель со следующими параметрами: площадь фотокатода=1 *см*$^2$, эффективность фотокатода (усредненная по видимому спектру)=5%. Предположим далее, что у нас есть свеча, которая испускает видимый свет мощностью в 1 *св*. Как далеко должна находиться свеча от фотоумножителя, чтобы его скорость счета была равна 10 отсчетам в секунду? (Очевидно, скорость счета определяется частотой попадания фотонов на фотокатод. Мы хотим, чтобы она была такой низкой, чтобы можно было сосчитать отдельные попадания.) Каким должно быть отверстие в непрозрачном экране, установленном между фотоумножителем и свечой, находящейся на расстоянии 1 *м*, чтобы скорость счета была такой же? [Е д и н и ц ы. Фотон с энергией 1 *эв* имеет длину волны порядка 12 345 Å (последние две цифры не совсем верны, однако все число дает очень удобное мнемоническое правило). Если энергия фотона равна 2 *эв*, то $\lambda$=6170 Å. Считайте, что все фотоны соответствуют зеленому свету, т. е. 5500 Å. Запомните также, что 1 *эв*=1,6·10$^{-12}$ *эрг*.]

**4.20.** *Зеркало на спутнике.* Предположим, что фермеры штата Канзас, живущие внутри круга диаметром 330 *км*, хотят распахивать свои поля ночью при освещенности, эквивалентной освещенности от полной Луны, в течение всего месяца. Министерство сельского хозяйства решает установить для этого на спутнике Земли зеркало. Оцените его размер. Скажем заранее, что если бы фермеры хотели работать при освещенности, равной освещенности от полного Солнца, то площадь самого маленького зеркала, которое смогло бы их удовлетворить, равнялась бы примерно площади штата. При современной технологии создание такого спутника невозможно.

О т в е т. Диаметр зеркала должен быть в 8·10$^2$ раз меньше диаметра освещаемого им района. Поэтому диаметр зеркала равен 330 *км*/800=410 *м*. Это почти возможно!

**4.21.** *Лунный свет.* В соответствии с табл. 4.3 п.4.4 40-ваттная лампа с эффективным диаметром 2 *см* обеспечивает на расстоянии 6,4 *м* ту *же освещенность*, что и Луна. Используйте эти данные вычисления освещенности, создаваемой светом от полной Луны, в единицах *мквт/см*$^2$ освещенной поверхности.

О т в е т. Значение освещенности лежит между 0,1 и 0,2 *мквт/см*$^2$.

**4.22.** *Солнечный свет.* Солнце, рассматриваемое с Земли, стягивает примерно тот же телесный угол, что и Луна. (Если вы собираетесь проверить это с помощью линейки, расположенной на расстоянии вытянутой руки от глаза, то не забудьте воспользоваться соответствующим фильтром или системой из двух почти скрещенных поляроидов.) Используйте табл. 4.3 п.4.4 и результаты задачи 4.21 для определения освещенности, создаваемой Солнцем.



О т в е т. Около 90 *мвт/см*$^2$ для видимого света.

**4.23.** *Световая эффективность Солнца.* Предположим, что весь видимый свет от Солнца проникает через земную атмосферу с пренебрежимо малыми потерями. Используйте результаты задачи 4.22, а также значение солнечной постоянной вне атмосферы Земли, взятое из справочника, для подсчета световой эффективности Солнца. Сравните полученный результат со значением световой эффективности лампы. (По справочнику, 5000-ваттная лампа на 127 *в* имеет эффективность, равную 4,7%.)

**4.24.** Опыт. *Измерение мощности и световой эффективности электрической лампы.* Для этого опыта нам понадобится лампа накаливания (либо с прозрачным, либо с матовым баллоном), свеча, две восковые пластинки («домашний воск», используемый для запечатывания домашних консервов, желе и джемов) и кусок алюминиевой фольги. Эталоном будет служить свеча. Мы предполагаем, что эта свеча близка к стандартной свече, т. е. испускает свет мощностью около 20 *мвт* в видимой области спектра. Параметры лампы неизвестны. Однако полная мощность лампы известна и указана на баллоне. Выходную мощность лампы в видимом диапазоне можно измерить сравнением со свечой. Положите алюминиевую фольгу между двумя пластинками парафина. Поднесите этот «бутерброд» из алюминия и парафина к свече. Запомните яркость пластинки, обращенной к свече, и темноту второй пластинки, следующей за фольгой. Теперь поднесите этот «бутерброд» к лампе. Далее (вечером, когда зажжена только свеча и горит лампа) расположите парафиновый детектор между лампой и свечой так, чтобы каждая пластинка освещалась одним источником. Найдите положения источников, при которых две пластинки будут освещены одинаково. Измерьте эти расстояния. Теперь дело за арифметикой (используйте закон обратных квадратов). Ответ для мощности лампы дайте в свечах и ваттах (предполагая, что свеча — это эталон). Определите эффективность лампы.

С несколько более сложным оборудованием вы могли бы определить освещенность от Солнца в видимом диапазоне в единицах *вт/см*$^2$ или (считая, что 1 *св/см*$^2$= =20 *мвт/см*$^2$) в *св/см*$^2$. У вас могут быть осложнения, связанные с наличием фонового освещения. В этом случае используйте более сильную лампу, мощностью порядка 200 *вт*. Возможно, вам понадобится коллиматор в виде трубы, или кусок картона с соответствующими отверстиями, или темная ткань. Откалибруйте лампу в свечах так, как это было указано выше. Найдите расстояние лампы до парафина, при котором получается та же освещенность, что и от Солнца. Зная геометрию системы, вы можете вычислить поток от лампы в единицах *св/см*$^2$ и таким образом определить освещенность от Солнца в единицах *св/см*$^2$.

**4.25.** Опыт. *Электрические лампы с матовым баллоном.* Возьмите две одинаковые лампы с матовым и молочным баллоном. Включите их. Обратите внимание на яркую сердцевину матовой лампы. Свет же от молочной лампы более однороден. Поэтому лампа с матовым баллоном имеет меньшую эффективную поверхность, чем лампа с молочным баллоном. Поскольку мощность ламп одинакова, то они, по-видимому, имеют одинаковый световой выход. В связи с этим поверхность внутренней сердцевины матовой лампы должна быть ярче. Посмотрите на центральную область каждой зажженной лампы через круглое отверстие, образованное вашими пальцами. Руку держите на одном и том же расстоянии от глаз, так чтобы телесный угол был одним и тем же. Какой баллон ярче (в центре)? Измерьте диаметр площади внутренней сердцевины матовой лампы с помощью линейки. (Возможно, для этого вам понадобится уменьшить яркость лампы. В этом случае смотрите на лампу через частично скрещенные поляроиды.) Предскажите и вычислите отношение поверхностной яркости для двух баллонов, взяв за основу «эффективную сферу» с диаметром, равным диаметру яркой сердцевины матовой лампы. Теперь измерьте отношение поверхностных яркостей следующим образом. Поместите каждую лампу за картонным экраном с отверстием, открывающим только центральную часть каждой из ламп. Сделайте два отверстия одинакового размера. Расположите лампы так, чтобы они находились на расстоянии нескольких футов друг от друга и освещали друг друга через отверстия. Для измерения отношения поверхностных яркостей центральных областей ламп используйте технику «пара-

финового бутерброда», описанного в опыте 4.24. Как ваш результат согласуется с вычислениями, основанными на модели «эффективной сферы»? Наконец, разбейте лампы и посмотрите, в чем отличие покрытия баллонов (заверните лампу в полотенце, прежде чем ее разбить), или поверьте нам, что внутренняя поверхность матовой лампы слегка шероховата, что достигается травлением кислотой или с помощью струи песка. Баллон же молочной лампы покрыт белой пудрой, которая представляет собой окись магния. При прикосновении пальцем пудра осыпается, обнажая чистую поверхность баллона. Если вы разбили лампу, то советуем вам сохранить большие сферические осколки. Частично наполнив их жидкостью, можно иметь очень хорошие плоско-выпуклые линзы. (Чтобы получить большие осколки, сломайте лампу около цейки.) С такими линзами можно измерить показатель преломления воды или минерального масла.

**4.26.** Опыт. *Звуковой импеданс.* Пойте постоянную ноту в картонную трубку, держа ее плотно прижатой ко рту, чтобы по краям трубки не было утечки воздуха. Изменяя частоту ноты, найдите резонансы. (Эти резонансные частоты не будут равны резонансным частотам свободных колебаний воздуха в трубке.) Спойте ноту, соответствующую резонансу. Неожиданно уберите трубку, продолжая при этом петь ту же ноту. Вы заметите изменение импеданса. Теперь пойте в резонанс. Обратите внимание на заметное изменение ощущений в горле. Нагрузка при резонансе не является чисто активной, у нее имеется значительная реактивная составляющая. Теперь найдите большой кувшин или вазу из стекла или пластика. Определите с помощью пения сильный резонанс у соответствующего сосуда. При резонансе пойте как можно громче, расположив резонирующую систему поближе ко рту. Если бы не было потерь на излучение или других активных потерь, то нагрузка на ваш поющий «аппарат» была бы чисто реактивной, т. е. количества энергии, испущенной и вернувшейся обратно к горлу за один цикл колебаний, были бы равны. Таким образом, в этом случае ваши «горловые» ощущения будут отличаться от ощущений, возникающих при пении в открытую среду. Вы обнаружите, что довольно трудно контролировать тон ноты. Он будет колебаться, потому что вы привыкли к активной нагрузке, а на самом деле «нагружены» на реактивную нагрузку.

**4.27.** Предположим, что мы имеем в упругой струне две бегущие волны

$$\psi_1 = A\cos(\omega t - kz + \pi),$$
$$\psi_2 = A\cos(\omega t - kz + \pi/4)$$

с параметрами $T_0 = 1$ *дин*, $\rho = 1$ *г/см* и $\omega = 10^3$ *рад/сек*. Найдите среднюю во времени интенсивность суперпозиции $\psi_1$ и $\psi_2$.

**4.28.** Три плоские электромагнитные волны

$$E_{1x} = E_0\cos(kz - \omega t - \delta_1) = B_{1y},$$
$$E_{2x} = E_0\cos(kz - \omega t - \delta_2) = B_{2y},$$
$$E_{3x} = E_0\cos(kz - \omega t - \delta_3) = B_{3y}$$

распространяются в одном и том же пространстве. Чему равны максимальная и минимальная амплитуды и поток энергии, которые можно получить, изменяя в суперпозиции значения постоянных $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$?

**4.29.** «*Звуковое давление*» *для продольных волн в пружине.* Дайте вывод уравнения (111), п. 4.4:

$$F_z(L, R) = F_0 - Ka\frac{\partial\psi(z, t)}{\partial z}.$$

Начните со струны с сосредоточенными грузами. В результате сжатия каждой пружины в равновесном состоянии появляется сила $F_0$ ($K$ — постоянная пружины, $a$ — расстояние между грузами). Найдите силу, действующую на груз в направлении $+z$ со стороны пружины слева от груза. Перейдите к непрерывному пределу и получите искомое уравнение. Заметьте, что в непрерывном пределе произведение $Ka$ является свойством непрерывной пружины и не зависит от длины $a$.

**4.30.** *Резиновые веревки и пружины.* Длина обычной резиновой веревки (каната или пружины, которая закрывает двери) в нерастянутом состоянии не является бесконечно малой по сравнению с длиной в растянутом состоянии. Этим объ-



…, что фазовая скорость поперечных волн меньше, чем продольных. Докажите.

…кажите, например, что если длина при растяжении составляет 4/3 начальной …ины, то скорость распространения продольных волн в два раза больше скорости …поперечных. Длина нерастянутой «пружины» равна 7 *см*, причем растянуть …жно примерно на 5 *м*. Чему равно отношение скоростей в этом случае?

**4.31.** *Диспергируют ли звуковые волны?* В п. 4.2 мы нашли, что фазовая скорость …постоянна и не зависит от частоты. Дисперсионное соотношение, которое …вело нас к этому выводу, имеет вид

$$\omega^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}k^2,$$

…ложе на дисперсионное соотношение для продольных колебаний непрерывной …пружины:

$$\omega^2 = \frac{K}{M}k^2.$$

…персионное соотношение для струны с сосредоточенными параметрами имеет …

$$\omega^2 = \frac{K}{M}\frac{\sin^2(1/2\,ka)}{(1/2\,a)^2},$$

…приводит к появлению верхней граничной частоты. По аналогии и по некоторым …физическим соображениям можно предположить наличие верхней граничной …частоты для звука при нормальных условиях. Можно ли ожидать, что ультразвуковые волны частоты порядка $\nu \approx 100$ *Мгц* будут распространяться с обычной …звуковой скоростью?

О т в е т. Появление граничной частоты можно ожидать при $\nu_0 \approx 10^{10}$ *гц*.

ГЛАВА 5

# ОТРАЖЕНИЕ

## 5.1. Введение

В этой главе мы воспользуемся представлением об импедансе, чтобы понять поведение бегущей волны на границе двух сред. Мы начнем с того, что в п. 5.2 рассмотрим сосредоточенную активную нагрузку и условия, при которых эта нагрузка может быть «согласована» со средой, в которой распространяется волна. Это приведет нас к понятию «эквивалента» *), при помощи которого можно ограничивать электромагнитные волны без отражения. В п. 5.3 мы рассмотрим отражения, возникающие вследствие «несогласованности» импедансов. Обобщая результаты, полученные для передающей линии, мы увидим, как происходит отражение света на границе двух сред, где показатель преломления испытывает разрыв непрерывности. Изучение многократного отражения в п. 5.5 позволит нам использовать обыкновенное стекло для определения среднего времени жизни возбужденных атомов неона.

## 5.2. Согласованная нагрузка

Передатчик, присоединенный к полностью открытой среде и воздействующий на нее в дисперсионном диапазоне частот, испускает бегущие волны. На выходные зажимы передатчика со стороны среды будет действовать чисто активная сила сопротивления, пропорциональная характеристическому импедансу. Характеристический импеданс зависит от среды, а также от геометрии волн.

Следует заметить, что передатчик «не может отличить», испускает ли он бегущие волны в открытую среду или же он работает (нагружен) на активную нагрузку, являющуюся эквивалентом среды (эквивалентом в смысле силы сопротивления со стороны среды). Если вы отсоединили антенну радиопередатчика и заменили ее эквивалентным активным сопротивлением, то передатчик (осциллятор, генератор) «не почувствует» этой замены. (Чтобы быть совсем точными и «обмануть» передатчик, нужно антенну заменить *LRC*-цепочкой, поскольку помимо чисто активного сопротивления она обладает емкостью и индуктивностью. Сопротивление $R$ в этой цепочке определяет сопротивление излучения, т. е. реакцию среды, и это именно тот характеристический импеданс, о котором мы говорим.) Начнем, однако, с примеров более простых, чем радиоантенна.

*) См. сноску на стр. 214.



Пример 1. *Непрерывная струна.* Если бесконечную непрерывную струну с передатчиком, действующим в начале, заменить струной конечной длины, но подсоединенной к соответствующему амортизатору, то на передатчик со стороны струны (среды) будет действовать та же сила сопротивления, что и в первом случае. Под амортизатором («поршнем») подразумевается устройство (мы обозначим его $R$), обладающее следующим свойством.

Если на поршень со стороны выходного зажима $L$ передатчика действует сила, вызывающая перемещение поршня со скоростью $u(t)$, то его реакция будет противоположна по направлению действующей силе и пропорциональна скорости, т. е.*)

$$F(R, L) = -Z_R u(t), \tag{1}$$

где $Z_R$ — положительная константа, называемая *импедансом* поршня. Реакция амортизатора чисто активная, поскольку сила в выражении (1) пропорциональна скорости. (Если бы амортизатор содержал в себе инерционную массу или пружину, то его реакция была бы пропорциональна ускорению или смещению. В этих случаях «амортизатор» представлял бы собой реактивную нагрузку.) Далее, если передатчик испускает бегущие волны в открытую систему с характеристическим импедансом $Z$, то со стороны среды $R$ на выходные зажимы $L$ передатчика действует сила сопротивления

$$F(R, L) = -Z\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{z=0}, \tag{2}$$

где $\partial\psi/\partial t$ — скорость струны в точке $z=0$, равная скорости «выходного зажима» передатчика. Таким образом, если $Z_R$ равно $Z$ и передатчик нагружен прямо на поршень, то на передатчик действует такая же «чисто активная» сила сопротивления, как и в случае, когда он подсоединен к бесконечной струне. Одним из свойств бегущей волны является то, что любая точка среды, в которой волна распространяется, испытывает в более позднее время те же воздействия, которые происходили ранее в точке $z=0$, т. е. на выходе передатчика. Таким образом, точка $L$ слева от точки $z$ в системе, в которой распространяются бегущие волны, «не знает», имеется ли за точкой $R$ справа от $z$ продолжение струны до бесконечности или же точка $R$ является входным зажимом устройства (амортизатора в нашем случае) с импедансом $Z_R=Z$.

*Согласование импедансов.* Из сказанного выше следует, что в случае непрерывной струны для получения согласованного с нагрузкой

*) $R$ и $L$ — сокращения слов «правый» и «левый». (*Прим. ред.*)

соединения (т. е. соединения, при котором не возникает отраженных от нагрузки поперечных бегущих волн) необходимо в качестве нагрузки иметь идеальный амортизатор с импедансом

$$Z_R = Z = \sqrt{T_0 \rho_0}. \qquad (3)$$

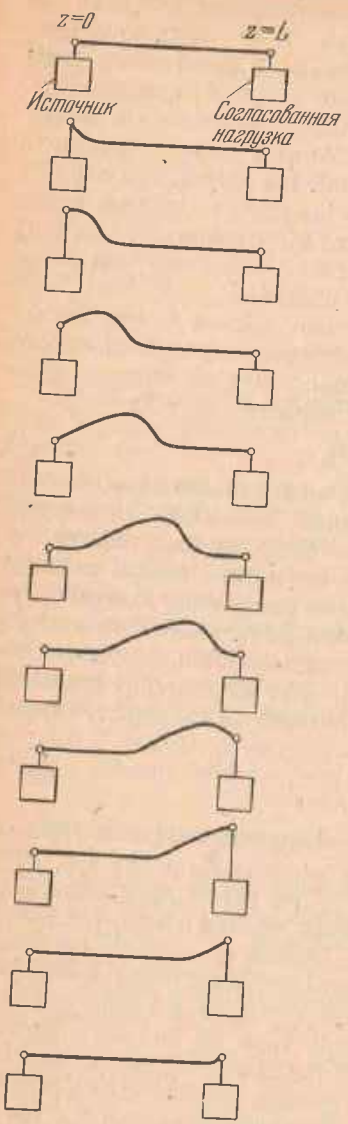


Рис. 5.1.

Если условие (3) выполнено, мы говорим, что импеданс нагрузки согласован с характеристическим импедансом струны. Если струна оканчивается согласованной нагрузкой, то мы не можем судить о длине струны по поведению передатчика. Он будет вести себя одинаково, будучи подключенным к бесконечно длинной струне или к входным зажимам согласованной нагрузки. На рис. 5.1 он подключен к струне конечной длины, присоединенной к согласованной нагрузке.

*Распределенная нагрузка.* Амортизатор представляет собой сосредоточенную активную нагрузку, так как его размеры малы по сравнению с длиной волны. Чтобы достичь согласования с помощью амортизатора, нужна тщательная конструкторская работа. Другим способом согласования является распределенная нагрузка, обеспечивающая появление небольшой силы сопротивления, начиная с точки $z=L$, в которой вы хотите начать «поглощать» энергию волны. В этом случае сила сопротивления будет распределена непрерывно вдоль струны для всех $z$, больших $z=L$. Если на расстоянии одной длины волны силой сопротивления поглощается небольшая часть энергии волны, то можно считать, что значительного отражения не возникнет и произойдет постепенное поглощение энергии волны.

Пример 2. *Линия из параллельных пластин.* Этот пример приведет нас к очень общим выводам. Входной конец линии показан на рис. 5.2. Там же показана пластина из материала, обладающего активным сопротивлением, которая может либо служить прямой



нагрузкой передатчика (генератора), заменяя линию, либо ограничивать линию в пространстве, не создавая отраженной волны *). Для указанного стрелками направления тока сопротивление пластины равно произведению удельного сопротивления $\rho$ на длину

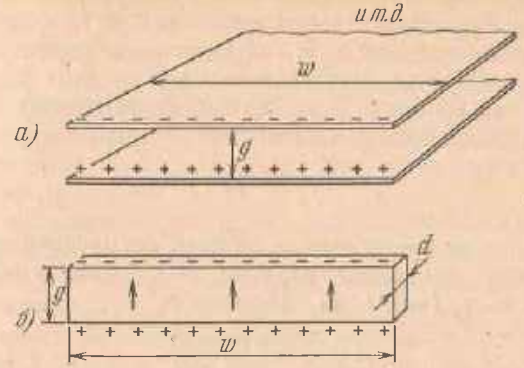


Рис. 5.2. Нагрузка для передающей линии из параллельных пластин.
*а)* Передающая линия; *б)* пластина-сопротивление. Когда разность потенциалов на пластине соответствует указанным на рисунке знакам, ток течет в направлении стрелок.

$L$, деленному на площадь поперечного сечения $wd$ (см. том II, п. 4.7):

$$R = \rho \cdot \frac{(\text{длина})}{(\text{площадь})} = \frac{\rho g}{wd}. \qquad (4)$$

Характеристический импеданс $Z$ для линии из параллельных пластин равен [см. уравнение (4.132), п. 4.4]

$$Z = \frac{4\pi}{c}\frac{g}{w}, \qquad (5)$$

Если пластина является согласованной нагрузкой, то $R=Z$ и, приравнивая (4) и (5), имеем

$$\frac{\rho}{d} = \frac{4\pi}{c}, \qquad (6)$$

где $\rho$ выражено в электростатических единицах и $d$ — в *см*. Отношение $\rho/d$, таким образом, имеет размерность сопротивления в ед. СГСЭ.

Вырежем из пластины толщиной $d$ прямоугольный параллелепипед с основанием в виде квадрата со стороной $L$. Приложим напряжение $V$ к противоположным сторонам параллелепипеда. Это напряжение вызовет ток, текущий параллельно квадратной поверхности параллелепипеда. Его сопротивление равно произведению удельного сопротивления $\rho$ на длину $L$, деленному на площадь $Ld$, перпендикулярную направлению тока:

$$R = \frac{\rho L}{Ld} = \frac{\rho}{d}. \qquad (7)$$

*) См. примечание на стр. 214.

Заметим, что сопротивление нашего параллелепипеда не зависит от размера квадрата. Следовательно, отношение $\rho/d$ является сопротивлением параллелепипеда с квадратным сечением любого размера для тока, текущего от одной стороны параллелепипеда к другой. Таким образом, из выражения (6) следует, что *у проводящей пластины, представляющей собой согласованную нагрузку для линии из плоскопараллельных пластин, сопротивление вырезанного указанным выше способом параллелепипеда, $\rho/d$ равно* $4\pi/c$, т. е. $4\pi$, умноженному на 30 *ом* ($c^{-1}$ ед. СГСЭ равно 30 *ом*).

Пластина, являющаяся согласованной нагрузкой, имеет

$$\frac{\rho}{d} = 120\pi = 377 \text{ ом}. \tag{8}$$

Посмотрим, как практически создать согласованную нагрузку для линии из параллельных пластин. Мы хотим, чтобы вещество нагрузки имело $\rho/d = 377$ *ом*. Поэтому

$$d\,(\text{см}) = \frac{\rho\,(\text{ом}\cdot\text{см})}{377\,(\text{ом})}. \tag{9}$$

Возьмем в качестве материала медь и вычислим толщину медной пластины. В справочнике по физике находим $\rho_{\text{меди}} \approx 1{,}7\cdot10^{-6}$ *ом/см*. В соответствии с выражением (9) нам нужна пластина толщиной $d_{\text{меди}} \approx 1{,}7\cdot10^{-6}/377 \approx 0{,}5\cdot10^{-8}$ *см*, а это меньше, чем диаметр одного атома меди! Мы оказались в затруднительном положении. Вернемся к справочнику и попробуем взять графитовую пластину. Удельное сопротивление графита порядка $3500\cdot10^{-6}$ *ом·см*. Для этого случая $d \approx 3500\cdot10^{-6}/377 \approx 10^{-5}$ *см*. Это вполне реальный размер, который можно выполнить следующим образом. Возьмем кусок плотного полотна (сопротивление полотна на единицу площади значительно больше, чем 377 *ом*) и нанесем на него при помощи распылителя угольный порошок, взвешенный в воде или какой-либо другой жидкости. Будем наносить слой за слоем, пока сопротивление, измеренное по омметру, не будет равно 377 *ом*. Очевидно, что измерять сопротивление следует после высыхания порошка и полотна.

На микроволновом жаргоне пластину вещества с отношением $\rho/d = 377$ *ом* называют «spacecloth» *). Таким образом, бегущие волны электромагнитного излучения в плоскости $L$ слева от $z$ «не знают», является ли плоскость $R$ справа от $z$ продолжением передающей линии из параллельных пластин к бесконечности или же эта плоскость соответствует слою «эквивалента».

*Волны в прямых и параллельных линиях.* В коаксиальной линии или в линии, составленной из параллельных проводов, бегущие волны не будут плоскими. Напомним, что, по определению, в плоской волне и электрическое и магнитное поля в данный момент времени $t$ не зависят от координат $x$ и $y$. Бегущие волны в коаксиальной линии или линии из параллельных проводов относятся к более общему классу волн, который включает в себя плоские волны как частный случай. *Волнами в прямых и параллельных линиях* (или просто прямыми и параллельными волнами) называются волны, для которых поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ зависят от координат $x$ и $y$, но для которых эта зависимость одинакова для всех $z$ ($z$ — направление распространения). Таким образом, волны в прямой и параллельной передающей линии (т. е. линии, составленной из пары одинаковых прямых и параллельных проводов) являются прямыми и параллельными волнами.

Слой «эквивалента» является согласованной нагрузкой для *любой* прямой и параллельной передающей линии. Действительно, в любой достаточно малой окрестности точки $(\Delta x, \Delta y)$, лежащей в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, приходящая прямая и параллельная волна неотличима от плоской волны, т. е. поля $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ и $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ в этой окрестности могут считаться постоянными, не зависящими от $x$ и $y$. Более того, используя уравнения Максвелла, можно показать, что для заданных $x$ и $y$ прямые и параллельные волны удовлетворяют соотношениям, аналогичным тем, которые были приведены в п. 4.4 для плоских волн в прозрачной среде. Таким образом, для фиксированных $x$ и $y$ в прямых и параллельных бегущих волнах векторы $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ и $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к $\mathbf{z}$, величины их равны и знаки такие, что вектор $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ направлен вдоль $\hat{\mathbf{z}}$, т. е. $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}$. Кроме того, «локальный поток энергии» [в окрестности $(\Delta x, \Delta y)$] определяется тем же выражением, что и для плоских волн. Таким образом, для прямых и параллельных проводов в вакууме имеем

$$S(x, y, z, t) = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}^2(x, y, z, t), \tag{10}$$

где $S$ — интенсивность в *эрг/(см²·сек)*. Очевидно, что слой «эквивалента» будет являться согласованной нагрузкой для линии, если тепловые потери в этом слое, определяемые как $I^2R$ (где $I$ — ток через слой, а $R$ — сопротивление), будут уравновешивать падающий поток энергии. Таким образом, слой «эквивалента» в окрестности точки $(\Delta x, \Delta y)$ будет поглощать падающее «прямое и параллельное» излучение без отражения, если отношение $\rho/d$ для «эквивалента» равно 377 *ом*.

*Ограничение плоской волны в свободном пространстве.* Рассуждения, приведенные выше, могут заставить предположить, что слой «эквивалента» будет согласованной нагрузкой не только для плоских волн в передающей линии из параллельных пластин, но также и для плоских волн в свободном пространстве. Однако это неверно. Оказывается, что плоская волна в свободном пространстве, падающая

*) Слой такого проводящего материала имитирует бесконечность волновода или передающей линии. Автор обозначает это понятие жаргонным словом «spacecloth». В дальнейшем вместо «spacecloth» мы будем писать «эквивалент», а вместо «sheet of spacecloth» — слой «эквивалента». (*Прим. ред.*)

на слой «эквивалента», испытывает импеданс в два раза меньший, чем импеданс «эквивалента».

Посмотрим, почему это происходит. Если в передающей линии из плоскопараллельных пластин, простирающейся от $-\infty$ до $+\infty$, мы хотим ограничить бегущую слева волну слоем «эквивалента» в точке $z=0$, то в плоскости $z=0$ нужно установить «эквивалент» и одновременно отсоединить часть линии, простирающуюся от 0 до $+\infty$. Если мы не отсоединим эту часть линии, то напряжение в $z=0$ будет приложено к параллельному соединению двух равных сопротивлений — «эквивалента» и линии. Таким образом, линия оказывается подключенной к нагрузке с сопротивлением, равным половине сопротивления «эквивалента». Аналогичная картина имеет место в свободном пространстве при падении плоской волны на «эквивалент». Напряжение, приложенное к слою «эквивалента», оказывается также приложенным к бесконечному продолжению свободного пространства справа от слоя. Результирующий импеданс будет равен половине импеданса «эквивалента» или, что то же самое, половине импеданса свободного пространства. Поэтому пришедшая волна частично поглотится, частично отразится и частично пройдет.

Каким образом можно «отсоединить» свободное пространство справа от «эквивалента»? В случае передающей линии это легко сделать, просто отсоединив линию справа от «эквивалента». В результате пришедшая волна будет приложена к параллельному соединению сопротивлений (импедансов) «эквивалента» и бесконечного сопротивления. Очевидно, что результирующий импеданс равен импедансу «эквивалента».

В случае свободного пространства мы не можем «отсоединить» его часть, чтобы образовать бесконечный импеданс. Однако существует остроумный способ, с помощью которого можно «отсоединить» пространство справа от $z=0$ для гармонического колебания с определенной длиной волны. Этот способ применим как для свободного пространства, так и для передающей линии. Рассмотрим передающую линию. Способ заключается в том, что мы не обрезаем линию в точке $z=0$, а закорачиваем ее в $z={}^1/_4\lambda$ с помощью проводника. В точке $z={}^1/_4\lambda$ напряжение всегда равно нулю. Слева от $z={}^1/_4\lambda$ напряжение и ток имеют форму стоячей волны («эквивалент» еще не установлен). Как известно, нули (узлы) в волнах напряжения и тока сдвинуты относительно друг друга на $\lambda/4$. Поэтому в $z=0$ ток равен нулю. Это эквивалентно бесконечному сопротивлению в $z=0$, т. е. обрыву линии в этой точке. Таким образом, замкнув линию в $z={}^1/_4\lambda$, мы как бы отсоединили ее в $z=0$.

То же происходит и в свободном пространстве. Слой «эквивалента» в точке $z=0$ будет согласованной нагрузкой для плоской волны, если в точке $z={}^1/_4\lambda$ поместить идеальный проводящий слой («зеркало»). Вся энергия волны рассеется в «эквиваленте».

Рассмотрим волны в струне. Пусть вход нашего «амортизатора», т. е. его поршень, присоединен к концу струны. Другая, неподвижная



часть «амортизатора», его выход (относительное смещение входной и выходной частей «амортизатора» и создает затухание трения), закреплена на жестком основании. Того же результата мы достигли бы, присоединив выход «амортизатора» не к жесткому основанию, а к другой струне с бесконечно большой плотностью массы, простирающейся от $z=0$ до $\infty$. Импеданс такой струны равен бесконечности, и ситуация аналогична той, которая возникает при обрезании передающей линии и включении ее на согласованную нагрузку. Если вместо этого выход амортизатора присоединить к струне с импедансом $Z_2$, простирающейся от $z=0$ до $\infty$, то в $z=0$ импеданс для падающей волны будет равен импедансу параллельного соединения импедансов амортизатора и струны $Z_2$. Точно так же, как в случае передающей линии или пустого пространства, мы можем достичь согласования нагрузки для волн в струне либо соединив выход амортизатора с жестким основанием, либо соединив выход со струной, протяженностью в четверть волны; конец струны должен быть закреплен на кольце, скользящем без трения по стержню. Такое устройство имеет нулевой импеданс у стержня и бесконечный импеданс у выхода амортизатора. Этим будет обеспечена неподвижность выхода.

*Другие методы согласования нагрузки.* Не всегда легко достичь согласования «передающей линии» и «нагрузки». Если условия работы допускают применение распределенной нагрузки, занимающей заметный объем, то поглощение без отражения можно получить и не имея согласованной нагрузки с сосредоточенными параметрами, какой является, например, «эквивалент». Так, если мы хотим поглотить без отражения интенсивный пучок света, мы можем направить его в щель, сделанную в большом светонепроницаемом картонном ящике. Выложим изнутри стенки ящика черным материалом (поглотитель) и поставим в нем несколько перегородок, чтобы воспрепятствовать выходу света. Щель в ящике даже в яркий день будет выглядеть чернее любого черного тела, например сажи. Такая черная поверхность и совершенный «эквивалент» неразличимы по своему действию: излучение, попавшее в щель, не выходит обратно. Щель действует, как простирающаяся до бесконечности прозрачная среда (воздух).

## 5.3. Отражение и прохождение

*Непрерывная струна.* Предположим, что мы имеем полубесконечную струну, простирающуюся от $z=-\infty$ до $z=0$, с характеристическим импедансом, равным $Z_1$. В точке $z=0$ струна подсоединена к нагрузке, представляющей собой амортизатор, с импедансом $Z_2$ ($Z_2 \neq Z_1$). В точке $z=-\infty$ находится передатчик, генерирующий бегущую волну в направлении $+z$. Уравнение этой волны имеет вид

$$\psi_{\text{пад}}(z,\ t) = A\cos(\omega t - kz). \qquad (11)$$

Подставив сюда $z=0$, получим волну в точке $z=0$:

$$\psi_{\text{пад}}(0,\ t) = A\cos\omega t. \tag{12}$$

*Отражение вследствие несогласованности импеданса нагрузки с импедансом линии.* Последнюю точку струны обозначим $L$ (именно эта точка струны подсоединена ко входу амортизатора), а вход поршня — через $R$. (Очевидно, что это условное обозначение, при котором одна и та же точка обозначена через $L$, если считается, что она принадлежит струне, или через $R$, если она принадлежит поршню.) Если бы импеданс амортизатора равнялся характеристическому импедансу струны $Z_1$, то мы имели бы случай линии, согласованной с нагрузкой, и отражения от конца линии не было бы. В этом случае граничная сила $F_{\text{гр}}$, действующая со стороны поршня ($R$) на струну ($L$), равна

$$F_{\text{гр}}(R, L) = -Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{пад}}(0,\ t)}{\partial t}. \tag{13}$$

В действительности входной импеданс амортизатора $Z_2$ может быть не равен импедансу линии $Z_1$. Поэтому силу, действующую со стороны поршня на струну, можно в общем случае представить так:

$$F(R, L) = F_{\text{гр}}(R, L) + F_{\text{изб}}(R, L), \tag{14}$$

где $F_{\text{изб}}$ — так называемая избыточная сила. Оказывается, что эта сила ответственна за возникновение бегущей волны $\psi_{\text{отр}}(z,\ t)$, распространяющейся в направлении $-z$. В связи с этим мы можем считать, что в точке $z=0$ действует передатчик, который испускает бегущую волну в направлении $-z$. Далее, поскольку мы имеем дело с бегущей волной, должно быть справедливо соотношение

$$Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{отр}}(0,\ t)}{\partial t} = F_{\text{изб}}(R, L). \tag{15}$$

Подставляя это уравнение в уравнение (14) для полной силы и учитывая уравнение (13), имеем

$$F(R,\ L) = -Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{пад}}(0,\ t)}{\partial t} + Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{отр}}(0,\ t)}{\partial t}. \tag{16}$$

С другой стороны, полная реакция амортизатора, т. е. $F(R, L)$, равна, по определению (см. пример 1 п. 5.2), произведению скорости точки $L$ на $-Z_2$. Скорость точки $L$ равна суперпозиции скоростей от падающей и отраженной волны, т. е.

$$\frac{\partial \psi(0,\ t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_{\text{пад}}(0,\ t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{\text{отр}}(0,\ t)}{\partial t}. \tag{17}$$

Таким образом, сила сопротивления движению поршня $F(R,\ L)$ равна

$$F(R,L) = -Z_2 \frac{\partial \psi(0,\ t)}{\partial t} = -Z_2 \frac{\partial \psi_{\text{пад}}(0,\ t)}{\partial t} - Z_2 \frac{\partial \psi_{\text{отр}}(0,\ t)}{\partial t}. \tag{18}$$



Приравнивая правые части уравнений (16) и (18), находим для $z=0$

$$-Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{пад}}}{\partial t} + Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{отр}}}{\partial t} = -Z_2 \frac{\partial \psi_{\text{пад}}}{\partial t} - Z_2 \frac{\partial \psi_{\text{отр}}}{\partial t},$$

т. е.

$$\frac{\partial \psi_{\text{отр}}(0,\ t)}{\partial t} = \left[\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right] \frac{\partial \psi_{\text{пад}}(0,\ t)}{\partial t}. \tag{19}$$

*Коэффициент отражения.* Проинтегрировав обе части уравнения (19) (считаем, что постоянные интегрирования равны нулю), получим

$$\psi_{\text{отр}}(0,\ t) = R_{12}\,\psi_{\text{пад}}(0,\ t) = R_{12}\,A\cos\omega t. \tag{20}$$

Величина $R_{12}$ называется *коэффициентом отражения* для смещения $\psi$:

$$\boxed{R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}}. \tag{21}$$

Поскольку отраженная волна синусоидальная, то смещение в любой точке $z<0$ определится заменой $z=0$ и $t$ на $z$ и $t+z/v_{\text{ф}}$, где $v_{\text{ф}}$ — величина фазовой скорости:

$$\psi_{\text{отр}}(z,\ t) = R_{12}\,A\cos\left[\omega\left(t + \frac{z}{v_{\text{ф}}}\right)\right] = R_{12}\,A\cos(\omega t + kz). \tag{22}$$

Полное смещение $\psi(z,\ t)$ равно суперпозиции

$$\psi(z,\ t) = \psi_{\text{пад}}(z,\ t) + \psi_{\text{отр}}(z,\ t),$$

т. е.

$$\psi(z,\ t) = A\cos(\omega t - kz) + R_{12}\,A\cos(\omega t + kz). \tag{23}$$

*Возвращающая сила и смещение отражаются с противоположными знаками.* В случае поперечных колебаний струны физический интерес может представлять не только смещение $\psi(z,\ t)$, но и поперечная скорость $\partial\psi(z,\ t)/\partial t$, а также поперечная составляющая натяжения $-T_0\,\partial\psi(z,\ t)/\partial z$, которая определяет возвращающую силу в струне. Из уравнений (19) и (20) следует, что волна скорости $\partial\psi(z,\ t)/\partial t$ имеет тот же коэффициент отражения, что и волна смещения $\psi(z,\ t)$. Однако «волна возвращающей силы» $-T_0\partial\psi(z,\ t)/\partial z$ имеет коэффициент отражения, равный по величине коэффициенту отражения для волны скорости $\partial\psi(z,\ t)/\partial t$, но *обратный по знаку*. Имеем

$$\psi_{\text{пад}} = A\cos(\omega t - kz),\quad \psi_{\text{отр}} = R_{12}\,A\cos(\omega t + kz), \tag{24}$$

$$\frac{\partial \psi_{\text{пад}}}{\partial t} = -\omega A\sin(\omega t - kz),\quad \frac{\partial \psi_{\text{отр}}}{\partial t} = R_{12}\,[-\omega A\sin(\omega t + kz)], \tag{25}$$

$$\frac{\partial \psi_{\text{пад}}}{\partial z} = kA\sin(\omega t - kz),\quad \frac{\partial \psi_{\text{отр}}}{\partial z} = -R_{12}\,[kA\sin(\omega t + kz)]. \tag{26}$$

Из уравнения (25) следует, что в точке $z=0$ скорость отраженной волны равна произведению $R_{12}$ на скорость проходящей волны, а из

уравнения (26) видно, что в точке $z=0$ возвращающая сила в отраженной волне равна произведению $-R_{12}$ на возвращающую силу в проходящей волне. Из уравнений (24), (25) и (26) следует, что для *коэффициента отражения* для $\psi$, $\partial\psi/\partial t$ и $\partial\psi/\partial z$ справедливы соотношения

$$R_{\psi}=R_{\partial\psi/\partial t}=R_{12}=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_1}, \tag{27}$$

$$R_{\partial\psi/\partial z}=-R_{12}. \tag{28}$$

Заметим, что $R_{12}$ лежит между $-1$ и $+1$.

*Отражение на границе двух дисперсивных сред.* Предположим, что струна простирается от $-\infty$ до 0 и имеет импеданс $Z_1$; в точке $z=0$ она подсоединена к струне с импедансом $Z_2$, которая простирается от 0 до $\infty$. Очевидно, что точка $L$ слева от $z=0$ «не знает», является ли точка $R$ справа от $z=0$ началом новой струны (линии) с импедансом $Z_2$ или же это «вход» амортизатора (т. е. его поршень) с импедансом $Z_2$. Поэтому коэффициенты отражения (27) и (28) будут также определять и отраженную волну в среде 1. (Среда 1 — это струна с импедансом $Z_1$, а среда 2 — струна с импедансом $Z_2$.) Заметим, что $R_{21}=-R_{12}$. Поэтому, если свойства сред взаимно изменятся, то коэффициент отражения изменит знак. Например, коэффициент отражения для волны смещения $R_{\psi}$ отрицателен, если волна падает со стороны легкой струны на тяжелую (натяжение струн считается одинаковым), и положителен при обратном направлении распространения.

*Проходящая волна на границе двух дисперсивных сред.* В точке $z=0$ происходит отражение волны, приходящей из среды 1. Поскольку импедансы $Z_1$ и $Z_2$ не равны, то наряду с отраженной обратно в среду 1 волной должна существовать волна, прошедшая в среду 2. В связи с этим точку $z=0$, которая совершает колебания под действием силы, обусловленной падающей и отраженной волнами в среде 1, можно считать источником, испускающим бегущие волны в среду 2 (в направлении $+z$). Нас будет интересовать волна смещения $\psi_2$, волна поперечной скорости $\partial\psi_2/\partial t$ и волна возвращающей силы $-T_2\partial\psi_2/\partial z$, которые прошли во вторую среду и распространяются в ней. Чтобы найти эти волны, рассмотрим *граничные условия*.

*Граничные условия и непрерывность.* Для рассматриваемого случая граничные условия таковы, что смещение слева от границы раздела равно смещению справа от границы. Иными словами, *смещение $\psi(z,\ t)$ непрерывно. Непрерывны* также *скорость $\partial\psi(z,\ t)/\partial t$ и возвращающая сила $-T_0\partial\psi(z,\ t)/\partial t$*. В то время как непрерывность скорости и смещения на границе очевидна, непрерывность возвращающей силы требует некоторых замечаний. (Например, можно думать, что непрерывным должен быть наклон струны $\partial\psi(z,\ t)/\partial z$, а не произведение наклона на натяжение. Однако если на границе изменено натяжение, т. е. натяжение второй струны отлично от натяжения первой, то на границе может образоваться «изгиб».



В этом случае наклон не будет непрерывен, а произведение наклона на натяжение будет непрерывной функцией.) Чтобы убедиться в непрерывности возвращающей силы, рассмотрим бесконечно малый элемент массы в точке $z=0$. На этот элемент массы слева и справа действуют поперечные силы $-T_1\partial\psi_1/\partial z$ и $+T_2\partial\psi_2/\partial z$ соответственно. Суперпозиция этих сил равна произведению массы бесконечно малого элемента на его ускорение. Но масса элемента равна нулю. Поэтому равна нулю и суперпозиция:

$$-T_1\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+T_2\frac{\partial\psi_2}{\partial z}=0 \quad \text{в} \quad z=0.$$

Это уравнение и выражает непрерывность $T_0\partial\psi/\partial z$. (Заметим, что через $T_0$ мы обозначаем равновесное натяжение струны в общем случае, а через $T_1$ и $T_2$ — равновесные натяжения струны в среде 1 и среде 2.)

*Коэффициент прохождения для амплитуды.* Пусть $\varphi(z,\ t)$ соответствует любой из трех волн: смещению, скорости или возвращающей силе. В среде 1 волновая функция $\varphi(z,\ t)$ выражается суперпозицией

$$\varphi_1(z,\ t)=\varphi_0\cos(\omega t-k_1z)+R\varphi_0\cos(\omega t+k_1z), \tag{29}$$

где в соответствии с (27) и (28) коэффициент отражения $R$ равен $R_{12}=(Z_1-Z_2)/(Z_1+Z_2)$, если $\varphi(z,\ t)$ соответствует волне смещения или скорости, $R=-R_{12}$, если $\varphi(z,\ t)$ соответствует волне возвращающей силы. Для среды 2 существует своя волновая функция $\varphi_2(z,\ t)$, которая описывает бегущую волну, распространяющуюся в направлении $+z$:

$$\varphi_2(z,\ t)=T\varphi_0\cos(\omega t-k_2z), \tag{30}$$

где $T$ — *коэффициент прохождения для амплитуды*. Из условия непрерывности $\varphi(z,\ t)$ на границе в $z=0$ следует:

$$\varphi_2(0,\ t)=\varphi_1(0,\ t),$$

т. е.

$$T\varphi_0\cos\omega t=\varphi_0(1+R)\cos\omega t,$$

$$\boxed{T=1+R,} \tag{31}$$

где $R$ равно $R_{12}$ для $\psi$ и $\partial\psi/\partial t$ и равно $-R_{12}$ для волны возвращающей силы $-T\partial\psi/\partial z$. (Заметим, что мы использовали $T$ для обозначения натяжения струны и коэффициента прохождения. В примерах, не связанных со струной, это не может вызывать недоразумения.)

Величина $R$ лежит между $-1$ и $+1$, поэтому $T$ заключено в интервале значений от нуля до $+2$. Таким образом, *коэффициент прохождения всегда положителен*. Рассмотрим несколько интересных предельных случаев.

Случай 1. *Полное согласование импедансов.* Если $Z_2=Z_1$, то отражения на границе не возникает и $R_{12}=0$. Коэффициент

прохождения равен единице. Заметим, что равенство $Z_2=Z_1$ вовсе не означает идентичности сред. Например, у второй струны плотность и натяжение могут быть не равны плотности и натяжению первой, но произведения этих величин для *обеих* сред (струн) могут быть равны. В этом случае будут равны и импедансы, так как $Z_1=\sqrt{T_1\rho_1}$ и $Z_2=\sqrt{T_2\rho_2}$. Однако фазовые скорости в этих средах $v_1=\sqrt{T_1/\rho_1}$ и $v_2=\sqrt{T_2/\rho_2}$ будут различны.

Случай 2. *Бесконечное сопротивление.* Если $Z_2/Z_1$ равно бесконечности, то $R_{12}=-1$. *Точка $z=0$ неподвижна.* Коэффициент отражения для смещения и скорости равен $-1$. Поэтому суперпозиция падающей и отраженной волн смещения и скорости в точке $z=0$ дает нулевые смещение и скорость. В данном случае положительный импульс в падающей волне становится отрицательным импульсом после отражения. Коэффициент отражения для волны поперечной силы равен $+1$. Таким образом, сила, действующая на струну в точке $z=0$, имеет то же направление, что и в случае полного согласования, но она в два раза больше, чем в этом случае. Избыточная сила идет на образование отраженной волны с амплитудой, равной по величине и противоположной по знаку амплитуде падающей волны.

Случай 3. *Случай нулевого сопротивления.* Если $Z_2/Z_1$ равно нулю, то конец струны в точке $z=0$ называется *свободным концом.* Наклон струны в этой точке всегда равен нулю. Коэффициент отражения для возвращающей силы равен $-1$. Поэтому приходящий положительный импульс волны возвращающей силы после отражения становится отрицательным. Коэффициент отражения для скорости и смещения равен $+1$. Поэтому в точке $z=0$ струна имеет в два раза большую скорость, чем в том случае, когда импедансы согласованы. Предельные случаи, соответствующие $Z_2/Z_1=\infty$ и $Z_2/Z_1=0$, иллюстрируются рис. 5.3 и 5.4.

*Форма синусоидальной волны в общем случае.* Если в среде 1 присутствуют падающая и отраженная волны, то мы можем написать

$$\psi(z,\ t)=A\cos(\omega t-kz)+RA\cos(\omega t+kz), \qquad (32)$$

где $R$ — коэффициент отражения, значения которого лежат между $-1$ и $+1$. При $R=0$ мы имеем случай полного согласования. При этом $\psi(z,\ t)$ — это «чистая» бегущая волна, т. е. волна, распространяющая только в направлении $+z$. Когда $R=-1$, $\psi(z,\ t)$ соответствует «чистой» стоячей волне, т. е. волне с постоянными узлами (нулями). Узел будет также и в точке $z=0$.

Когда $R=+1$, $\psi(z,\ t)$ также соответствует «чистой» стоячей волне с постоянным «антиузлом» (максимумом) в точке $z=0$, т. е. в этом случае первый постоянный узел будет расположен на расстоянии $^1/_4$ длины волны от $z=0$. В случае, когда $R$ не равно ни нулю, ни $\pm1$, $\psi(z,\ t)$ не будет ни «чистой» стоячей волной, ни «чистой» бегущей волной. Таким образом, в наиболее общем случае синусоидальная волна (данной частоты $\omega$) может быть представлена



либо как суперпозиция стоячих волн, либо как суперпозиция бегущих волн, либо как некоторая комбинация тех и других волн. Поэтому любую синусоидальную волну можно представить в виде

$$\psi(z,\ t)=A\cos(\omega t+\alpha)\sin kz+B\cos(\omega t+\beta)\cos kz. \qquad (33)$$

Это уравнение является суперпозицией *двух стоячих волн, узлы которых смещены на четверть длины волны* и которые имеют разные

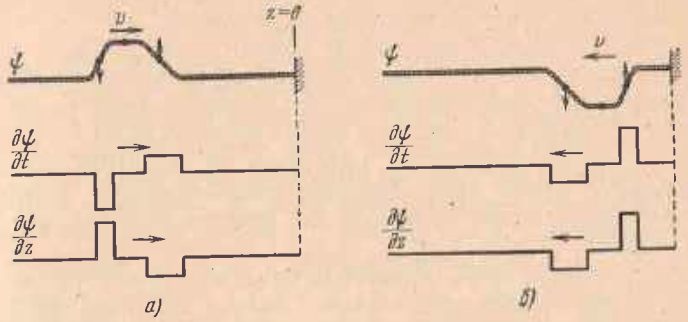



Рис. 5.3. Отражение приходящего импульса на закрепленном конце струны.
*а)* До отражения; *б)* после отражения. В точке $z=0$ струна присоединена к струне с бесконечной плотностью. Вертикальными стрелками показана скорость струны в данных точках. Точка между двумя стрелками соответствует нулевой скорости $\partial\psi/\partial t$.

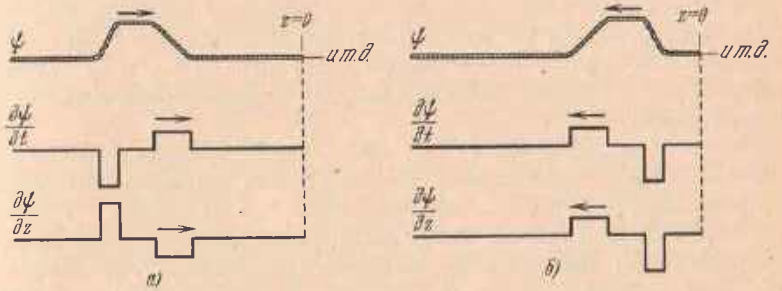



Рис. 5.4. Отражение импульса от свободного конца.
*а)* До отражения; *б)* после отражения. В точке $z=0$ струна присоединена к струне с пренебрежимо малой плотностью.

амплитуды и начальные фазы. Та же волна $\psi(z,\ t)$ может быть записана в таком виде:

$$\psi(z,\ t)=C\cos(\omega t-kz+\gamma)+D\cos(\omega t+kz+\delta). \qquad (34)$$

Эта запись представляет собой суперпозицию *двух бегущих в разных направлениях волн*, имеющих различные амплитуды и начальные фазы. Например, волна, определяемая уравнением (32), записана как суперпозиция бегущих волн, однако она может быть с таким же успехом представлена как суперпозиция стоячих волн. У вас будет возможность доказать это (задача 5.20). Рассмотрим несколько примеров на отражение волн.

Пример 3. *Отражение звуковых волн.* Уравнения движения звуковых волн подобны уравнениям, описывающим продольные волны в пружине. Последние в свою очередь подобны уравнениям для поперечных волн в струне. Поэтому, не повторяя выводов, мы можем воспользоваться результатами для коэффициентов отражения и прохождения, полученными для струны. Скорость воздуха отвечает величине $\partial\psi/\partial t$, а звуковое давление $-\gamma p_0 \partial\psi/\partial z$ аналогично возвращающей силе $-T_0 \partial\psi/\partial z$ для струны.

*Закрытый конец.* У закрытого конца трубы средняя скорость молекул воздуха вдоль $z$ (вдоль трубы) равна нулю. (Для каждой молекулы, движущейся направо вдоль оси $+z$ по направлению к стене, существует молекула, которая недавно отскочила от стены и движется в направлении $-z$.) Поэтому на закрытом конце волна скорости $\partial\psi/\partial t$ будет иметь коэффициент отражения, равный $-1$. Действительно, при этом суперпозиция падающей и отраженной волн скорости даст нуль.

Другой волной, представляющей физический интерес, является волна звукового давления (аналог волны возвращающей силы) $-\gamma p_0 \partial\psi/\partial z$. В соответствии с результатами, полученными для струны, коэффициент отражения для волны звукового давления должен быть равен по величине коэффициенту отражения для волны скорости и иметь обратный знак. Поэтому на закрытом конце коэффициент отражения для волны звукового давления равен $+1$ и давление на закрытом конце имеет тот же знак, что и при полном согласовании, однако величина его в два раза больше. С микроскопической точки зрения удвоение давления можно объяснить следующим образом.

Давление определяется как сила, действующая на единицу площади. Сила — это изменение количества движения за единицу времени. Будем считать, что молекулы сталкиваются со стенкой упруго. Тогда при столкновении количество движения молекулы изменит знак (мы имеем в виду направления вдоль оси $z$). Таким образом, на закрытом конце количество движения молекулы изменяется в два раза $[mv_z - (-mv_z) = 2mv_z]$ и соответственно давление возрастает тоже в два раза. Этот случай аналогичен упругому удару шарика с массой $m$ и скоростью $v_z$ в направлении $z$ о стенку массы $M$ ($M \gg m$). При соударении стена получает импульс, равный $2mv$.

*Открытый конец.* В этом случае у нас возникают технические трудности. Мы не хотим, чтобы воздух из трубы «ушел» в вакуум. Поэтому посмотрим, что будет происходить, если открытый конец трубы «подсоединить» к большой комнате, в которой давление воздуха $p_0$ равно давлению воздуха в трубе. На открытом конце воздух может свободно входить и выходить из трубы, и поэтому волна скорости здесь не будет обращаться в нуль. Области комнаты, достаточно удаленные от открытого конца трубы, имеют постоянное давление $p_0$, равное равновесному давлению в комнате. (Оказывается, что уже на расстояниях порядка радиуса трубы давление можно



считать существенно постоянным и равным $p_0$.) Когда область сжатия достигнет открытого конца трубы, то у воздуха появится возможность распространяться во все стороны, в то время как в звуковой волне в трубе движение происходило только вдоль $z$. Поэтому область сжатия быстро рассасывается с увеличением расстояния от конца трубы, пока на некотором расстоянии (порядка радиуса трубы) давление не станет равным $p_0$. Таким образом, если труба «подсоединена» к большой комнате, то на расстояниях от конца трубы порядка ее радиуса звуковое давление очень близко к нулю.

Назовем эффективной длиной открытого конца трубы область, отстоящую от реального конца на расстояние, на котором звуковое давление практически уменьшается до нуля. Так как здесь звуковое давление все время равно нулю, то его коэффициент отражения должен быть равен $-1$. Поэтому для скорости коэффициент отражения будет равен $+1$. В рассмотренной нами модели импеданс $Z_3$, созданный воздухом в комнате, равен нулю. (Нулевой импеданс обусловлен тем, что воздух свободно растекается во все стороны. Наша формула для импеданса $Z = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}$ здесь неприменима, так как она была получена для строго продольных колебаний.)

Рассмотрим «микроскопическую» картину на эффективном открытом конце трубы.

Пусть область сжатия достигла открытого конца. При распространении области сжатия в трубе происходит передача импульса в направлении распространения волны (направлении $+z$), обусловленная наличием импеданса. На открытом конце воздух вытекает из трубы, попадая в условия, при которых импеданс равен нулю ($Z_3$ для комнаты равен нулю, о чем было сказано выше), т. е. невозможна передача импульса. В этом случае вытекающий поток создаст разрежение на открытом конце. Воздух на ближайшей к трубе части области разрежения испытывает меньшее сопротивление, чем «обычно», и стремится заполнить эту область, которая, таким образом, смещается влево (мы считаем, что звук по трубе распространяется вправо). Воздух, примыкающий к сместившейся области разрежения, снова стремится вправо и т. д. Мы видим, что *сжатие*, перемещавшееся в направлении $+z$, вызвало *разрежение*, перемещающееся в направлении $-z$. Волна скорости, имевшая вид импульса, бежавшего вдоль оси $+z$, вызовет волну скорости *того же* знака в обратном направлении $-z$ (чтобы заполнить разрежение, молекулы всегда смещаются в направлении $+z$). Мы видим, что на открытом конце трубы коэффициент отражения для волны скорости положителен, а для волны давления отрицателен.

*Эффективная длина открытого конца трубы.* Эффективное расстояние за открытым концом трубы, на котором звуковое давление уменьшается до нуля, можно экспериментально определить следующим образом. Рассмотрим трубу, открытую с обоих концов. Мода свободных колебаний воздуха в трубе, для которой эффективная длина трубы равняется половине длины волны, будет первой модой (гармоникой). (Если труба открыта с обоих концов, то на

концах для стоячей волны скорости мы будем иметь пучности, а в середине трубы узел. Для стоячей волны давления узлы и пучности поменяются местами.) Чтобы найти эффективную длину трубы, возбудим в ней колебания, слегка ударив по ней чем-либо. (Легче всего возбуждается самая низкая гармоника, и именно ее вы и услышите.) Определите каким-нибудь образом частоту слышимого вами тона. Затем вычислите половину длины волны. Эта длина будет несколько больше, чем длина трубы, и ее можно принять за эффективную длину. Более легкий способ состоит в использовании стандартной возмущающей силы, т. е. камертона. Изменяя длину трубы (либо отрезая по кусочку, если труба длинная, либо перемещая пробку по трубе), добиваются резонанса, т. е. максимальной громкости звучания. Частота гармоники (тона) при максимальной громкости соответствует частоте возбуждающей силы, т. е. частоте камертона. На частотах, отличных от резонанса, собственная частота колебаний не равна частоте возмущающей силы. (Какую частоту вы слышите, когда труба и камертон не настроены в резонанс? Собственную частоту колебаний трубы или частоту камертона? Посмотрите домашние опыты.)

Пример 4. *Отражения в передающих линиях.* Напряжение передатчика $V(t)$ на левом конце $L$ ($z=0$) бесконечной передающей линии с импедансом $Z_1$ образует бегущую волну тока $I(z,\ t)$. В точке $z=0$ имеем

$$V_0 \cos \omega t = V(t) = Z_1 I(0,\ t). \tag{35}$$

Бегущие волны тока и напряжения в любой точке $z$ равны

$$V(z,\ t) = V_0 \cos(\omega t - k_1 z), \quad I = I_0 \cos(\omega t - k_1 z), \quad V_0 = Z_1 I_0. \tag{36}$$

На границе, где происходит резкое изменение характеристического импеданса с $Z_1$ на $Z_2$, образуются отраженная и проходящая волны. Нет необходимости повторять для этого случая все, что было нами проделано для струны. Коэффициенты отражения и прохождения в этом случае имеют вид, аналогичный соответствующим коэффициентам для волн в струне и звуковых волн. Перед тем как выписать эти формулы, рассмотрим два предельных случая, когда импеданс $Z_2$ равен нулю (пример 5) и когда он равен бесконечности (пример 6).

Пример 5. *Короткозамкнутая линия: импеданс равен нулю.* Если правый конец линии замкнут накоротко, напряжение на этом конце постоянно равно нулю. В этом случае коэффициент отражения для волны напряжения равен —1. Коэффициент отражения для волны тока в этом случае равен +1 и величина тока (на конце линии) удваивается по сравнению со случаем самосогласованной нагрузки. Положительный импульс напряжения при отражении от конца линии становится отрицательным, а импульс тока после отражения сохраняет свой знак.

Пример 6. *Линия с открытым концом: импеданс равен бесконечности.* Если линия на правом конце разомкнута, то ток на



конце линии равен нулю. Таким образом, коэффициент отражения для тока должен быть равен —1. Коэффициент отражения для напряжения в этом случае равен +1. Из сказанного выше следует, что в общем случае коэффициенты отражения для напряжения $V$ и тока $I$ имеют вид

$$R_V = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \equiv -R_{12}, \quad R_I = -R_V. \tag{37}$$

В случае $Z_2=0$ получаем $R_V=-1$, а в случае $Z_2=\infty$ $R_I=-1$, что совпадает со сказанным выше.

*Передающая линия из параллельных пластин.* Импеданс линии (в ед. СГСЭ) равен [уравнение (4.140) п. 4.4]

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w}. \tag{38}$$

Если, например, при переходе от линии 1 к линии 2 длина воздушного зазора удваивается, то импеданс также возрастет в два раза.

*Коэффициенты отражения для полей.* Вместо потенциала и тока можно рассматривать электрическое поле $E_x$ и магнитное поле $B_y$. В данной передающей линии электрическое поле пропорционально $V$, а магнитное — пропорционально $I$. Имеем

$$gE_x = V, \quad wB_y = \frac{4\pi}{c} I\mu. \tag{39}$$

Так как отраженная волна в линии 1, естественно, находится в той же передающей линии, что и падающая волна, т. е. в линии с тем же воздушным зазором $g$, шириной $w$ и магнитной проницаемостью $\mu$, то коэффициент отражения для $E_x$ тот же, что и для $V$, а для $B_y$ тот же, что и для $I$. С другой стороны, коэффициенты *прохождения* для $gE_x$ и $wB_y/\mu$ совпадают с коэффициентами прохождения для $V$ и $I$ соответственно. Мы будем рассматривать только коэффициенты отражения. Имеем для электрического поля

$$R_E = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}. \tag{40}$$

Магнитное поле имеет коэффициент отражения, равный по величине и обратный по знаку коэффициенту для $E_x$.

В следующем примере рассмотрен случай, имеющий большое значение.

Пример 7. *Отражение в передающей линии, имеющей разрыв непрерывности по* $\varepsilon$. Будем считать, что геометрия линии (т. е. $w$ и $g$) и магнитная проницаемость не изменяются на границе. (Для таких сред, как ионосфера, вода, стекло, воздух, можно с достаточно высокой степенью точности считать $\mu=1$.) Из выражения (38) для $Z$ видно, что в этих условиях единственной величиной, которая может меняться на границе раздела, является диэлектрическая постоянная $\varepsilon$. Из (38) следует, что $Z$ пропорционально $1/\sqrt{\varepsilon}$ или $1/n$,

так как при $\mu=1$ показатель преломления $n=\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, после подстановки $Z_1=1/n_1$ и $Z_2=1/n_2$ в (40) имеем

$$R_E=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}. \tag{41}$$

Этот результат можно обобщить. Пусть воздушный зазор $d$ и ширина $w$ передающей линии бесконечно увеличиваются. Коэффициент отражения в данной области поля не может зависеть от граничных условий. Поэтому выражение (41) применимо даже для волн, испускаемых удаленным уличным фонарем или телевизионной антенной. *Уравнение (41) дает коэффициент отражения для любых бегущих электромагнитных волн, падающих нормально к поверхности, на которой происходит резкий скачок (на длине меньшей, чем длина волны) диэлектрической постоянной.*

Мы можем немедленно применить этот результат к интересному случаю отражения видимого света.

Пример 8. *Отражение видимого света.* Коэффициент отражения любой электромагнитной плоской волны при нормальном падении на границу между двумя прозрачными средами определяется по формуле (41) (если $\mu=1$ для обеих сред). Так, для перехода воздух-стекло (для воздуха $n_1=1$, а для стекла $n_2=1{,}5$) имеем

$$R_E=\frac{1-n}{1+n}=\frac{1-1{,}5}{1+1{,}5}=-\frac{1}{5}. \tag{42}$$

Таким образом, при отражении меняется знак электрического поля, а величина поля уменьшается в 5 раз. (Для перехода из стекла в воздух коэффициент отражения равен $+1/5$.) Поток энергии в отраженной волне пропорционален квадрату электрического поля. Поэтому интенсивность отраженного света при однократном отражении от границы воздух-стекло близка к 4% (1/25 часть) интенсивности света, падающего нормально на поверхность раздела. (См. домашний опыт 5.1.)

## 5.4. Согласование импедансов двух прозрачных сред

Мы хотим, чтобы бегущие волны переходили из одной среды в другую без отражения на границе. Речь идет, например, о передаче звуковой энергии из воздуха в громкоговорителе в воздух комнаты без образования отраженных волн. (В этом случае отражения нежелательны, потому что эффективный нагрузочный импеданс, на который работает возбуждающий механизм, может быть частично реактивным и соответственно зависящим от частоты. Зависимость импеданса от частоты может привести к появлению паразитных резонансов.) Другим примером может быть переход бегущих волн видимого света из воздуха в стеклянную линзу или пластину. Желательно, чтобы при переходе свет не отражался. (Отражение вызывает, во-первых, потерю интенсивности и, во-вторых, попадание света на другие части аппаратуры.) В качестве еще одного примера можно привести непосредственный разговор между двумя аквалангистами под водой. Каждый аквалангист может громко говорить в маску, которая закрывает рот, нос и глаза. Так как коэффициент прохождения $T_{12}$ очень мал, то через стекло маски в воду пройдет лишь незначительная часть звуковой энергии. Малость величины $T_{12}$ объясняется тем, что звуковые импедансы воды и воздуха сильно отличаются.



Передача бегущих волн из одной среды в другую без отражения называется *согласованием импедансов*. Мы рассмотрим два способа решения этой важной задачи. Первый способ заключается в создании «неотражающего» слоя, второй способ связан с образованием переходного слоя с плавно меняющимися свойствами. (Надо сказать, что ни один из этих способов не подходит для аквалангистов. В случае переговоров под водой решение было достигнуто преобразованием звуковых частот в ультразвуковые. Оказалось, что на ультразвуковых частотах в воде согласование импедансов выполнить легче. Поэтому каждый аквалангист снабжается ультразвуковым передатчиком и приемником, а также конвертером частот.)

*Слой без отражения.* Пусть среда 1 простирается от $z=-\infty$ до $z=0$, а среда 3 — от $z=L$ до $z=+\infty$. Между этими средами от $z=0$ до $z=L$ расположено устройство (среда 2), с помощью которого мы хотим добиться согласования импедансов сред 1 и 3. Это согласование мы хотим осуществить для волн с угловой частотой $\omega$. Очевидно, что если существует скачок в величине импеданса, то на границе раздела обязательно возникнет отражение. Способ, который мы рассмотрим, основан на том, чтобы образовать две отраженные волны: одну в $z=0$ и другую в $z=L$. Если мы будем достаточно сообразительны, то сможем создать такие условия, чтобы суперпозиция этих двух волн в среде 1 дала нулевую амплитуду отраженной волны.

Заполним область между $z=0$ и $z=L$ дисперсивной средой с характеристическим импедансом $Z_2$. Пусть $Z_2$ лежит между $Z_1$ и $Z_3$. В соответствии с нашими формулами для коэффициентов отражения имеем

$$R_{12}=\frac{Z_1-Z_2}{Z_2+Z_1}=\frac{1-(Z_2/Z_1)}{1+(Z_2/Z_1)},\quad R_{23}=\frac{Z_2-Z_3}{Z_2+Z_3}=\frac{1-(Z_3/Z_2)}{1+(Z_3/Z_2)}. \tag{43}$$

Вследствие того, что $Z_1<Z_2<Z_3$, оба коэффициента отражения, $R_{12}$ и $R_{23}$, имеют одинаковый знак. Теперь нам нужно воспользоваться тем, что две отраженные волны возникают в различных местах, а именно при $z=0$ и при $z=L$. Проследим за распространением падающей волны. В $z=0$ падающая волна частично отражается с коэффициентом $R_{12}$ и частично проходит с коэффициентом прохождения $T_{12}$, который, кстати, всегда положителен. Прошедшая волна доходит до границы $z=L$, где частично отражается с коэффициентом $R_{23}$ и частично проходит. Волна, отраженная от границы $z=L$, распространяется в направлении $-z$ и проходит границу $z=0$ с коэффициентом прохождения $T_{21}$. Таким образом, амплитуда

волны, прошедшей обратно (в направлении $-z$) в среду 1, равна амплитуде падающей волны, умноженной на коэффициент $T_{12} \times R_{23} T_{21}$. Сдвиг фазы между этой волной и волной, отраженной от первой поверхности раздела, определится временем прохода волной расстояния $2L$. Таким образом, мы можем написать следующие выражения для трех волн в первой среде:

$$\psi_{\text{пад}} = A \cos(\omega t - k_1 z), \tag{44}$$

$$\psi_{(\text{отр в } z=0)} = R_{12} A \cos(\omega t + k_1 z), \tag{45}$$

$$\psi_{(\text{отр в } z=L)} = T_{12} R_{23} T_{21} A \cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 L). \tag{46}$$

Здесь $-2k_2L$ — это изменение фазы волны при прохождении расстояния $2L$ в среде 2 ($k_2$ — волновое число; знак минус указывает на отставание по фазе). Падающая волна и две отраженные волны, определяемые уравнениям (45) и (46), показаны на рис. 5.5.

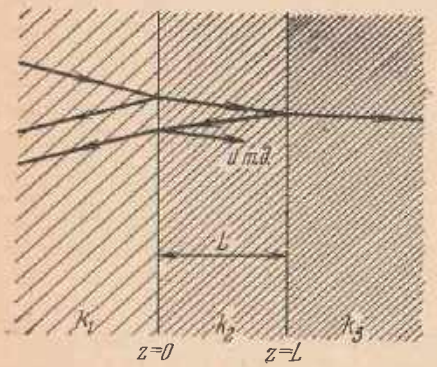



Рис. 5.5. Падающая и две первые отраженные волны.

Чтобы избежать наложения лучей, показан случай падения не по нормали.

*Приближение, основанное на малости коэффициентов отражения.* Кроме двух отраженных волн, показанных на рис. 5.5, существует бесконечно много отраженных волн, на что указывает стрелка «и т. д.».

Следует заметить, что во всех применениях описываемого метода импедансы $Z_1$, $Z_2$ и $Z_3$ мало отличаются друг от друга и поэтому коэффициенты отражения малы по сравнению с единицей. В этом случае первые две отраженные волны преобладают, и с достаточной степенью точности мы можем пренебречь вкладом от многократно отраженных волн. Например, амплитуда третьего отраженного луча будет составлять $(R_{21}R_{23})$-ю часть от амплитуды второго луча (т. е. луча, отраженного от границы $z=L$). Если $R_{21}$ и $R_{23}$ порядка 0,1, то третьей отраженной волной можно уже пренебречь. Точно так же произведение $T_{12}T_{21}$ в уравнении (46) можно с достаточно хорошим приближением заменить единицей:

$$T_{12}T_{21} = (1 + R_{12})(1 - R_{12}) = 1 - R_{12}^2 \approx 1. \tag{47}$$

Таким образом, *в приближении, когда коэффициенты отражения малы*, отраженная волна в среде 1 будет суперпозицией двух волн: отраженной на границе $z=0$ и на границе $z=L$. Имея в виду равенства (46) и (47), получаем

$$\psi_{\text{отр}} \approx R_{12} A \cos(\omega t + k_1 z) + R_{23} A \cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 L), \tag{48}$$



где $2k_2L$ определяет сдвиг фазы, возникший от движения «туда и обратно».

*Как получить неотражающий слой.* Теперь можно считать, что задача согласования сопротивлений решена. Сначала выберем $Z_2$ так, чтобы $R_{12} = R_{23}$, т. е. чтобы [в соответствии с (43)]

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_2}{Z_3}, \quad Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}. \tag{49}$$

Тогда выражение (48) принимает вид

$$\psi_{\text{отр}} \approx R_{12} A [\cos(\omega t + k_1 z) + \cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 L)]. \tag{50}$$

Теперь выберем длину $L$ такой, чтобы сумма в уравнении (50) равнялась нулю. Это означает, что мы хотим иметь «полностью деструктивную интерференцию». Она возможна в том случае, если $2k_2L$ равно $\pi$, т. е. если расстояние $2L$ представляет собой половину длины волны в среде 2. Таким образом, *отраженная в среду 1 волна равна нулю, если $Z_2$ есть геометрическое среднее из $Z_1$ и $Z_3$, а толщина промежуточного слоя равна четверти длины волны в этом слое.*

Пример 9. *Согласование импедансов в оптике.* Пучок видимого света, проходящий через пластинку стекла, отражается дважды: на границах воздух — стекло и стекло — воздух. *Интенсивность* отраженного пучка будет пропорциональна квадрату амплитуды отраженной волны (или квадрату коэффициента отражения, если амплитуда падающей волны принята за единицу). Поэтому при каждом отражении в соответствии с уравнением (42) п. 5.3 потери интенсивности равны $(1/5)^2 = 1/25 = 4\%$. Соответственно при переходе через пластинку (две поверхности) эти потери составят 8%. [Мы пренебрегаем интерференцией отраженных от двух поверхностей волн. Для обычного белого света интерференционные эффекты равны нулю при усреднении по широкому диапазону частот (цветов). Обратите внимание на опыт 5.10.] Такие потери (8%) недопустимы в оптических приборах, имеющих много границ стекло — воздух. Поэтому обычно поверхность линз покрывают неотражающим слоем. В соответствии с уравнением (49) импеданс покрывающего слоя должен быть геометрическим средним импедансов стекла и воздуха, т. е. он должен быть равен $\sqrt{1{,}50 \cdot 1{,}0} \approx 1{,}22$. Толщина слоя должна равняться $^1/_4\lambda_2$, где $\lambda_2$ — длина волны света в слое. Для волны света в вакууме 5500 Å соответствующая длина волны в покрытии равна $5500/1{,}22 = 4500$ Å. Это соответствует толщине покрытия $4500$ Å$/4 = 1120$ Å$= 1{,}12 \cdot 10^{-5}$ *см*. Такой слой можно нанести испарением соответствующего материала в вакуумной камере.

Рассмотрим интересную задачу. Предположим, что линза покрыта неотражающим слоем толщиной в $^1/_4\lambda$ для зеленого цвета (длина волны в вакууме 5500 Å.) В этом случае для зеленого цвета отражения не будет. Какой будет интенсивность отраженной волны для других цветов? См. задачу 5.21.

*Метод плавного изменения импеданса.* Неотражающий слой, который мы рассмотрели, имеет тот недостаток, что он годится

лишь для определенного узкого интервала частот. Рассмотрим еще один способ избавиться от отражения, который доступен в том случае, когда мы не ограничены местом в пространстве. Пусть длина $L$ больше любой из длин волн света, который мы хотим передать без отражений.

Допустим, что импеданс меняется монотонно на длине $L$, а на длине, равной четверти длины любой из передаваемых волн, изменится на очень малую величину. Для простоты будем считать, что имеем дискретное изменение импеданса каждый раз, когда $z$ увеличивается на $^1/_4\lambda$, где $\lambda$ — длина волны, которую мы хотим передать без отражений. Очевидно, что мы полностью избавимся от отражений, если амплитуда, отраженная при $z$, уничтожится амплитудой, отраженной при $z+^1/_4\lambda$, и т. д. (Мы пренебрегаем многократным отражением.) Коэффициент отражения при одном шаге по $z$, когда импеданс $Z$ изменится до $Z_2=Z_1+\Delta Z$, будет равен

$$\Delta R=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}\approx\frac{-\Delta Z}{2Z}\approx\frac{-1}{2Z}\left[\frac{dZ(z)}{dz}\right]\left(\frac{1}{4}\lambda\right). \qquad (51)$$

Если отражения от границ $z$ и $z+^1/_4\lambda$, т. е. при одном дискретном шаге по $z$, взаимно гасятся, то величина $\Delta R$ должна быть постоянной и не должна зависеть от $z$. Обозначим $\Delta R$ через $\alpha$, тогда формулу (51) можно записать так:

$$\frac{dZ}{Z}=-\frac{8\alpha}{\lambda}dz. \qquad (52)$$

Пример 10. *Экспоненциальный горн (рупор).* Если считать, что длина волны $\lambda$ постоянна и не зависит от $z$ (что имеет место, например, при распространении звуковой волны в трубе, импеданс которой меняется из-за изменения диаметра трубы), то интегрирование уравнения (52) дает экспоненциальный закон изменения импеданса $Z$ с расстоянием $z$. Экспоненциально расширяющийся рупор часто используют в высококачественных громкоговорителях для передачи без отражений звуковой энергии, излучаемой мембраной площадью $A_1$. Если же мы возбудим колебания в цилиндрической трубке без раструба с площадью поперечного сечения $A_1$ и неожиданно «подсоединим» эту трубку к комнате, то трубка будет резонировать для всех длин волн, для которых на концах трубки образуются пучности, и то, что мы услышим, будет мало похоже на музыку.

Пример 11. *Метод плавно меняющегося показателя преломления.* Согласование импедансов в оптике методом плавного изменения показателя преломления заключается в покрытии оптического элемента (линзы) несколькими слоями различных веществ, показатель преломления которых постепенно изменяется от $n_1$ до $n_2$. Технологически это более трудоемкий процесс, чем нанесение одного слоя, однако такой способ более эффективен. В этом случае зависимость $n$ (или $Z$) от $z$ не экспоненциальная. Почему? (См. задачу 5.22.)



## 5.5. Отражение в тонких пленках

*Интерференционные «узоры».* Мы знаем по опыту, что любые достаточно тонкие пленки (мыльные пузыри, машинное масло и т. д.) переливаются яркими красками. Это явление возникает в результате интерференции света, отраженного от передней и задней поверхностей пленки. (То же может иметь место и в результате интерференции проходящего света.) В качестве примера рассмотрим тонкую пленку воздуха, заключенную между двумя предметными стеклами микроскопа. Размеры неровностей на поверхности предметного стекла микроскопа имеют порядок длины волны $\lambda$. Поэтому толщина воздушного зазора, образованного двумя прижатыми предметными стеклами, будет того же порядка. Если поверхности стекол прижаты так, что расстояние между поверхностями значительно меньше $\lambda$, то отражения от места соприкосновения не возникает в силу равенства $R_{21}=-R_{12}$. В тех местах переходного слоя, где толщина пленки равна $^1/_2\lambda$, суммарный путь для волны равен $\lambda$ и отражения также не будет, так как разность фаз волн, отраженных от верхней и от нижней поверхностей пленки, равна $2\pi+\pi$. Максимумы в отраженном свете будут соответствовать отражениям от тех мест на поверхности пленки, толщина которых равна $^1/_4\lambda$, $^3/_4\lambda$, $^5/_4\lambda$ и т. д.

Пример 12. *Домашний опыт. Почему первая кайма белая?* Возьмем два чистых предметных стекла микроскопа. Притрем их друг к другу (не нажимая слишком сильно, чтобы не раздавить) и ориентируем относительно протяженного источника света (им может быть небо либо лампа накаливания в матовом баллоне) так, чтобы можно было наблюдать его отражение. Чтобы уменьшить влияние фона, расположим за пластинами черный экран. В отраженном свете вы увидите концентрические разноцветные кольца. Центральное пятно может быть черным. Это будет соответствовать отражению от соприкасающихся пластин. Первое кольцо после черного пятна имеет существенно белый цвет. Это происходит по следующей причине. Очевидно, что первый максимум в отраженном свете может возникнуть при отражении от пленки толщиной $^1/_4\lambda$. Мы знаем, что зеленый цвет ($\lambda\approx5500$ Å$=5{,}5\cdot10^{-5}$ *см*) является центром видимого спектра. Поэтому толщина воздушной пленки, которая дает максимум для зеленого света в отраженном свете, равна $^1/_4(5{,}5)\times\times10^{-5}=1{,}37\cdot10^{-5}$ *см*. С другой стороны, длина волны голубого света равна $\lambda\approx4{,}5\cdot10^{-5}$ *см* и в пленке толщиной $1{,}37\cdot10^{-5}$ *см* уложится $0{,}30\,\lambda$ волны голубого света. Аналогично для красного света ($\lambda\approx6{,}5\times\times10^{-5}$ *см*) уложится $1{,}37/6{,}5=0{,}21\lambda$. Таким образом, отражения для голубого и красного света на пленке толщиной примерно $1{,}37\times\times10^{-5}$ *см* также будут давать максимум. Поэтому в сумме мы будем иметь белый свет.

*Самая красивая кайма.* (См. задачу 5.23.) Последовательность цветных каем с удалением от центра приобретает все более определенный цвет. Нас интересует, когда кайма будет ярко зеленого цвета,

т. е. какова должна быть толщина пленки, чтобы в отраженном свете был только зеленый свет. Мы знаем, что максимумы для волны зеленого света будут возникать при отражениях в пленке толщиной $(3/4)\lambda$, $(5/4)\lambda$, ..., $(N/4)\lambda$, где $N$ нечетно. Если $N$ таково, что для голубого света толщина равна $(N+1)(1/4)\lambda$ голубого света, а для красного $(N-1)(1/4)\lambda$ красного света, то отражение от этого места красного и голубого света даст минимум, и мы получим яркий зеленый свет. Каким должно быть $N$?

*Выражение для интенсивности каймы.* Мы хотим получить выражение для интенсивности каймы данного цвета при отражении от тонкого слоя воздуха (или от стеклянной пластинки в воздухе) между двумя поверхностями стекла. Для этого мы воспользуемся результатами, полученными для смежных сред 1, 2 и 3 (см. рис. 5.5). В рассматриваемом случае среда 3 и среда 1 одинаковы, поэтому $R_{23}=R_{21}=-R_{12}$. Покажите сами (задача 5.24), что средняя во времени интенсивность отраженного света равна

$$\frac{I_{\text{отр}}}{I_0}=R_{12}^2\sin^2 k_2L. \tag{53}$$

Для перехода стекло — воздух или воздух — стекло $R_{12}^2=0{,}04$, и мы имеем

$$\frac{I_{\text{отр}}}{I_0}\approx 0{,}16\sin^2 k_2L. \tag{54}$$

Это выражение равно нулю для $L=0$ и для $L={}^1/_2\lambda_2$ и имеет первый максимум при $L={}^1/_4\lambda_2$. Заметим, что максимальная доля отраженной интенсивности равна 0,16, что в 4 раза больше интенсивности при однократном отражении от границы воздух — стекло.

*Один плюс один равно четырем?* Как нужно сложить равные интенсивности при отражении от двух поверхностей, чтобы получить интенсивность в 4 раза большую, чем каждая из них? Очевидно, сначала нужно найти суперпозицию волн, затем возвести ее в квадрат и найти среднюю по времени величину квадрата. В двух крайних случаях (каких?) мы можем получить либо $(1+1)^2=4$, либо $(1-1)^2=0$.

Заметим, что максимальная интенсивность цветной каймы, образованной отражением в воздушном слое между двумя предметными стеклами микроскопа, равна 0,16 $I_0$. Интенсивность света, отраженного от каждой внешней поверхности, равна 0,04. (Мы не видим интерференцию этих отражений, так как в ней участвует одновременно много длин волн и поэтому цвета, соответствующие этим волнам, полностью перемешиваются, давая в сумме белый цвет.)

Таким образом, интенсивность цветной каймы в два раза больше интенсивности окружающего света и ее легко наблюдать (особенно если вы положите под стекла темную материю, убрав фон).

Пример 13. *Полосы Фабри — Перо в предметном стекле микроскопа.* С помощью достаточно монохроматического источника



света легко наблюдать интерференционные полосы, вызванные суперпозицией отражений от обычного предметного стекла микроскопа или даже плоского оконного стекла.

Полное описание интерференционной картины в этом случае требует вычисления коэффициента отражения для нормально и косо падающих волн. Такие вычисления не представляют трудности, однако мы не будем ими заниматься. Мы рассмотрим только центральную полосу, соответствующую нормальному падению, и постараемся ответить на вопрос: насколько монохроматичным должен быть источник света? Ответ может быть получен из выражения (53).

Предположим, что $L=1$ *мм*$=0{,}1$ *см*. Если в свете присутствует только одно волновое число $k_2$, то центральная полоса будет максимумом или минимумом в зависимости от того, равно ли значение $\sin^2 k_2L$ единице или нулю. Если падающий свет представлен некоторым интервалом $\Delta k$, то в случае большого интервала для некоторых $k$ будут получаться максимумы, а для некоторых минимумы и цвет полосы будет размыт. Насколько узким должен быть этот интервал волновых чисел $\Delta k_2$, чтобы можно было получить отчетливо видную центральную полосу? (Можно допустить, что в случае косого падения побочные полосы будут различимы, если различима центральная полоса.) Максимумы в последовательности, определяемой выражением (54), отстоят друг от друга на интервал $\pi$ по аргументу $k_2L$. В первом приближении можно считать, что мы получим четкие полосы, если $(\Delta k_2)<\pi$. Исходя из этого, можно показать (задача 5.25), что необходимый диапазон обратных значений длины волны равен

$$\Delta(\lambda^{-1})\approx 3{,}3\,\text{см}^{-1}, \tag{55}$$

т. е.

$$\Delta\nu=c\Delta(\lambda^{-1})\approx 10^{11}\,\text{гц}.$$

Например, для зеленой линии ($\lambda\approx 5{,}5\cdot 10^{-5}$ *см*)

$$\Delta\lambda\approx 1{,}0\ \text{Å}.$$

Таким образом, необходимый диапазон должен быть меньше, чем 3,3 $\text{см}^{-1}$. Мы покажем в главе 6, что диапазон $\Delta\nu\approx 10^9$ *гц* близок к естественной ширине линии для атома. Меньший диапазон частот можно получить только с помощью лазера. Таким образом, чтобы наблюдать четкие интерференционные полосы в оконном стекле, мы должны использовать источник из свободно излучающих атомов. Для этой цели может служить неоновая лампа (см. домашний опыт 5.10), а также пламя, в которое брошена щепотка соли или соды (см. домашний опыт 9.27).

### Задачи и домашние опыты

**5.1.** Опыт. *Отражение от стекла.* Плоская стеклянная пластина отражает около 8% интенсивности света при нормальном падении, по 4% от каждой поверхности. Обычное зеркало, покрытое амальгамой ртути, отражает более 90% видимого света. Возьмите зеркало и чистый кусок стекла (например, предметное стекло микроскопа). Сравните отражение от зеркала и от стекла, расположив их рядом,

так чтобы видны были сразу оба отражения. Посмотрите на отражение широкого источника, например лампы накаливания, куска белой бумаги или части неба. Сравните отражающую способность стекла и зеркала при падении, близком к нормальному. Теперь проделайте то же самое для скользящего падения света. В последнем случае отражение от зеркала и отражение от предметного стекла микроскопа практически мало различимы. При угле падения, близком к 90°, отражается почти 100% света. При падении, близком к нормальному, стекло отражает намного слабее, чем зеркало.

Теперь возьмите четыре чистых предметных (или, еще лучше, покровных) стекла микроскопа. Сложив их вместе в виде лестницы (первое стекло — основание, второе — первая ступенька и третье и четвертое — вторая ступенька двойной высоты), вы можете наблюдать отражение, близкое к нормальному, одновременно от одного, двух и четырех стекол. Посмотрите на отражение широкого источника при падении, близком к нормальному. Пренебрегая внутренними отражениями, можно считать, что через каждое стекло пройдет 92% начальной интенсивности $I_0$. Поэтому четыре стекла пропустят $(0{,}92)^4 I_0 = 0{,}72 I_0$ и отразят $I_0\,(1-(0{,}92)^4) \approx 0{,}28 I_0$.

Теперь сделайте *столбик* из дюжины чистых предметных (покровных) стекол. Все вместе они должны отразить $I_0\,(1-(0{,}92)^{12}) = 0{,}64\, I_0$. Сравните это с отражением от зеркала. Предположив, что используемое нами правило вычисления прошедшей и отраженной интенсивностей справедливо (и что стекла чистые), определите, сколько стекол будет соответствовать зеркалу для отражения, близкого к нормальному. Зеркало отражает около 93% падающей интенсивности. Посмотрите через составленную пачку стекол на источник. (В соответствии с нашим правилом потребуется около 32 стекол. Очевидно, стекла должны быть без отпечатков пальцев.)

5.2. Опыт. *Интерференция в тонких пленках.* (См. п. 5.5.) Наполните таз теплой водой. Капните на поверхность воды каплю масла и наблюдайте, как масло растекается. (Возьмите легкое масло; прованское масло, например, слишком тяжелое, и оно не будет растекаться.) Наблюдайте отражение неба (или другого протяженного источника света) в капле по мере ее растекания. (На дно таза хорошо поместить черную ткань или бумагу, чтобы избежать нежелательного отражения от дна.) Заметьте, что цветные узоры не появляются, пока пленка масла не расползлась по площади порядка $10 \times 10$ *см*$^2$. Почему?

Наблюдайте за цветными узорами по мере расползания пленки. Когда пленка станет достаточно тонкой, узоры исчезнут. Пленка будет казаться темной в местах, где толщина масла наименьшая. Здесь толщина пленки меньше четверти длины волны. *Используйте этот факт для грубой оценки длины волны видимого света*, приняв толщину темной области пленки за восьмую часть длины волны. Оцените площадь пленки и, зная первоначальный объем капли, найдите толщину пленки, а по толщине определите длину волны.

5.3. Опыт. *Переходные стоячие волны в «пружине»**). Закрепите один конец «пружины» и возьмитесь за другой. Растяните «пружину» примерно на 10 *м*. Встряхните очень быстро 3 или 4 раза ваш конец «пружины». По «пружине» будет распространяться волновой пакет. «Налюбовавшись» пакетом, распространяющимся в прямом и обратном направлениях по «пружине», обратите внимание на область вблизи закрепленного конца. Когда волновой пакет входит в эту область, отражается и движется в обратную сторону, вы можете наблюдать *переходную стоячую волну*. Эта волна существует, пока падающий и отраженный пакеты перекрываются. Опыт показывает, что стоячую волну можно считать суперпозицией двух бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

5.4. Опыт. *Многократное внутреннее отражение в предметном стекле микроскопа.* Нарисуйте ход луча, падающего (слева) под некоторым углом на стеклянную пластинку. Покажите первый прошедший через пластинку луч, второй (т. е. прошедший через пластинку после двух внутренних отражений), третий и т. д. Теперь посмотрите через предметное стекло микроскопа на точечный или линейный источник. Расположите стекло близко к глазу. Начните с нормально падающего света и постепенно наклоняйте стекло. Наблюдайте «виртуальные источники», появляющиеся вследствие многократных отражений. (Этот эффект будет сильным

*) См. сноску на стр. 24.



при скользящем падении лучей.) Обратите внимание на свет, который выходит не из поверхности стекла, а у торцов пластинки. Это — «захваченный» свет, который в конце концов выходит из стеклянной пластинки, когда достигает ее торцов. При скользящем падении света на поверхность стекла угол падения света на торцевые поверхности пластинки близок к нормальному.

5.5. *Отражения в передающих линиях.* Предположим, что коаксиальная передающая линия 1 (характеристический импеданс 50 *ом*) подсоединена к линии 2 (характеристический импеданс 100 *ом*).

а) Импульс напряжения $+10$ *в* (максимальное значение) приходит из первой линии во вторую. Какова величина (в вольтах) и знак отраженного импульса? Какова «высота» прошедшего импульса?

б) Импульс $+10$ *в* поступает из 100-омной линии в 50-омную. Найдите величины отраженного и прошедшего импульсов.

5.6. *Необратимое согласование сопротивлений.* Рассмотрим передающие линии из задачи 5.5.

а) Как с помощью обыкновенного сопротивления, подключенного к этим линиям, добиться того, чтобы импульс, распространяющийся из линии 1 в линию 2, проходил 100-омную линию без отражения? Чему равна величина этого сопротивления? Нарисуйте примерный чертеж, показывающий центральную нить и внешний экран (второй провод) каждой линии в месте их соединения, а также подключенное сопротивление.

б) Какова величина прошедшего импульса? (Величина падающего импульса $+10$ *в*.)

в) Теперь предположим, что импульс $+10$ *в* послан в обратном направлении, т. е. из 100-омной линии в 50-омную. Что произойдет? Определите величину отраженного и прошедшего импульсов.

г) Рассмотрим задачу передачи импульса из 100-омной линии в 50-омную без образования отражения. Какой должна быть величина сопротивления и как его следует подключить к месту соединения линий? Какова величина прошедшего импульса, если величина падающего равна $+10$ *в*? Что произойдет, если такой импульс будет распространяться из 50-омной линии в 100-омную?

5.7. Свет с длиной волны $\lambda = 5000$ Å падает нормально на прозрачный пластиковый диск, за которым стоит второй такой же диск. Расстояние между дисками велико по сравнению с длиной волны. Какая часть света пройдет через диски, если показатель преломления дисков $n = 1{,}5$? Пренебрегаем поглощением, внутренним многократным отражением и интерференционными эффектами.

Ответ. $I_{\text{прош}}/I_0 = 0{,}85$.

5.8. Сравните амплитуды, интенсивности и коэффициенты отражения для света, падающего нормально на гладкую поверхность раздела, для падения: 1) из воздуха в воду и 2) из воды в воздух. (Для воды $n = 1{,}33$.)

5.9. *Отражения в тонкой пленке воздуха.* Возьмите две оптически плоские стеклянные пластины. Пусть с одной стороны края пластин касаются друг друга, а с противоположной стороны между пластинами вставлена полоска бумаги, толщина которой равна толщине страницы этой книги. Таким образом, между пластинами находится воздушный клин. Мы хотим, чтобы последовательные узоры (кайма) зеленого света были отделены друг от друга расстоянием порядка 1 *мм*, чтобы их легко было наблюдать. Чему должна быть равна длина $L$ воздушного клина?

5.10. Опыт. *Полосы Фабри — Перо в оконном стекле.* Для этого опыта необходим широкий, почти монохроматичный источник света. Наиболее дешевым и простым в обращении источником такого типа является стандартная неоновая лампа 120 или 220 *в*, ввинчивающаяся в обычный патрон. Лампы такого типа используют электромонтеры для проверки напряжения в сети. При работе лампы возникает круглый диск светящегося неона диаметром около 2,5 *см*. Включите лампу и посмотрите на нее через дифракционную решетку, расположенную близко к глазу. В спектре первого порядка, который виден под углом 15—20° относительно центрального оранжевого изображения источника, вы сможете увидеть по крайней мере три ярких изображения источника: зеленое, оранжевое и красное. (В действительности каждое из этих изображений состоит из большого числа ярких линий.) Наблюдаемые «виртуальные источники» четки и не размазаны, что указывает на монохроматичность каждого отдельного изображения (в пределах, конечно,

разрешающей способности глаза). Каждый «источник» соответствует различным переходам возбужденного атома неона. Опыт состоит в следующем. Возьмите обыкновенный кусок стекла, например предметное стекло микроскопа или кусок оконного стекла*). В крайнем случае можно использовать окно в вашей комнате. Расположив неоновую лампу около лица, наблюдайте отражение лампы в куске стекла. Если вы видите два отражения, то возьмите другой кусок стекла. (Оконное стекло после многих лет медленного вязкого течения становится клинообразным.) Найдите чередующиеся темные и яркие полосы (т. е. горизонтальные линии) в отраженном свете. После минутного поиска их можно легко обнаружить, после чего наблюдение за ними не составит труда. (Стекло должно находиться на расстоянии примерно 60 *см*.) Появление полос объясняется интерференцией между отражениями от задней и передней поверхностей стекла. Чтобы доказать это, приклейте на поверхность стекла кусок прозрачной ленты и расположите стекло так, чтобы сначала эта поверхность была обращена к вам, а потом от вас. Наблюдайте за полосами на изображении источника в отраженном свете, когда лента находится в области отражения. Липкая поверхность соприкосновения ленты со стеклом является оптически грубой поверхностью, так как она имеет нерегулярности (например, прослойки воздуха) меньшие, чем длина волны света. В некоторых местах свет переходит из стекла в ленту без отражения (показатель преломления ленты близок к показателю преломления стекла) и отражается, только когда достигает внешней, обращенной к глазу, гладкой поверхности ленты. В других местах лента не касается поверхности стекла и отражение возникает от поверхности воздух — стекло (т. е. воздух находится между поверхностью стекла и наклеенной лентой). Теперь, наблюдая интерференционные полосы, можно выяснить, является ли пластина стекла или целлофана оптически плоской. Прозрачная лента не является оптически плоской, а поверхность стекла оптически плоская. Испытайте поверхности поляроидов, пластинок в четверть и половину длины волны, а также оптических фильтров из вашего оптического набора. Являются ли они оптически плоскими? Для этих опытов годится также обычная флюоресцентная лампа, но неоновая лампа лучше.

Вот опыт, который можно сделать с неоновой лампой (если не удастся выполнить его с флюоресцентной лампой). Наблюдайте за интерференционными полосами, возникающими при отражении света неоновой лампы от поляроида. Затем поместите перед глазами другой поляроид (или воспользуйтесь очками от солнца с поляроидами).

Наблюдайте за полосами при обеих ориентациях поляроида-мишени. *Теперь переверните поляроид-мишень и повторите опыт.* Таким образом, имеются четыре ориентации: оси поляроидов параллельны, оси перпендикулярны и, кроме того, поляроид-мишень может быть перевернут. Обратите внимание на размеры полос. (Более широкой полосе соответствует более тонкая пленка.) Поляроид представляет собой «бутерброд» из трех слоев, с двумя внешними чистыми (прозрачными) слоями («хлеб») и центральным поглощающим слоем («ветчиной»). *Являются ли, обе поверхности среднего слоя* («ветчина») *оптически гладкими?*

Приведем еще один интересный опыт (или демонстрацию) с полосами Фабри — Перо. Вечером, при отсутствии освещения, осветите лицо неоновой лампой. Посмотрите на ваше изображение в стекле, находящемся в шаге или двух от вас. Ваше лицо представляет теперь широкий источник монохроматического света. Наблюдайте концентрические круговые полосы. (Полосы будут круговые, если стекло достаточно плоское.) Эффект от опыта довольно жуткий.

**5.11.** Опыт. *Неоновый стробоскоп.* Опишем еще один интересный опыт с неоновой лампой. Расположите лампу на расстоянии примерно 30 *см* от глаза. Теперь смотрите не на лампу, а в направлении, составляющем угол около 45° с линией, соединяющей ваш глаз и лампу. Обратите внимание на мерцания лампы. Теперь посмотрите прямо на лампу. Мерцания исчезнут. Очевидно, природа так создала наш глаз, что при боковом зрении он чувствителен к очень быстрым изменениям интенсивности света. Это кажется разумным! (Такой опыт можно выполнить и с экраном телевизора. Сравните, что получается, если смотреть на экран прямо и

*) Этот опыт выходит тем легче, чем тоньше стекло. Лучше всего его делать с покровным стеклом микроскопа. (*Прим. ред.*)



под углом.) Каждый электрод в неоновой лампе вспыхивает и гаснет с частотой 60 *гц*. Но моменты вспышек обоих электродов сдвинуты по фазе на 180°: когда один вспыхивает, другой гаснет. Поэтому неоновую лампу можно использовать как 60-либо как 100-герцевый стробоскоп, в зависимости от того, как она используется для освещения объекта. Легко показать, что электроды неоновой лампы находятся в противофазе. Ввинтите неоновую лампу в какой-нибудь не слишком тяжелый светильник, чтобы его можно было трясти. Поверните лампу так, чтобы были видны края обоих электродов. Теперь потрясите лампу из стороны в сторону с частотой 4 *гц* (если можете, то с большей частотой) и с максимально возможной амплитудой (порядка 10—20 *см*). Смотрите на оранжевые полоски, образованные электродами. Появляются ли они вместе или попеременно? Чтобы измерить частоту, вам нужны еще часы. Предположим, что движение синусоидально. Измерьте частоту и амплитуду, необходимые для того, чтобы две красные полоски выглядели как «прямоугольная волна». Поскольку известно, что частота света должна быть связана с 50 *гц* некоторым целым множителем, то из этого грубого опыта легко определить строб-частоту.

Замечание. Удобнее трясти не лампу, а смотреть на отражение лампы в зеркале и трясти зеркало. При помощи зеркала и неоновой лампы вы сможете получить прекрасную «прямоугольную волну». Таким же методом можно исследовать свечение экрана телевизора. Сделайте накладываемую на экран маску, через которую была бы видна вертикальная полоса экрана. Потрясите зеркало относительно вертикальной оси. Пилообразный импульс, который вы увидите, указывает на то, что некоторая часть телевизионной трубки испускает свет в любой момент времени (т. е. на зеркало все время падает свет от какой-либо части вертикальной полосы; полоса не мерцает). Поэтому, чтобы получить хороший стробоскоп на основе телевизионной трубки, вы должны использовать горизонтальную, а не вертикальную щель.

**5.12.** *Непрерывность волны на границе.* Мы нашли, что для света (или любого электромагнитного излучения), падающего из среды 1 в среду 2, при условиях, что магнитная проницаемость равна единице (или не изменяется на границе) и «геометрия» среды постоянна (передающая линия из параллельных пластин с неизменной формой поперечного сечения или пластина вещества в свободном пространстве), коэффициенты отражения и прохождения для электрического поля $E_x$ и магнитного поля $B_y$ равны

$$R_E=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}, \quad T_E=1+R_E=\frac{2k_1}{k_1+k_2},$$

$$R_B=\frac{k_2-k_1}{k_2+k_1}, \quad T_B=1+R_B=\frac{2k_2}{k_2+k_1}.$$

Здесь $k=n\omega/c$ и $n$ — показатель преломления. Покажите, что коэффициенты отражения и прохождения для $E_x$ указывают на то, что как $E_x$, так и $\partial E_x/\partial z$ непрерывны на границе, т. е. имеют одно и то же мгновенное значение с обеих сторон от границы [под полем слева от границы (среда 1) мы, конечно, подразумеваем *суперпозицию* падающей и отраженных волн]. Покажите также, что коэффициенты отражения и прохождения для магнитного поля $B_y$ указывают на непрерывность на границе поля $B_y$ и разрыв непрерывности в $\partial B_y/\partial z$. Покажите, что при переходе из среды 1 в среду 2 величина производной $\partial B_y/\partial z$ возрастает в $(k_2/k_1)^2=(n_2/n_1)^2$ раз.

**5.13.** Покажите, что для волн в струне граничное условие, аналогичное постоянству магнитной проницаемости (на границе) для света, заключается в постоянстве плотности массы струны. Покажите, что уменьшение диэлектрической постоянной для света при переходе через границу двух сред аналогично уменьшению натяжения струны. Покажите, что скорость поперечных волн в струне ведет себя так же, как магнитное поле в световой волне, в том смысле, что она (скорость) непрерывна, но ее производная по $z$ уменьшается в $(k_2/k_1)^2$ раз при переходе из среды 1 в среду 2. Покажите, что поведение поперечного натяжения $-T_0\,\partial\psi/\partial z$ аналогично поведению электрического поля в том смысле, что как натяжение, так и производная натяжения по $z$ непрерывны на границе. (Во всех случаях мы

имеем в виду общее поле, а не его компоненты, распространяющиеся в некоторых направлениях.)

**5.14.** Рассмотрим коаксиальный кабель, между проводниками которого вакуум. Характеристический импеданс кабеля равен 50 *ом*. Теперь предположим, что один конец этого кабеля замкнут на «эквивалент», для которого величина $\rho/d$ равна 377 *ом*, т. е. внутренний и внешний проводники кабеля подсоединены к «эквиваленту». Пользуясь обычным омметром, на другом конце кабеля измеряют сопротивление постоянному току между внешним и внутренним проводниками кабеля. Сопротивлением самих проводников можно пренебречь (кусок кабеля нужно сделать максимально коротким). При этом измеряемое омметром сопротивление будет полностью определяться подключенным «эквивалентом». Что покажет омметр? Объясните ваше предположение.

**5.15.** Опыт. *Эффективная длина трубки с открытым концом для стоячих волн.* Для опыта используйте картонную трубку (на которую наматывается бумажное полотенце). В качестве стандарта частоты используйте камертон С523,3. Слегка ударьте открытым концом трубки о голову и слушайте. Отрежьте небольшую часть трубки (если это необходимо), чтобы слышимый звук был более высокой частоты, чем 523,3 *гц*. Теперь вставьте в открытый конец трубку несколько меньшего диаметра, которой можно манипулировать, как при игре на тромбоне. (Для этой цели можно использовать картонную трубку. Разрежьте ее вначале по длине и снимите часть картона, из которого сделана трубка, чтобы получить трубку меньшего диаметра. Затем сверните и заклейте трубку по шву лентой, чтобы на боковой поверхности не выходил воздух.) Мода, которую вы услышите, является самой низкой модой трубки с открытым концом. В трубке «помещается» половина длины волны колебаний, соответствующих этой моде. Скорость звука 332 *м/сек*. Поэтому можно ожидать, что длина трубки равна

$$L = \frac{1}{2}\frac{v}{\nu} = \frac{1}{2}\frac{3{,}32\cdot 10^4}{523{,}3} = 31{,}7 \text{ см}.$$

Однако в действительности длина трубки $L_0$ меньше 31,7 *см* на величину 0,6 диаметра трубки. Это можно объяснить «концевым эффектом», приводящим к увеличению обоих концов трубки на величину $0{,}6\,R$, где $R$ — радиус трубки. Чтобы убедиться в том, что это именно «концевой эффект», сделайте опыт с толстыми и с тонкими трубками.

**5.16.** Опыт. *Резонанс в картонных трубках.* Воспользуйтесь трубками из опыта 5.15. Вибрирующий камертон расположите у одного конца трубки. Систему из двух трубок, вставленных одна в другую (опыт 5.15), будем называть «тромбоном». Если взаимное расположение трубок таково, что тромбон настроен на 523,3 *гц*, то вы услышите прекрасный громкий звук. Если этого не происходит, настройте «тромбон» в резонанс. Вопросы: когда тон (частота) собственных колебаний воздуха в трубке отличен от тона (частоты) возмущающего трубку камертона, то какой тон (частоту) вы слышите? (Сперва, пользуясь знанием теории вынужденных колебаний, предположите, каким должен быть ответ. Затем сделайте опыт.)

Вот способ, с помощью которого можно получить прекрасный сетрый резонанс. Расположите трубку вертикально, погрузив нижний конец в достаточно глубокий сосуд с водой. Вибрирующий камертон держите у открытого конца. Настройте трубку в резонанс, поднимая или опуская ее.

Рассмотрим еще один хороший способ настройки на резонанс. Наполните бутылку водой примерно на две трети, так чтобы, продувая воздух вблизи горлышка бутылки, вы слышали звук чуть-чуть выше, чем С523,3. Положите в бутылку соломинку, а вибрирующий камертон расположите около горлышка. Высасывая воду с помощью соломинки, настройте бутылку в резонанс.

Попробуйте петь, медленно меняя высоту тона. Вы сможете наблюдать резонанс в картонных трубках, кувшинах, комнатах и туннелях. Вы услышите и «почувствуете» сильные резонансы. Изменение импеданса может фактически «выключить» вас или заставить сместиться к соседнему тону.

**5.17.** Опыт. *Является ли звукоулавливающая система человека (барабанная перепонка, нервы, мозг) фазочувствительным детектором?* Давайте выясним это! Иногда можно слышать утверждение, что человек обнаруживает направление распространения звука, замечая временную задержку между приходом гребня



волны в одно и другое ухо. Это означало бы, что человек реагирует на сдвиг фаз между колебаниями обеих барабанных перепонок. Иными словами, дело сводится к вопросу: можете ли вы ощутить разницу между следующими двумя состояниями барабанных перепонок: 1) обе перепонки вогнуты, обе перепонки выгнуты, обе перепонки вогнуты, обе перепонки выгнуты и т. д. и 2) левая перепонка вогнута, правая выгнута, левая перепонка выгнута, правая вогнута и т. д.?

Вначале возьмем картонную трубку с открытыми концами (для получения приятного громкого звука используем камертон С523). Пусть длина трубки равна $\lambda/2$. Это значит, что в момент, когда на правом конце трубки воздух устремляется вправо, на левом конце он устремляется влево, т. е. при резонансе скорости воздуха на обоих концах сдвинуты на 180°: в данный момент времени на обоих концах воздух устремляется либо из трубки, либо в трубку. Теперь ударьте два камертона С523 друг о друга одинаковым образом и около каждого конца трубки поставьте по звучащему камертону, чтобы получить биения. При максимальной интенсивности звучания каждый камертон помогает воздуху идти туда, куда ему необходимо идти, чтобы резонировать, т. е. в тот момент, когда камертон на одном конце толкает воздух в трубку, камертон на другом конце делает то же самое, и т. д. В следующую половину цикла биений мы имеем минимум интенсивности звука, исходящего из трубки. (Этот минимум равен нулю, если амплитуда колебаний обоих камертонов одинакова.) Минимум образуется потому, что, когда один камертон толкает воздух внутрь трубки, камертон на другом конце вытягивает воздух из трубки. В этом случае действие камертонов противоположно действиям, необходимым для поддержания резонанса.

Смысл этого опыта в том, что трубка может «сказать», колеблются ли камертоны в фазе или в противофазе.

В случае переноса этого опыта на ваш слуховой аппарат вопрос ставится следующим образом: если поднести к каждому уху по камертону, то услышите ли вы биения? Сможет ли ваша звуковая система «сказать», что звук приходит из левой части комнаты; что звук приходит из правой части комнаты и т. д.? Такое чередование направлений должно соответствовать максимумам и минимумам биений. Если правильно утверждение, что направления распространения звука определяются по разности фаз, и если, например, колебания одной барабанной перепонки опережают другую на 90°, то мозг должен «сигнализировать», что звук приходит со стороны опережающей барабанной перепонки. В нашем опыте это направление должно меняться с частотой биений. Чтобы ответить на поставленный вопрос, проделайте описанный опыт.

**5.18.** Опыт. *Измерение разности фаз между двумя концами открытой трубки.* Положим, что у вас есть длинная трубка в виде шланга. Сверните ее и положите в коробку. Пусть один открытый конец трубки выходит из одного края коробки, а другой из другого. Вы не знаете, какая часть трубки (свернутой, как катушка) осталась в коробке (коробка закрыта). Добавив для настройки небольшой «тромбон» к высовывающемуся концу, вы обнаружите, что с помощью камертона С523,3 можно получить резонанс (т. е. можно заставить трубку резонировать). Это значит, что полная длина трубки равна $^1/_2\lambda$, или $\lambda$, или $^3/_2\lambda$, или... Как определить, равна ли длина трубки четному или нечетному числу $\lambda/2$? Расположите два вибрирующих камертона у одного конца трубки и слушайте биения. Поймайте ритм биений и качайте головой в такт ритму. Добейтесь того, что если вы уберете один камертон и затем вернете его на место (не нарушая непрерывных колебаний камертонов), то максимум биений не сместится во времени, т. е. ритм не нарушится. Поупражняйтесь несколько раз, чтобы в конце концов можно было, убрав один камертон, считать биения только по пойманному ритму. Затем, вновь поднеся камертон, убедитесь, что не сбились с ритма биений. (Для слежения за ритмом можно использовать метроном.) Теперь вместо того, чтобы поставить на место убранный (на мгновение) камертон, поставьте его около другого конца трубки и снова слушайте биения. (Все это время камертоны продолжают колебаться.) Будет ли ритм этих биений совпадать с ритмом старых биений? В зависимости от результата, полученного в этом опыте, можно решить, равна ли длина трубки четному или нечетному числу полуволн. Предскажите ответ; затем сделайте опыт с трубкой в полдлины волны. (Чтобы получить противоположный результат, сделайте опыт с трубкой, длина которой в два раза больше.)

**5.19.** Опыт. *Обертоны камертона.* Услышите ли камертон С523,3 звук только одной частоты 523,3 *гц*? Ударьте камертон посильнее. Кроме сильного тона в 523 *гц* вы услышите слабый высокий тон. Он исчезает за две-три секунды. Это — более высокая мода камертонных колебаний, которая сильнее затухает, так как определяется большим изгибом зубьев камертона.

Чтобы лучше услышать ноту С1046 (т. е. на октаву выше основного колебания), нужно иметь трубку, настроенную на 1046 *гц*. (Длина такой трубки по «теории» равна $\lambda/2$ плюс на каждом конце 0,6 длины радиуса трубки. Здесь $\lambda$ — длина волны для частоты 1046 *гц*.) Поместите камертон С523 у конца такой трубки и слушайте. (Для контроля имейте трубку, настроенную на 523 *гц*. Перемещайте камертон туда и обратно между трубками С523 и С1046.)

**5.20.** *Синусоидальная волна в общем случае.* Запишите бегущую волну $\psi(z, t)=A\cos(\omega t-kz)$ в виде суперпозиции двух стоячих волн, а стоячую волну $\psi(z, t)=A\cos\omega t\cos kz$ как суперпозицию двух волн, бегущих в противоположных направлениях. Рассмотрите следующую суперпозицию бегущих волн:

$$\psi(z,\ t)=A\cos(\omega t-kz)+RA\cos(\omega t+kz).$$

Покажите, что эта синусоидальная волна эквивалентна суперпозиции стоячих волн вида

$$\psi(z,\ t)=A(1+R)\cos\omega t\cos kz+A(1-R)\sin\omega t\sin kz.$$

Таким образом, одну и ту же волну можно представить как суперпозицию либо стоячих волн, либо бегущих волн.

**5.21.** *Неотражающее покрытие.* Стеклянная линза покрыта неотражающим слоем толщиной в четверть длины волны для света с длиной волны в вакууме $\lambda_0$. Показатель преломления покрытия равен $\sqrt{n}$; показатель преломления стекла $n$. Предположим, что показатель преломления постоянен, т. е. не зависит от частоты. Обозначим через $I_{отр}$ среднюю во времени интенсивность отраженного света, а через $I_0$ — интенсивность падающего света (при нормальном падении). Покажите, что интенсивность $I_{отр}$ следующим образом зависит от длины волны:

$$\frac{I_{отр}}{I_0}=4\left[\frac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right]^2\sin^2\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}-1\right),$$

где $\lambda$ — длина волны падающего света в вакууме. Пусть для стекла $n=1{,}5$ и $\lambda_0=5500$ Å (зеленый свет). В этом случае $I_{отр}$ равно нулю. Чему равно отношение $I_{отр}/I_0$ для синего света ($\lambda_0=4500$ Å)? Чему равно это отношение для красного света ($\lambda_0=6500$ Å)?

Ответ. Для красного света интенсивность отраженного света составляет $2\cdot10^{-3}$ интенсивности падающего; для голубого света она в два раза больше.

**5.22.** *Согласование импедансов с помощью плавного изменения показателя преломления.* Мы хотим согласовать оптические импедансы двух сред с показателями преломления $n_1$ и $n_2$, используя для согласования переходный слой толщиной $L$. Что представляет собой оптимальная зависимость показателя преломления $n$ от $z$ в этом слое? Будет ли она экспоненциальной? Почему нет?

Ответ. Длина волны $\lambda=(c/\nu)/n$ должна меняться линейно с $z$, т. е., если переходная область простирается от $z=0$ до $z=L$, $\lambda(z)=\lambda_1+(z/L)(\lambda_2-\lambda_1)$.

**5.23.** *Самая красивая кайма.* Посмотрите на концентрические интерференционные полосы от двух прижатых друг к другу предметных стекол микроскопа. Центр этой картины будет черным (т. е. от соответствующего места пластин не происходит отражения падающего излучения). Первая полоса белая. Далее полосы становятся цветными. Примерно после дюжины полос мы найдем, что все цвета смешались и перекрылись и мы опять получили белый свет. Какая полоса (грубо) выглядит наиболее монохроматичной? Более точно: назовем «самой красивой» полосой ту, которая «не красная и не синяя» (длина волны красного света 0,65 *мкм*, а синего — 0,45 *мкм*). Выражение «не красная и не синяя» означает, что для этой полосы, как для красного, так и для синего цвета, происходит деструктивная интерференция.

**5.24.** *Интерференция в тонких пленках.* Покажите, что при отражении монохроматического света (нормальное падение) от слоя воздуха толщиной $L$, находящегося между двумя предметными стеклами микроскопа, интенсивность отраженного света в приближении слабого отражения равна

$$\frac{I_{отр}}{I_0}\approx 4R_{12}^2\sin^2 k_2L.$$

(Интерференцией от двух внешних поверхностей обоих стекол можно пренебречь. Интерференционные полосы от этих поверхностей будут размыты для любого источника, за исключением, конечно, очень монохроматичного источника. Об этом мы говорили в опыте 5.10 «Полосы Фабри — Перо в оконном стекле».)

**5.25.** *Полосы Фабри — Перо в 1-миллиметровой стеклянной пластине.* Покажите, что для того, чтобы с помощью стеклянной пластины толщиной в 1 *мм* получить интерференционные полосы Фабри — Перо, «ширина линии» (т. е. полоса частот) должна быть меньше, чем 3 $см^{-1}$. При этом условии полосы не будут размываться.

**5.26.** *Многократное отражение.* В приведенных ниже выкладках следует использовать комплексные числа. Пусть $\psi_{пад}$ равно вещественной части выражения $Ae^{i\omega t}\exp[i(\omega t-kz)]$, где $A$ — вещественное число. Таким образом, $\psi_{пад}=A\cos(\omega t-kz)$. При $z=0$ импеданс изменяется скачком от $Z_1$ до $Z_2$. При $z=L$ импеданс опять меняется от $Z_2$ до $Z_3$. Имеем $R_{12}=(Z_1-Z_2)/(Z_1+Z_3)=-R_{21}$, $R_{23}=(Z_2-Z_3)/(Z_2+Z_3)$. Предположим, что в среде 1 имеется отраженная волна, определяемая вещественной частью $RA\exp[i(\omega t+kz)]$, где $R$ — комплексная величина, которую можно представить в виде $R=|R|\exp(-i\delta)$.

а) Покажите, что если пренебречь всеми вкладами, кроме отражения от $z=0$ и первого отражения от $z=L$, то

$$R=R_{12}+T_{12}R_{23}T_{21}e^{-2ik_2L},$$

где $T_{12}=1+R_{12}$ и $T_{21}=1+R_{21}=1-R_{12}$.

б) При помощи суммирования бесконечного ряда, определяемого бесконечным числом отражений, покажите, что точное решение для $R$ имеет вид

$$R=R_{12}+\frac{(1-R_{12}^2)R_{23}e^{-2ik_2L}}{1-R_{23}R_{21}e^{-2ik_2L}},$$

где первый член $R_{12}$ обусловлен разрывом непрерывности в $z=0$, а второй член определяется отражением (однократным или многократным) от границы $z=L$. Покажите, что в приближении слабого отражения из этой формулы получается результат а). Покажите, что точный результат может быть записан в виде

$$R=\frac{R_{12}+R_{23}e^{-2ik_2L}}{1+R_{12}R_{23}e^{-2ik_2L}}.$$

Покажите, что это точное выражение для $R$ стремится к выражению, полученному для $R$ в приближении слабого отражения, использованном в п. 5.5. Таким образом, приближенное выражение правильно определяет нули интенсивности и не совсем точно — интенсивность в максимуме.

**5.27.** *Метод граничных условий для коэффициентов отражения и прохождения.* Рассмотрим совершенно другое решение задачи 5.26. Вместо суммирования бесконечного числа многократно отраженных лучей сделаем следующее допущение: каждый «луч» из суперпозиции многократно отраженных лучей непрерывен. Поэтому сама суперпозиция также непрерывна. Это предположение является основой метода. Таким образом, мы больше не станем заниматься суммированием многократных отражений. Вместо этого мы записываем функцию $\psi(z, t)$ в трех областях: 1 ($z<0$), 2 ($0<z<L$) и 3 ($z>L$) — и считаем, что эта функция определяется вещественной частью следующих выражений:

$$\psi_1(z,\ t)=e^{i(\omega t-k_1z)}+Re^{i(\omega t+k_1z)},$$
$$\psi_2(z,\ t)=Fe^{i(\omega t-k_2z)}+Be^{i(\omega t+k_2z)},$$
$$\psi_3(z,\ t)=Te^{i[\omega t-k_3(z-L)]},$$

где $R$, $F$, $B$ и $T$ — комплексные коэффициенты, которые нужно определить. Коэффициент $R$ характеризует отраженную волну, $F$ — волну, распространяющуюся

вперед, и $B$ — назад, а коэффициент $T$ — прошедшую в третью среду волну. (Для простоты амплитуду падающей волны мы полагаем равной единице). Заметим, что член с комплексной амплитудой $F$ соответствует суперпозиции всех многократно отраженных лучей между $z=0$ и $z=L$, которые идут в момент времени $t$ в прямом направлении. Аналогично, член с комплексной амплитудой $B$ равен суперпозиции всех лучей, идущих в обратном направлении. На двух границах $z=0$ и $z=L$ следует использовать граничные условия непрерывности. Положим, что $\psi(z, t)$ и $\partial\psi(z, t)/\partial z$ непрерывны на границах. (Это значит, что натяжение струны постоянно, или, в случае звуковых волн, произведение равновесного давления $p_0$ на $\gamma$ постоянно, или постоянна магнитная проницаемость $\mu$ в случае электромагнитных волн.) Два эти граничных условия для двух границ дадут четыре линейных уравнения относительно четырех комплексных величин $T$, $F$, $B$ и $R$. Этих уравнений достаточно, чтобы однозначно определить $T$, $F$, $B$ и $R$. Подтвердите это. Найдите $T$, $F$, $B$ и $R$.

Покажите, что выражение для $R$, полученное этим способом, аналогично выражению, полученному способом многократного отражения в задаче 5.26.

**5.28.** *Резонанс для проходящих волн.*

а) Покажите, что при отражении на двух границах (задачи 5.26 и 5.27) часть среднего во времени потока энергии, которая не отразилась, равна

$$1-|R|^2=\frac{1-R_{12}^2-R_{23}^2+R_{12}^2R_{23}^2}{1+2R_{12}R_{23}\cos 2k_2L+R_{12}^2R_{23}^2}.$$

б) Покажите, что если импеданс среды 3 равен импедансу среды 1, это выражение принимает вид

$$1-|R|^2=\frac{(1-R_{12}^2)^2}{1-2R_{12}^2\cos 2k_2L+R_{12}^4}.$$

в) Покажите, что при некоторых значениях $k_2L$ средний во времени поток неотраженной энергии равен единице, т. е. для этих значений вся энергия проходит без отражения. Обозначим одно из этих резонансных значений $k_2$ через $k_0$. Покажите, что резонансные значения $k_2L$ равны $k_0L=\pi$, $2\pi$, $3\pi$ и т. д.

г) Покажите, что для $k_2$, достаточно близкого к резонансному значению $k_0$, средний во времени поток энергии равен

$$1-|R|^2\approx\frac{(1-R_{12}^2)^2}{(1-R_{12}^2)^2+R_{12}^2[2L(k_2-k_0)]^2}.$$

Покажите, что это выражение соответствует резонансной кривой Брейта — Вигнера, рассмотренной в п.3.2, и имеет полную ширину по $\Delta k_2$ на половинном уровне пропущенной интенсивности, равную

$$(\Delta k_2)L\approx\frac{(1-R_{12}^2)}{|R_{12}|},$$

при условии, что $|R_{12}|$ намного меньше единицы. (Покажите, что для $|R_{12}|\ll 1$ приближение Брейта — Вигнера бесполезно, так как оно не выполняется, за исключением значений $k$, очень близких к $k_0$, т. е. оно не выполняется даже для точек, определяемых по половине максимальной пропущенной мощности.) Покажите, что для $|R_{12}|\approx 1$, когда резонансная кривая Брейта — Вигнера справедлива для многих $k$, отличных от $k_0$, полная резонансная ширина равна

$$(\Delta k_2)L\approx 2(1-|R_{12}|).$$

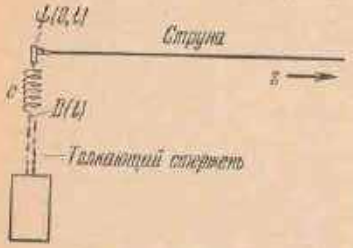


Рис. к задаче 5.29.

**5.29.** Полубесконечная струна присоединена к выходным зажимам передатчика через пружину, как показано на рисунке. Натяжение пружины равно $T$, плотность струны $\rho$ и коэффициент жесткости пружины $K$. Длина пружины такова, что если смещение возмущающего стержня $D(t)$ равно нулю и пружина расслаблена, то $\psi(0, t)$ равно нулю. Движение стержня определяется выражением $D(t)=A\cos\omega t$. Предположим, что по струне бежит гармоническая волна $\psi(z, t)=B\cos(\omega t-kz+\varphi)$. Укажите граничные условия в точке $z=0$ и используйте их для нахождения $B/A$ и $\varphi$. (Совет. Выкладки упростятся при использовании комплексных чисел.)

Ответ. $\operatorname{tg}\varphi=-\omega(T\rho)^{1/2}/K$, $B/A=[1+(\omega^2T\rho/K^2)]^{-1/2}=\cos\varphi$. Заметим, что для очень большого $K$ имеем $\psi(0, t)=D(t)$, как и следовало ожидать. Почему?

**5.30.** Предположим, что точка $a$ струны, имеющая координату $z_a=10$ *см*, совершает гармоническое колебание с частотой 10 *гц* и амплитудой 1 *см*. Фаза колебаний такова, что в момент времени $t=0$ точка проходит положение равновесия со скоростью, направленной вверх (положительное смещение отсчитывается вверх).

а) Чему равна величина и какое направление имеет скорость в точке $a$ в момент $t=0{,}05$ *сек*? Параметры струны (масса на единицу длины и натяжение) таковы, что скорость волны равна 100 *см/сек*.

б) Чему равна длина бегущей волны? Чему равна длина стоячей волны?

в) Другая точка $b$ с координатой $z_b=15$ *см* колеблется с той же амплитудой, что и точка $a$, но сдвинута относительно нее по фазе на 180°. Можете ли вы сказать, какую из трех волн мы имеем: «чистую» бегущую волну, «чистую» стоячую волну или же их комбинацию?

г) Третья точка $c$ ($z_c=12{,}5$ *см*) колеблется с той же амплитудой, что и точка с координатой $z_a=10$ *см*, но со сдвигом по фазе в 180°. Точка колеблется по-прежнему. Теперь скажите, является ли волна бегущей, стоячей или комбинацией этих волн.

**5.31.** Опыт. *Резонансы в надувных шарах.* Возьмите шар, наполненный гелием. Поднесите его к уху и легко ударьте. Спойте какую-либо ноту с одной стороны шара и слушайте резонансные тона. Надуйте другой шар воздухом до того же диаметра (что и шар с гелием) и ударьте его. Оцените отношение частот для самых низких мод (это те моды, которые вы слышите после удара) при наполнении шаров гелием и воздухом. Какое отношение частот вы могли бы предсказать? Сравните силу (громкость) резонанса, который имеет место, когда вы поете рядом с шаром с гелием и рядом с воздушным шаром. Как объяснить такое различие?

**5.32.** *Нагрузка для волн в струне.*

а) Допустим, у нас есть невесомый амортизатор с двумя движущимися элементами 1 и 2, способными смещаться относительно друг друга вдоль направления $x$, перпендикулярного направлению струны $z$. Трение создается жидкостью, которая тормозит движущиеся элементы. Это трение таково, что сила, необходимая для поддержания постоянной относительной скорости $(\dot{x}_1-\dot{x}_2)$ движущихся элементов, равна $Z_d(\dot{x}_1-\dot{x}_2)$, где $Z_d$ — импеданс поршня. Вход (элемент 1) подсоединен к концу струны с импедансом $Z_1$, простирающейся от $z=-\infty$ до $z=0$. Выход (элемент 2) подсоединен к струне с импедансом $Z_2$, простирающейся до $z=+\infty$. Покажите, что волна, падающая слева, «чувствует» импеданс в $z=0$ такой же, как если бы она была подсоединена к струне, простирающейся от $z=0$ до $z=+\infty$, с импедансом $Z_L$, равным

$$z_L=\frac{Z_dZ_2}{Z_d+Z_2}\quad\text{т. е.}\quad\frac{1}{Z_L}=\frac{1}{Z_d}+\frac{1}{Z_2}.$$

Таким образом, этот импеданс соответствует параллельному соединению импедансов поршня и второй струны.

б) Покажите, что если струна $Z_2$ простирается только до $z=\frac{1}{4}\lambda_2$, где $\lambda_2$ — длина волны в среде 2 (предполагаем, что имеем дело с гармонической волной), и если в $z=\frac{1}{4}\lambda_2$ она нагружена на поршень с нулевым импедансом, то падающая волна имеет в $z=0$ согласованную нагрузку.

Покажите, что выходные зажимы поршня в $z=0$ «не могут знать», подсоединены ли они к струне с бесконечным импедансом или же к струне длиной в четверть волны, которая «коротко замкнута» в $z=\frac{1}{4}\lambda_2$ на поршень без трения. В том и другом случае выходные зажимы остаются в покое.

**5.33.** *Акустические свойства помещений.* Акустические свойства комнаты определяются главным образом «временем реверберации» и его зависимостью от частоты. Предположим, что в комнате поддерживаются установившиеся вынужденные

колебания воздуха определенной частоты. Затем вынуждающая сила (в качестве которой может служить возбуждаемая органная трубка) неожиданно выключается. Запасенная звуковая энергия будет спадать примерно по экспоненте со средней постоянной времени $\tau$, определяемой по формуле

$$\frac{1}{\tau}=\frac{1}{E_{\text{зап}}}\frac{dE_{\text{потер}}}{dt}.$$

Нам известно, что одномерный гармонический осциллятор ведет себя аналогичным образом, т. е. «поведение» комнаты можно сравнить с поведением одномерного осциллятора. Обозначим через $\rho_E$ плотность звуковой энергии, а через $V$ объем комнаты. Чему равна запасенная энергия? Для плоской бегущей волны поток энергии [в *эрг/(см²·сек)*] равен плотности энергии, умноженной на скорость звука $v=332$ *м/сек*. Звуковые волны в комнате не являются бегущими волнами, но их можно рассматривать как суперпозицию бегущих волн, распространяющихся во всех направлениях. Можно считать, что одна шестая часть энергии распространяется в каждом из шести направлений, т. е. вдоль направлений $\pm x$, $\pm y$ и $\pm z$.

Поток энергии, распространяющийся в направлении $+x$, встречает на своем пути открытое окно и теряется. Поэтому говорят, что открытое окно имеет коэффициент поглощения $a=1{,}0$. Стены (потолок и пол) имеют полную площадь $A$, которую можно рассматривать как сумму площадей $A_1$, $A_2$ и т. д., каждой из которых соответствует коэффициент поглощения $a_1$, $a_2$ и т. д. Введем следующее приближенное выражение для постоянной времени:

$$\tau\sum(A_i a_i)\approx\frac{6V}{v},$$

где сумма берется по всей поверхности комнаты. Воспользуемся приведенной табл. 5.1 для коэффициентов поглощения.

Таблица 5.1

**Коэффициенты поглощения $a_i$ для частоты $\nu=512$ *гц***

| | | | |
|---|---|---|---|
| Открытое окно | 1,00 | Человек | 0,44 |
| Ковер | 0,20 | Дерево | 0,061 |
| Линолеум | 0,12 | Штукатурка | 0,033 |
| Войлок толщиной в 1 дюйм | 0,78 | Стекло | 0,027 |

В 1895 г. Уоллеса Сабина попросили «что-нибудь» сделать с ужасными акустическими свойствами лекционного зала в Гарвардском музее искусств, который был только что построен. Вычислите, насколько плох был этот зал (т. е. какова была продолжительность звучания $\tau$), пользуясь следующей информацией (W. C. Sabine, Collected Papers on Acoustics, p. 30, Dover, 1964): $V=2740$ *м*³; форма зала примерно кубическая; стены и потолок оштукатурены, пол деревянный. Считайте также, что время звучания (т. е. время, в течение которого слышится звук после выключения источника) равно примерно четырем $\tau$. Сабин в качестве детектора использовал человеческое ухо. Полученное им экспериментальное значение времени звучания равно 5,61 *сек*. С помощью различных поглощающих материалов он уменьшил его до 0,75 *сек*.

ГЛАВА 6

# МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ, ИМПУЛЬСЫ И ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ

## 6.1. Введение

До сих пор мы рассматривали главным образом волны и колебания, представляемые гармонической зависимостью от времени вида $\cos(\omega t+\varphi)$, с определенной частотой $\omega$. Исключением были биения, рассмотренные в п. 1.5. Мы нашли, что суперпозиция двух гармонических колебаний с близкими, но не равными частотами приводит к очень интересному явлению биений. В этой главе изучение биений будет продолжено. Мы будем рассматривать биения в пространстве и во времени, причем биения будут результатом сложения многих колебаний с различными частотами. Мы рассмотрим также распространение биений (или модулированных колебаний в случае, когда биения созданы более чем двумя гармоническими колебаниями) в виде бегущих волн и увидим, что модулированные колебания, распространяясь в виде *волновых групп* или *волновых пакетов*, переносят энергию и перемещаются с *групповой скоростью*.

Лучший способ приобрести некоторый опыт в изучении волновых групп заключается в наблюдении за волнами на поверхности воды, возникающими при бросании камешков, или за волнами в тарелке, возбуждаемыми падающими каплями воды. Очевидно, что эти распространяющиеся круговые волновые пакеты переносят энергию. Они, например, заставляют качаться плавающую пробку. Если присмотреться внимательно, то можно заметить, что маленькие гребни, образующие волновую группу, не сохраняют свое положение относительно всей распространяющейся группы. Для длин волн на поверхности воды, больших нескольких сантиметров, маленькие гребни движутся почти вдвое скорее всей группы. Они «рождаются» позади волнового пакета, проходят через его фронт и замирают, двигаясь с фазовой скоростью. Волновой пакет как целое перемещается с групповой скоростью.

Мы настоятельно рекомендуем читателю понаблюдать за распространением волновых групп на поверхности воды. Особенно хорошо это можно сделать на пруду, где при некотором навыке можно наблюдать прохождение отдельных гребней через группу.

## 6.2. Групповая скорость

В главе 4 мы рассмотрели несколько примеров, из которых следует, что скорость распространения информации или энергии в бегущей волне не обязательно совпадает с фазовой скоростью синусоидальной бегущей волны. Например, было показано, что фазовая скорость света в ионосфере больше скорости света $c$. Однако если бы сигналы распространялись со скоростями бóльшими, чем $c$, то теория относительности была бы неверна.

*Передача информации с помощью модуляции.* Гармоническое колебание определенной частоты и амплитуды не может нести информацию о сигнале, поскольку каждый последующий цикл колебаний является точной копией предыдущего. Чтобы передать определенную информацию с такой волной, ее нужно *промодулировать*, т. е. изменить какой-то параметр волны в соответствии с изменением смыслового сигнала. В бегущей волне такими изменяемыми параметрами могут быть амплитуда, частота и фаза. Соответственно различают *амплитудную*, *частотную* и *фазовую модуляцию*.

Чтобы понять, как распространяется сигнал, рассмотрим бегущую волну, которая образуется передатчиком, расположенным в точке $z=0$. Смещение на выходе передатчика не будет больше иметь простую гармоническую форму $D(t)=A\cos\omega t$, а определяется более сложной временной зависимостью $D(t)=f(t)$. Оказывается, что широкий класс функций $f(t)$ может быть представлен линейной суперпозицией функций вида $A(\omega)\cos[\omega t+\varphi(\omega)]$, где амплитуда $A(\omega)$ и фаза $\varphi(\omega)$ зависят от частоты. Несколько позже мы увидим, как определить $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ с помощью фурье-анализа. Сперва рассмотрим простой случай, когда смещение $f(t)$ представляет собой сумму всего лишь двух колебаний. Мы получим при этом ряд интересных результатов, которые в конце концов позволят понять, как происходит распространение волновой группы или импульса в диспергирующей среде (т. е. в среде, где фазовая скорость зависит от длины волны).

*Амплитудно-модулированное колебание как сумма двух гармонических колебаний.* Предположим, что в точке $z=0$ передатчик воздействует на струну, простирающуюся от $z=0$ до $+\infty$. Пусть колебания генератора являются суперпозицией двух гармонических колебаний с угловыми частотами $\omega_1$ и $\omega_2$. Не нарушая общности результата, можно считать, что амплитуды и фазы этих колебаний равны. Итак, смещение на выходе передатчика имеет вид

$$D(t)=A\cos\omega_1 t+A\cos\omega_2 t. \tag{1}$$

Мы знаем из рассмотрения биений [см. п. 1.5, уравнения (1.80) — (1.85)], что такая суперпозиция может быть записана в виде *амплитудно-модулированного колебания*:

$$D(t)=A_{\text{мод}}(t)\cos\omega_{\text{ср}}t, \tag{2}$$

где

$$A_{\text{мод}}(t)=2A\cos\omega_{\text{мод}}(t) \tag{3}$$





$$\omega_{\text{мод}}={}^1\!/_2(\omega_1-\omega_2),\quad \omega_{\text{ср}}={}^1\!/_2(\omega_1+\omega_2). \tag{4}$$

Если $\omega_1$ и $\omega_2$ мало отличаются друг от друга, то частота модуляции $\omega_{\text{мод}}$ мала по сравнению со средней частотой $\omega_{\text{ср}}$. В этом случае уравнение (2) соответствует *почти гармоническому колебанию* с частотой $\omega_{\text{ср}}$ и почти постоянной амплитудой.

Выражения (2) и (3) дают пример простейшей амплитудной модуляции, в которой участвует единственная частота модуляции $\omega_{\text{мод}}$. В общем случае амплитудно-модулированное колебание может быть представлено выражением (2), в котором $A_{\text{мод}}(t)$ является суперпозицией большого числа членов, подобных выражению (3), каждый из которых имеет собственную частоту модуляции, амплитуду и фазу. Например, в случае амплитудной модуляции радиоволн за $\nu_{\text{ср}}$ можно взять 1000 *кгц* (частоту $\nu_{\text{ср}}$ часто называют «несущей» частотой). Модуляционные частоты для передачи звука должны лежать в слышимом звуковом диапазоне, т. е. от 20 *гц* до 20 *кгц*.

*Суперпозиция двух синусоидальных бегущих волн образует амплитудно-модулированную бегущую волну.* Рассмотрим бегущие волны, испускаемые передатчиком. Пусть временна́я зависимость «смещения» на выходе передатчика определяется выражением (1) или равносильным ему выражением (2). Среда, в которую испускаются волны, связана с передатчиком так, что при $z=0$ $\psi(z,\ t)$ равно

$$\psi(0,\ t)=D(t)=A\cos\omega_1 t+A\cos\omega_2 t. \tag{5}$$

Таким образом, на выходе передатчика генерируются две бегущие волны и для любого $z$ в направлении распространения этих волн результирующую волну можно представить как их суперпозицию, т. е. справедливо выражение

$$\psi(z,\ t)=A\cos(\omega_1 t-k_1 z)+A\cos(\omega_2 t-k_2 z). \tag{6}$$

Выражение (6) получается из (5) заменой $\omega_1 t$ на $(\omega_1 t-k_1 z)$ и $\omega_2 t$ на $(\omega_2 t-k_2 z)$. Производя такую замену в выражениях (2), (3) и (4), мы получим выражение для *почти синусоидальной амплитудно-модулированной бегущей волны*:

$$\psi(z,\ t)=A_{\text{мод}}(z,\ t)\cos(\omega_{\text{ср}}t-k_{\text{ср}}z), \tag{7}$$

где

$$A_{\text{мод}}(z,\ t)=2A\cos(\omega_{\text{мод}}t-k_{\text{мод}}z) \tag{8}$$

и

$$\omega_{\text{мод}}={}^1\!/_2(\omega_1-\omega_2),\quad k_{\text{мод}}={}^1\!/_2(k_1-k_2), \tag{9}$$

$$\omega_{\text{ср}}={}^1\!/_2(\omega_1+\omega_2),\quad k_{\text{ср}}={}^1\!/_2(k_1+k_2). \tag{10}$$

*Скорость распространения модуляции.* Постараемся ответить на вопрос: с какой скоростью распространяется модуляция? Предположим, что $\omega_{\text{мод}}$ мало по сравнению с $\omega_{\text{ср}}$. В этом случае на выходе передатчика ($z=0$) амплитудно-модулированные колебания имеют форму, показанную на рис. 1.13, п. 1.5. Наш вопрос сводится

к нахождению скорости распространения максимума модулированной волны [т. е. точки, где $A_{мод}(z, t)=2A$]. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим уравнение (8). Очевидно, что для постоянства амплитуды $A_{мод}(z, t)$, например, для сохранения ее максимального значения, необходимо, чтобы аргумент $\omega_{мод}t - k_{мод}z$ оставался постоянным. Таким образом, изменение в этом аргументе, вызываемое приращениями $dt$ и $dz$, должно равняться нулю, т. е.

$$\omega_{мод}\,dt - k_{мод}\,dz = 0. \tag{11}$$

Это условие удовлетворяется, если *скорость перемещения модулированного колебания* равна

$$\frac{dz}{dt} = v_{мод} = \frac{\omega_{мод}}{k_{мод}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}. \tag{12}$$

Теперь вспомним, что $\omega$ и $k$ связаны дисперсионным соотношением

$$\omega = \omega(k). \tag{13}$$

Это соотношение однозначно определяет $\omega$, если выбрано $k$, т. е.

$$\omega_1 = \omega(k_1), \quad \omega_2 = \omega(k_2). \tag{14}$$

Поэтому скорость распространения модуляции, определяемая уравнением (12), может быть представлена [с помощью разложения $\omega(k)$ в ряд Тейлора в точке $k=k_{ср}$] в таком виде:

$$v_{мод} = \frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{k_1 - k_2} = \frac{d\omega}{dk} + \ldots, \tag{15}$$

где производные берутся в точке $k=k_{ср}$.

*Групповая скорость.* Для большинства интересующих нас случаев $\omega_1$ и $\omega_2$ в уравнении (12) отличаются ненамного. Поэтому в выражении (15) для скорости мы можем пренебречь всеми членами, кроме первого. Величина $d\omega/dk$, вычисленная для некоторого среднего $k$, называется *групповой скоростью*:

$$\text{Групповая скорость} \equiv v_{гр} = \frac{d\omega}{dk}. \tag{16}$$

Таким образом, скорость распространения «сигнала», образованного максимальной амплитудой (т. е. гребнем волны), равна не фазовой скорости $v_{ср}=\omega_{ср}/k_{ср}$, а групповой скорости $v_{гр}=d\omega/dk$.

На рис. 6.1 показано распространение бегущей волны $\psi(z, t)$, определяемой выражениями (7) или (6). Эта волна имеет следующие параметры: $\omega_{ср}=8\omega_{мод}$, и групповая скорость $d\omega/dk$ (оцененная для средней частоты) равна половине фазовой скорости $\omega_{ср}/k_{ср}$.

Приведем менее длинный вывод для скорости распространения модуляции. Разность фаз волн 1 и 2, входящих в суперпозицию



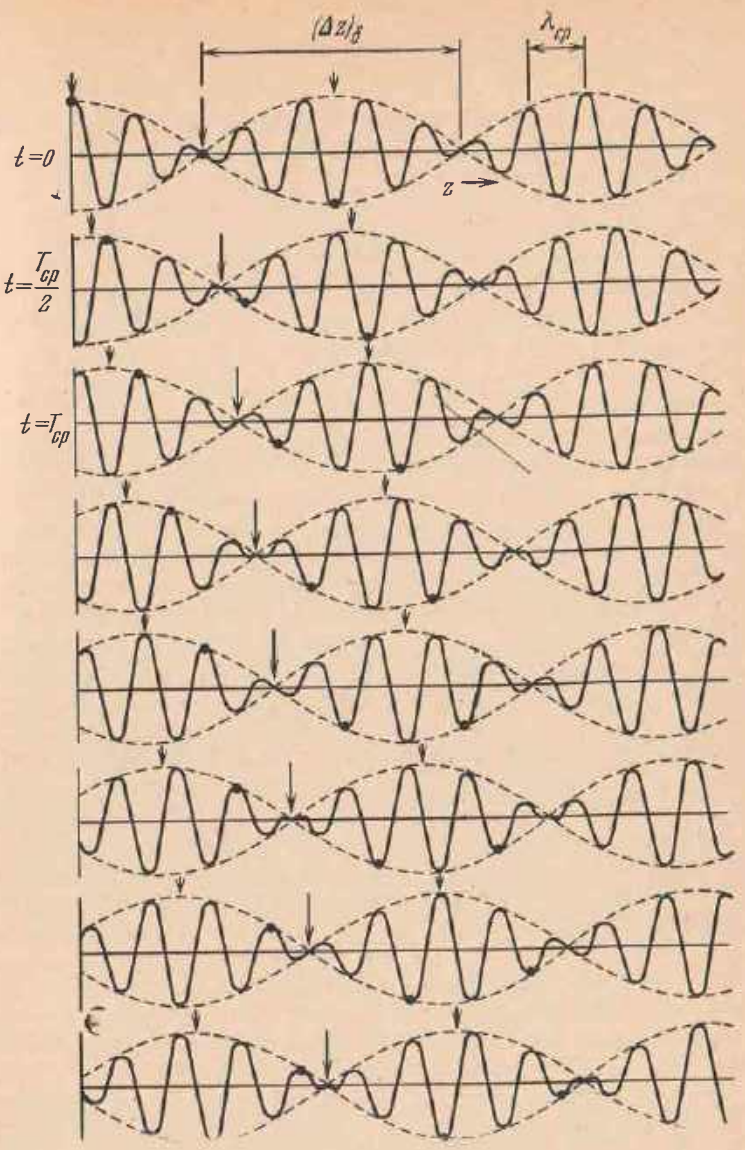



Рис. 6.1. Групповая скорость.
Стрелками показаны места биений, распространяющихся с групповой скоростью $v_{гр}$. Черными кружками показаны отдельные волновые гребни, которые распространяются со средней фазовой скоростью $v_{ср}$.

(6), равна

$$\varphi_1(z, t) - \varphi_2(z, t) = (\omega_1 t - k_1 z + \varphi_1) - (\omega_2 t - k_2 z + \varphi_2) = \\ = (\omega_1 - \omega_2)\, t - (k_1 - k_2)\, z + (\varphi_1 - \varphi_2).$$

При некоторых значениях $\varphi_1(z, t)$ и $\varphi_2(z, t)$ обе волны находятся в фазе и их интерференция дает максимум, при других значениях $\varphi_1(z, t)$ и $\varphi_2(z, t)$ волны будут в противофазе и амплитуда модулированного колебания будет равна нулю. Очевидно, что если мы будем двигаться со скоростью, при которой разность фаз $\varphi_1(z, t) - \varphi_2(z, t)$ остается постоянной, то эта скорость и будет скоростью распространения модулированного колебания, т. е. групповой скоростью. Поэтому, приравняв нулю полный дифференциал приведенного выше выражения, получим

$$(\omega_1 - \omega_2)\, dt - (k_1 - k_2)\, dz = 0.$$

Определяемая из этого выражения скорость $dz/dt$ совпадает с уравнением (12).

Пример 1. *Радиоволны с амплитудной модуляцией (АМ-радиоволны).* Рассмотрим простой пример бегущей волны, которую можно считать либо почти гармонической амплитудно-модулированной бегущей волной с медленно изменяющейся амплитудой $A_{\text{мод}}(z, t)$ и большой несущей частотой $\omega_{\text{ср}}$, либо суперпозицией двух гармонических бегущих волн с двумя различными частотами $\omega_1$ и $\omega_2$. Амплитуда модуляции $A_{\text{мод}}(z, t)$ может считаться «почти постоянной» в пределах одного периода колебаний высокой частоты. Величина $A_{\text{мод}}(z, t)$ изменяется синусоидально во времени (для заданного $z$) с частотой модуляции $\omega_{\text{мод}}$ и синусоидально в пространстве (для фиксированного $t$), имея модуляционное волновое число $k_{\text{мод}}$. Мы нашли, что суперпозиция двух гармонических бегущих волн эквивалентна амплитудно-модулированной бегущей волне с частотой модуляции $\omega_{\text{мод}}$. Мы могли бы начать с рассмотрения бегущей волны, определяемой выражением (2), и пришли бы к выводу, что она состоит из суперпозиции двух гармонических колебаний.

Чтобы описать амплитудно-модулированные колебания, посылаемые радиопередатчиком, следует учесть, что здесь мы имеем дело не с единственной частотой модуляции, а с целым диапазоном таких частот. Ток в антенне представляет собой почти гармоническое колебание со средней частотой $\omega_{\text{ср}}$, которая, как уже отмечалось, называется *несущей частотой*. (У широковещательных радиостанций с АМ каждой станции соответствует своя несущая частота, лежащая в диапазоне от 500 до 1600 *кгц*.) Амплитуда напряжения на выходных зажимах передатчика не постоянна. Она является амплитудой модуляции, которая может быть выражена с помощью ряда

$$A_{\text{мод}}(t) = A_0 + \sum_{\omega_{\text{мод}}} A(\omega_{\text{мод}}) \cos[\omega_{\text{мод}} t + \varphi(\omega_{\text{мод}})]. \qquad (17)$$



Величина $A_{\text{мод}}(t) - A_0$ пропорциональна давлению в звуковой волне и представляет собой передаваемую информацию. (Микрофон преобразует мгновенные значения звукового давления воздуха в электрическое напряжение.) Величина $A_0$ дает некоторый вклад в выражение (17), который существует постоянно, независимо от того, говорят ли в микрофон. Остальные члены разложения (17) соответствуют звуковым волнам, регистрируемым микрофоном. Частоты модуляции представляют собой, таким образом, частоты звуковых волн, лежащие в слышимом диапазоне от 20 до 20 000 *гц*. Они малы по сравнению с несущей частотой. Приложенное к антенне напряжение $V(t)$ будет поэтому почти гармоническим колебанием с частотой $\omega_{\text{ср}}$:

$$V(t) = A_{\text{мод}}(t) \cos \omega_{\text{ср}} t = \\ = A_0 \cos \omega_{\text{ср}} t + \sum_{\omega_{\text{мод}}} A(\omega_{\text{мод}}) \cos[\omega_{\text{мод}} t + \varphi(\omega_{\text{мод}})] \cos \omega_{\text{ср}} t. \qquad (18)$$

Это выражение может быть записано как *суперпозиция строго гармонических колебаний*:

$$V(t) = A_0 \cos \omega_{\text{ср}} t + \sum \tfrac{1}{2} A(\omega_{\text{мод}}) \cos[(\omega_{\text{ср}} + \omega_{\text{мод}})\, t + \varphi(\omega_{\text{мод}})] + \\ + \sum \tfrac{1}{2} A(\omega_{\text{мод}}) \cos[(\omega_{\text{ср}} - \omega_{\text{мод}})\, t - \varphi(\omega_{\text{мод}})]. \qquad (19)$$

*Боковые полосы.* Таким образом, модулированное по амплитуде напряжение $V(t)$ является суперпозицией гармонических колебаний, состоящих из колебания с частотой $\omega_{\text{ср}}$ (*несущая частота*) и многих гармонических колебаний с частотами $\omega_{\text{ср}} + \omega_{\text{мод}}$ (*верхняя полоса частот*) и $\omega_{\text{ср}} - \omega_{\text{мод}}$ (*нижняя полоса частот*). Для того чтобы излучаемые бегущие волны передавали информацию о звуке в области частот от 0 до 20 *кгц*, необходимо, чтобы напряжение $V(t)$ было представлено суперпозицией гармонических компонент с угловыми частотами $\omega$ в частотном диапазоне от самой низкой частоты, присутствующей в нижней боковой полосе, до самой верхней частоты в верхней боковой полосе. Таким образом, излучаемые *частоты занимают диапазон*

$$\omega_{\text{ср}} - \omega_{\text{мод}}(\text{макс}) \leqslant \omega \leqslant \omega_{\text{ср}} + \omega_{\text{мод}}(\text{макс}), \qquad (20)$$

т. е.

$$\nu_{\text{ср}} - \nu_{\text{мод}}(\text{макс}) \leqslant \nu \leqslant \nu_{\text{ср}} + \nu_{\text{мод}}(\text{макс}). \qquad (21)$$

*Ширина полосы частот. Шириной полосы частот* называется разность между максимальной и минимальной частотами:

$$\text{Полоса частот} \equiv \Delta\nu = \nu(\text{макс}) - \nu(\text{мин}) = 2\nu_{\text{мод}}(\text{макс}). \qquad (22)$$

Таким образом, для передачи несущей и двух боковых полос, занимающих весь звуковой частотный диапазон, необходима ширина полосы вдвое большая, чем 20 *кгц*, т. е. 40 *кгц*. (Коммерческим радиостанциям, работающим с амплитудной модуляцией, предоставляется диапазон частот шириной 10 *кгц*. Этого диапазона вполне

хватает для передачи речи и музыки. Вспомним, что частота самой высокой ноты рояля близка к 4,2 *кгц*.)

*«Музыка» распространяется с групповой скоростью.* Вынуждающая сила $V(t)$, представленная выражениями (18) или (19), приводит к испусканию электромагнитных бегущих волн, которые можно считать суперпозицией гармонических компонент, занимающих полосу частот $\Delta\omega$. В центре полосы находится частота $\omega_{ср}$. Эти волны могут быть также представлены как почти гармоническая бегущая волна, имеющая частоту «быстрых» колебаний $\omega_{ср}$, равную несущей частоте, и «почти постоянную» медленно меняющуюся амплитуду $A_{мод}(z, t)$, представляющую собой суперпозицию членов типа (8). [В примере, к которому относится выражение (8), присутствуют только два гармонических колебания и верхняя боковая полоса состоит всего лишь из одной частоты $\omega_1 = \omega_{ср} + \omega_{мод}$, а нижняя боковая полоса — также из единственной частоты $\omega_2 = \omega_{ср} - \omega_{мод}$.] Модуляция распространяется в среде (воздух, ионосфера, ...) с определенной скоростью. В случае радиостанции с амплитудной модуляцией, работающей, например, на несущей частоте 1000 *кгц* и с шириной полосы 10 *кгц*, частотный диапазон простирается от 995 до 1005 *кгц*. Так как ширина этой полосы частот мала по сравнению с несущей частотой (средней частотой), то можно пренебречь членами высокого порядка в разложении в ряд Тейлора [уравнение (15)]. В этом случае групповая скорость, определяемая уравнением (16), будет равна скорости распространения модулированных колебаний.

Частотная и фазовая модуляции и другие близкие проблемы рассмотрены в задачах 6.27—6.32. (Существует еще один важный вид модуляции — *импульсно-кодовая модуляция* *).)

Рассмотрим несколько физических примеров групповой скорости. В случае бегущих электромагнитных волн мы не ограничимся частотами радиостанций с АМ ($\nu \sim 10^6$ *гц*), а рассмотрим также видимый свет ($\nu \sim 10^{15}$ *гц*), микроволны ($\sim 10^{10}$ *гц*) и другие частоты.

Пример 2. *Электромагнитное излучение в вакууме.* Дисперсионное соотношение в этом случае имеет вид

$$\omega = ck. \tag{23}$$

Фазовая и групповая скорости равны

$$v_ф = \frac{\omega}{k} = c, \quad v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = c. \tag{24}$$

Таким образом, для электромагнитного излучения в вакууме фазовая и групповая скорости равны скорости света $c$.

Пример 3. *Другие недиспергирующие волны.* Волны света в вакууме не испытывают дисперсии: их фазовая скорость не зависит от частоты (или волнового числа). В таких случаях групповая скорость равна фазовой скорости. В общем случае имеем

$$\omega = v_ф k, \tag{25}$$

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = v_ф + k\frac{dv_ф}{dk}. \tag{26}$$

Если производная $dv_ф/dk$ равна нулю, то групповая скорость равна фазовой. Другими примерами недиспергирующих волн могут служить слышимые звуковые волны, для которых справедливо соотношение

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}\, k, \tag{27}$$

а также *поперечные волны в непрерывной струне*, у которых соотношение между $\omega$ и $k$ имеет вид

$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\, k. \tag{28}$$

Пример 4. *Электромагнитные волны в ионосфере* *). Для синусоидальной волны имеем следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2 \tag{29}$$

для частот, превышающих граничную частоту $\nu_p \approx 20$ *Мгц*. Дифференцирование уравнения (29) по $k$ дает

$$2\omega\frac{d\omega}{dk} = 2c^2k, \tag{30}$$

т. е.

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)\left(\frac{d\omega}{dk}\right) = v_ф v_{гр} = c^2. \tag{31}$$

Фазовая и групповая скорости в этом случае равны

$$v_ф = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}} \geqslant c, \quad v_{гр} = c\left(\frac{c}{v_ф}\right) \leqslant c. \tag{32}$$

Мы видим, что хотя фазовая скорость всегда больше $c$, групповая скорость всегда меньше $c$. Поэтому *сигнал* не может быть передан со скоростью, превышающей скорость $c$.

Пример 5. *Поверхностные волны в воде.* В состоянии равновесия поверхность воды горизонтальна. При наличии волн на поверхность воды действует сила, которая стремится сгладить гребни волн и сделать поверхность воды плоской. Эта восстанавливающая сила складывается из силы тяжести и силы поверхностного натяжения. Можно считать, что при длинах волн, больших нескольких *см*, преобладает сила тяжести. Для миллиметровых волн преобладает сила поверхностного натяжения.

Из-за очень малой сжимаемости воды избыток воды в гребне волны перемещается в соседние области. Поэтому отдельные водяные капли совершают движение, являющееся комбинацией продольного движения (взад и вперед) и поперечного движения (вверх и

*) J. S. Mayo, Pulse-Code Modulation, Scientific American, p. 102 (March 1968). См. также А. А. Харкевич, Теоретические основы радиосвязи, Гостехиздат., 1957, стр. 56.

*) Вернитесь к главе 3, п. 3.5, пример 10.

вниз). Если длина волны мала по сравнению с глубиной слоя воды в равновесном состоянии, мы имеем так называемые волны в глубокой воде, когда траектория отдельных водяных капель в бегущей волне представляет собой окружность. Плавающая на поверхности утка или просто капля воды будет совершать равномерные круговые движения с радиусом, равным амплитуде гармонической волны, и периодом, равным периоду волны. На гребне волны утка будет иметь максимальную скорость в прямом направлении, во впадине — максимальную скорость в обратном направлении. Капли воды под поверхностью совершают движение по окружности меньших радиусов. Оказывается, что радиус окружностей экспоненциально убывает с глубиной, и поэтому движение практически полностью затухает на глубине порядка нескольких длин волн.

Дисперсионное соотношение для волн в глубокой воде приближенно имеет следующий вид:

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho}k^3, \tag{33}$$

где $\rho \approx 1{,}0$ *г/см*$^3$ и $T \approx 72$ *дин/см* (коэффициент поверхностного натяжения воды на границе с воздухом), $g = 980$ *см/сек*$^2$.

Покажите сами, что когда вклады в $\omega^2$ от силы поверхностного натяжения и от силы тяжести равны, фазовая и групповая скорости также равны. Докажите, что это условие осуществляется для длины волны $\lambda = 1{,}70$ *см*. Фазовая и групповая скорости при этом равны примерно 23 *см/сек*. Для длин волн, много меньших 1,7 *см*, поверхностное натяжение преобладает, и в этом случае групповая скорость

Таблица 6.1

**Волны в глубокой воде**

| $\lambda$, *см* | $\nu$, *гц* | $v_\Phi$, *см/сек* | $v_{гр}$, *см/сек* | $v_{гр}/v_\Phi$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,10 | 675 | 67,5 | 101,4 | 1,50 |
| 0,25 | 172 | 43,0 | 63,7 | 1,48 |
| 0,50 | 62,5 | 31,2 | 44,4 | 1,42 |
| 1,0 | 24,7 | 24,7 | 30,7 | 1,24 |
| 1,7 | 13,6 | 23,1 | 23,1 | 1,00 |
| 2 | 11,6 | 23,2 | 21,4 | 0,92 |
| 4 | 6,80 | 27,2 | 17,8 | 0,65 |
| 8 | 4,52 | 36,2 | 19,6 | 0,54 |
| 16 | 3,14 | 50,3 | 25,8 | 0,51 |
| 32 | 2,22 | 71 | 35,8 | 0,50 |
| 100 | 1,25 | 125 | 62,5 | 0,50 |
| 200 | 0,884 | 177 | 88,5 | 0,50 |
| 400 | 0,625 | 250 | 125 | 0,50 |
| 800 | 0,442 | 354 | 177 | 0,50 |
| 1600 | 0,313 | 500 | 250 | 0,50 |
| 3200 | 0,221 | 708 | 354 | 0,50 |
| 6400 | 0,156 | 1000 | 500 | 0,50 |



в 1,5 раза больше фазовой. Для длин волн, много больших 1,7 *см*, преобладает сила тяжести и групповая скорость равна половине фазовой (см. задачу 6.19). В табл. 6.1 приведены некоторые параметры для волн в воде при длине волн от 1 *мм* до 64 *м*.

Приложение. Рассмотрим пример, в котором использованы данные табл. 6.1. Предположим, что вы находитесь на морском берегу и хотите знать длину волны в открытом океане на расстоянии порядка 20—30 миль от берега.

Засекая время по часам, вы находите, что в среднем о берег разбивается 12 волн в минуту, т. е. $\nu = 0{,}2$ *гц*. Предполагая, что погода не менялась в течение нескольких дней, можно считать, что волны соответствуют установившемуся процессу. Поэтому в открытом море $\nu$ также будет равно 0,2 *гц*. (Нужно заметить, что длины волн у берега и в открытом море будут различны, поскольку *длина волны зависит от глубины*. Однако *в установившихся вынужденных колебаниях частота не будет зависеть от глубины*.) Из табл. 6.1 мы находим, что этой частоте соответствует длина волны порядка 40 *м*.

Теперь нас интересует путь, пройденный гребнем, который сейчас разбивается о берег, в течение предыдущего часа. Будем считать, что большая часть пути была пройдена по глубокой воде. По табл. 6.1 находим, что фазовая скорость равна 8 *м/сек*, или около 29 000 *м/час*, т. е. за час гребень прошел около 30 *км*.

## 6.3. Импульсы

Будем рассматривать случай, когда в точке $z = 0$ возмущение, создаваемое передатчиком, является суперпозицией большого числа гармонических колебаний равной амплитуды, частоты которых мало отличаются друг от друга и заключены в узком диапазоне частот от самой низкой $\omega_1$ до самой высокой $\omega_2$. Мы рассмотрели более простую задачу с двумя частотами и показали, что в этом случае возникает модулированное колебание, которое распространяется с групповой скоростью.

*Векторная диаграмма.* Прежде чем перейти к рассмотрению более сложной задачи с многими гармоническими компонентами, близкими по частоте, разберем случай двух частот, используя метод *векторных диаграмм* (см. том I, стр. 125). Гармоническое колебание

$$\psi(t) = A\cos\omega t \tag{34}$$

является вещественной частью комплексного гармонического колебания

$$\psi_к(t) = Ae^{i\omega t}. \tag{35}$$

Здесь индекс «к» показывает, что функция комплексная. Графически $\psi_к(t)$ можно представить на комплексной плоскости вектором длиной $A$, вращающимся против часовой стрелки с угловой частотой $\omega$. Проекция этого вектора на горизонтальную ось (т. е. ось вещественных значений) дает гармоническую функцию (34). Будем

делать мгновенные стробоскопические «снимки» этого вектора. Если частота стробоскопа совпадает с частотой вращения вектора, то на каждом мгновенном снимке вектор будет в одной и той же позиции (рис. 6.2, *а*). Если угловая частота вращения вектора $\omega$ чуть-чуть больше частоты стробоскопа $\omega_c$, то на последовательности снимков вектор будет вращаться вперед (против часовой стрелки) с угловой частотой $\omega - \omega_c$ (рис. 6.2, *б*). Если $\omega - \omega_c < 0$, мы увидим

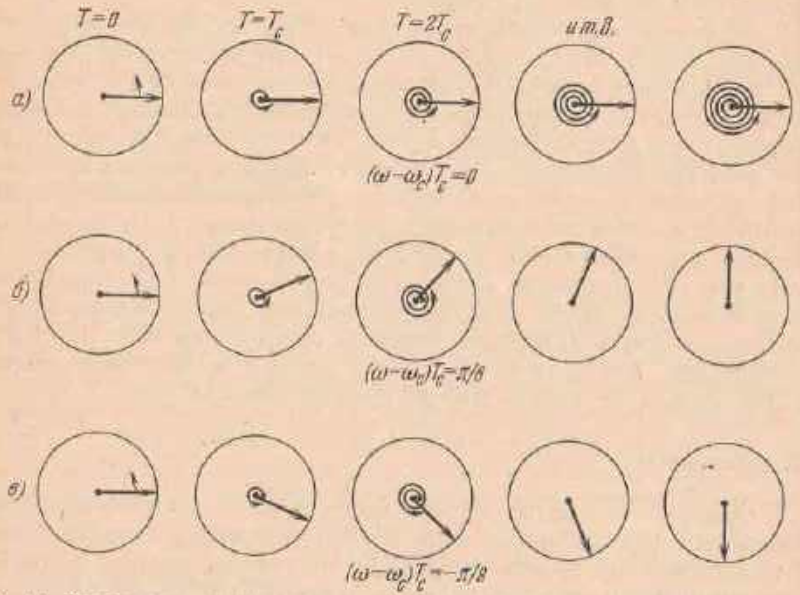



Рис. 6.2. Стробоскопические моментальные «снимки» вращающегося комплексного вектора $\exp i\omega t$.
Назначение спиралей — помочь сосчитать число оборотов вектора. Интервал времени между «снимками» $T_c = 2\pi/\omega_c$.

вектор вращающимся по часовой стрелке (рис. 6.2, *в*). Индекс «с» указывает на принадлежность данной величины ($\omega$ или $T$) к стробоскопу.

Теперь рассмотрим суперпозицию двух гармонических волн с одинаковой амплитудой, но немного разными частотами:

$$\psi(t) = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t. \tag{36}$$

Пусть частота стробоскопа равна

$$\omega_c = \omega_{ср} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2). \tag{37}$$

Таким образом (считаем, что $\omega_2 - \omega_1 > 0$), $\omega_2 - \omega_{ср} > 0$ и $\omega_1 - \omega_{ср} < 0$. Напомним, что $\psi(t)$ может быть записано [уравнение (2), п. 6.2)] как произведение медленно меняющейся амплитуды $A(t)$ на быстрые колебания, происходящие с частотой $\omega_{ср}$. Так как частота



стробоскопа равна $\omega_{ср}$, то мы не увидим быстрых колебаний, а увидим только изменение $A(t)$. В результате получим серию мгновенных «снимков», показанных на рис. 6.3.

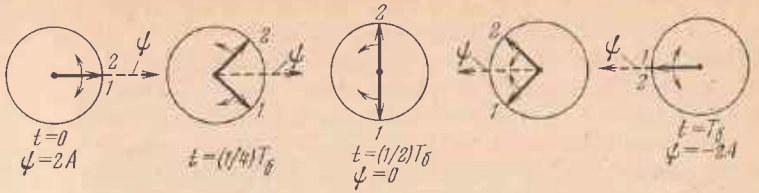



Рис. 6.3. Биение в суперпозиции $\psi(t) = A\exp i\omega_1 t + A\exp i\omega_2 t$. Стробоскопические «снимки» производятся с частотой $\omega_c = \omega_{ср}$ и покрывают целый период биений $T_б$.
В этом примере частота биений равна $^1/_4$ средней частоты: $\omega_2 - \omega_1 = {}^1/_4\omega_{ср}$.

*Образование импульса.* Теперь рассмотрим случай, когда волновая функция $\psi(t)$ является суперпозицией очень большого числа колебаний равной амплитуды $A$, с нулевыми начальными фазами и частотами, которые равномерно распределены в диапазоне от $\omega_1$ до $\omega_2$. Соответствующая стробоскопическая векторная диаграмма показана на рис. 6.4.

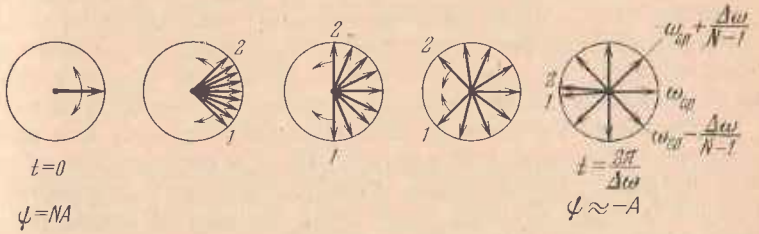



Рис. 6.4. Стробоскопические «снимки» $N$ колебаний ($N=9$), равномерно распределенных в интервале частот $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.
Стробоскопическая частота равна $\omega_{ср}$. Вектор колебаний $\omega = \omega_{ср}$ кажется неподвижным.

В момент $t=0$ полная амплитуда $A(t)$ суперпозиции $\psi(t)$ равна $NA$. Через время $t$, немного меньшее, чем время $2\pi/\Delta\omega$ (равное периоду биений между крайними частотами $\omega_1$ и $\omega_2$), полная амплитуда $A(t)$ равна нулю, так как векторы, соответствующие разным частотам, равномерно распределены по окружности. (Когда $N \to \infty$, этот первый нуль в $A(t)$ возникает точно при $t = 2\pi/\Delta\omega$.) В течение долгого времени после $t = 2\pi/\Delta\omega$ векторы будут иметь все еще достаточно широкое распределение по фазе (однако уже не совершенно равномерное), так что в сумме дадут небольшое значение $A(t)$. Векторы снова окажутся в фазе и амплитуда $A(t)$ снова достигнет максимума, равного $NA$, лишь когда биения между соседними по частоте колебаниями опять достигнут максимума. Так как соседние колебания отличаются по частоте на $\Delta\omega/(N-1)$, то период биений между ними равен произведению $(N-1)$ на период биений, соответствую-

щий разности крайних частот. Если $N \to \infty$, то общая амплитуда остается малой практически «навсегда», никогда не возвращаясь к начальному значению. В этом случае мы имеем то, что называют *импульсом*, т. е. функцию времени, которая отлична от нуля только в течение ограниченного интервала времени.

*Длительность импульса.* Обозначим длительность импульса, т. е. интервал времени, в течение которого функция $\psi(t)$ «достаточно велика», через $\Delta t$. Этот интервал простирается от момента $t=0$, когда все компоненты между $\omega_1$ и $\omega_2$ находятся в фазе, до момента $t_1$, когда все компоненты равномерно распределены по фазе (по кругу в комплексной плоскости), т. е.

где
$$\Delta t \approx t_1, \tag{38}$$

Имеем
$$(\omega_2 - \omega_1)\, t_1 = 2\pi. \tag{39}$$

или
$$\Delta\omega\, \Delta t \approx 2\pi, \tag{40}$$

$$\boxed{\Delta\nu\, \Delta t \approx 1.} \tag{41}$$

Соотношение (41) является частным случаем общего и очень важного соотношения между продолжительностью $\Delta t$ импульса $\psi(t)$ и полосой в частотном спектре гармонических компонент, суперпозиция которых образует импульс. Оно имеет необычайно широкое применение во всех областях физики, независимо от того, будет ли явление, протекающее в виде импульса, функцией времени или какой-либо другой переменной. Соотношение (41) не зависит от деталей формы импульса $\psi(t)$. Важно лишь, чтобы функция $\psi(t)$ действительно представляла собой импульс, т. е. была отлична от нуля в течение конечного интервала длительностью $\Delta t$.

*Произведение частотного интервала на временной интервал. Общее* соотношение между интервалом частот $\Delta\nu$ и длительностью импульса $\Delta t$ имеет вид

$$\boxed{\Delta\nu\, \Delta t \geqslant 1.} \tag{42}$$

Знак неравенства отражает тот факт, что в результате суперпозиции $N$ гармонических колебаний, занимающих диапазон частот $\Delta\nu$, мы получим импульс длительностью $\Delta t \approx 1/\Delta\nu$ только при определенном выборе фаз складываемых колебаний. В примере рис. 6.4 все компоненты имеют одинаковую фазу. Если бы их фазовые постоянные не были равны (они равны в момент времени $t=0$ в нашем примере), то суперпозиция $\psi(t)$ никогда бы не достигла максимального значения. В этом случае интервал времени, соответствующий импульсу $\psi(t)$, будет более длительным. В пределе, когда фазы имеют случайные значения, продолжительность $\Delta t$ может стать произвольно большой. В этом предельном случае не существует сколько-нибудь различимого импульса.



*Пример с роялем.* Предположим, что мы ударили по всем клавишам рояля одновременно. Результирующий звук занимает диапазон частот около 4000 *гц*. Если все струны были возбуждены точно в фазе, мы услышали бы очень громкий звук, продолжительностью около $\Delta t \approx 1/4000 \approx 0{,}2$ *мсек*. Если мы ударяем по клавишам руками или каким-либо протяженным предметом (чтобы захватить сразу все клавиши), то неизбежно получим разницу в начальных фазах, которая, очевидно, как минимум имеет порядок $10^{-3}$ *сек*. В этом случае фазы распределены существенно случайно и звук будет иметь характер продолжительного шума, а не импульса.

*Гармоническое колебание ограниченной длительности.* Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий соотношение (41). Предположим, что мы включили генератор, установившийся режим которого достигается за несколько периодов. Генератор выдает несколько циклов колебаний $A\cos\omega_0 t$ с амплитудой $A$ и частотой $\omega$

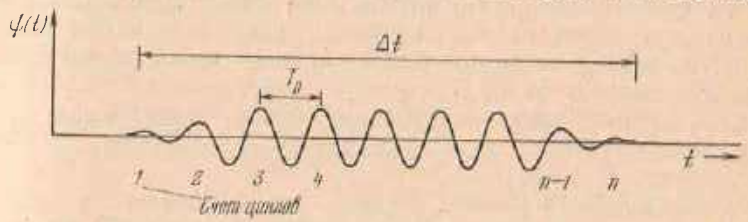



Рис. 6.5. Гармонические колебания конечной продолжительности.

и выключается, также быстро успокаиваясь (рис. 6.5). *Колебания длятся конечное время и поэтому не являются чистыми гармоническими колебаниями с частотой* $\omega_0$. Конечно, частота $\omega = \omega_0$ преобладает, но это не единственная частота, которая присутствует в образовавшемся импульсе. Нашему импульсу или цугу колебаний должна соответствовать полоса частот с центром в $\omega \approx \omega_0$. Покажем, как грубо оценить ширину $\Delta\omega$ этой полосы. Используя определение частоты как числа колебаний в секунду, вычислим полное число циклов работы осциллятора в течение интервала времени $\Delta t$. Если это число равно $n$, мы получаем, что доминирующее значение

$$\nu = \frac{n}{\Delta t}. \tag{43}$$

В пределе эта частота, в соответствии с рис. 6.5, должна быть равна $\nu_0 = 1/T_0$. Однако из рис. 6.5 следует, что $n$ невозможно определить точно, так как на обоих концах импульса существует неопределенность порядка $\pm{}^1/_2$ цикла и мы не можем решить, следует ли прибавить еще одно колебание или импульс уже затух. Вы можете сказать, что если $n$ достаточно велико, то ошибка, связанная с неопределенностью в одно колебание, мала. Это верно, но мы ищем именно *эту* ошибку. Из выражения (43) следует, что *неопределенность в* $n$, равная одному колебанию, приводит *к ширине полосы*

*частот*, равной

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{\Delta n}{n}\approx\frac{1}{n}. \qquad (44)$$

Перемножая уравнения (43) и (44), получим $\Delta\nu\approx 1/\Delta t$.

Пример 6. *Телевизионный диапазон частот.* Изображение на экране телевизора представляет собой прямоугольную сетку, состоящую из белых и черных точек. Данная точка будет «белой», если это место фосфоресцирующего телевизионного экрана было облучено (в течение 1/50 *сек*) электронным пучком. Точки разделены расстоянием около 1 *мм*. Размеры обычного экрана близки к $50\times 50$ *см*$^2$. Таким образом, экран имеет 500 линий, а в каждой линии 500 точек. Соответственно на всем экране можно разместить $25\times 10^4$ «белых» точек. Каждая точка вновь «ощупывается» электронным лучом через 1/25 *сек*. (При одном пробеге по экрану пучок просматривает горизонтальную линию. При следующем пробеге просматривается соседняя линия. Таким образом, данная область экрана, включающая много горизонтальных линий, имеет частоту мерцаний, равную 50 *гц*.)

Итак, число команд электронному пучку, содержащих приказание «выключиться» или «включиться», составляет $25\cdot 25\cdot 10^4$ или $6{,}25\cdot 10^6$ в 1 *сек*.

Из выполненного расчета следует, что напряжение в передающей и приемной антеннах должно иметь порядок $10^7$ всплесков в секунду. Длительность каждого всплеска (импульса) не должна быть больше $\Delta t\sim 10^{-7}$ *сек* для избежания перекрытия. Поэтому необходимый диапазон частот равен $\Delta\nu\approx 1/\Delta t\sim 10^7$ *гц* $\sim 10$ *Мгц*. Несущая частота для телевизионного канала лежит в диапазоне от 50 до 210 *Мгц*. В соответствии с тем, что было сказано о радиопередаче с амплитудной модуляцией, можно думать, что полоса в 10 *Мгц* должна быть расположена симметрично относительно несущей частоты. На самом же деле несущая частота и одна боковая полоса «подавляются». Они отфильтровываются и не поступают к передающей антенне. (Однако они генерируются в приемнике, будучи восстановленными по информации, получаемой из оставшейся боковой полосы.) Такой способ передачи называется передачей одной боковой полосы. Он требует полосы частот в два раза меньшей, т. е. всего 5 *Мгц*. Таким образом, между 55 и 210 *Мгц* можно уместить 30 телевизионных каналов, каждый из которых занимает полосу в 5 *Мгц*.

Пример 7. *Использование видимого света для радиовещания.* В этом примере мы рассмотрим передачу информации с помощью *лазера*. Использование лазеров открывает широкие возможности для передачи информации электромагнитным излучением на частоте видимого света. Сейчас многие исследователи заняты поиском методов, которые позволили бы модулировать выходной свет лазера, аналогично тому как в радио или телепередатчике модулируется несущая частота. Предположим, что такая техника модуляции светового пучка лазера уже разработана в широком диапазоне частот видимого света. Нас интересует, как много телевизионных каналов можно было бы уместить в частотном диапазоне видимого света. Пусть в качестве несущей частоты используется видимой свет лазера. На один телевизионный канал нужна полоса в 10 *Мгц*. Длины волн видимого света занимают диапазон от 6500 Å (красный) до 4500 Å (голубой), т. е. частоты от $\nu=c/\lambda=3\cdot 10^{10}/6{,}5\cdot 10^{-5}\approx 4{,}6\cdot 10^{14}$ *гц* $=4{,}6\cdot 10^8$ *Мгц* до $\nu=3\cdot 10^{10}/4{,}5\cdot 10^{-5}\approx 6{,}6\cdot 10^{14}$ *гц* $=6{,}6\cdot 10^8$ *Мгц*. Таким образом, доступный частотный диапазон заключен в пределах от $4{,}6\cdot 10^8$ *Мгц* до $6{,}6\cdot 10^8$ *Мгц*, т. е. занимает полосу шириной в $2\cdot 10^8$ *Мгц*. Такая полоса позволила бы создать $2\cdot 10^7$ неперекрывающихся телевизионных каналов, каждый с полосой в 10 *Мгц*.

*Форма импульса* $\psi(t)$, *образованного «прямоугольным» частотным спектром.* Найдем точное выражение для импульса $\psi(t)$, образованного суперпозицией $N$ различных гармонических компонент, имеющих равную амплитуду $A$, одинаковую начальную фазу (равную нулю) и частоты, равномерно распределенные между самой низкой частотой $\omega_1$ и самой высокой частотой $\omega_2$. На рис. 6.4 представлены мгновенные стробоскопические «снимки» для такой суперпозиции, состоящей из 9 компонент. В общем случае мы имеем

$$\psi(t)=A\cos\omega_1 t+A\cos(\omega_1+\delta\omega)t+ \\ +A\cos(\omega_1+2\delta\omega)t+\ldots+A\cos\omega_2 t, \qquad (45)$$

где $\delta\omega$ — частота, на которую отличаются две соседние компоненты:

$$\delta\omega=\frac{\omega_2-\omega_1}{N-1}=\frac{\Delta\omega}{N-1}. \qquad (46)$$

Формула (45) представляет $\psi(t)$ в виде *линейной суперпозиции большого числа строго гармонических компонент*. Постараемся теперь выразить $\psi(t)$ в виде *почти гармонического колебания с одной «быстрой» частотой* $\omega_{ср}$, равной

$$\omega_{ср}=\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2), \qquad (47)$$

и почти постоянной (относительно временно́го масштаба быстрых колебаний) амплитудой $A(t)$. На основании имеющегося у нас опыта по нахождению суперпозиции двух гармонических колебаний (п. 5.2) мы ожидаем, что выражение для $\psi(t)$ будет иметь вид

$$\psi(t)=A(t)\cos\omega_{ср}t. \qquad (48)$$

Мы будем искать $\psi(t)$ именно в таком виде и покажем, что если полоса $\Delta\omega$ мала по сравнению с $\omega_{ср}$, то $A(t)$ медленно изменяется в масштабе времени быстрых колебаний. (Наш ответ будет точным независимо от этого условия.) Таким образом, мы сможем представить $\psi(t)$ как амплитудно-модулированное почти гармоническое колебание. Мы увидим, что $\psi(t)$ имеет форму импульса. Этот результат подтвердит наши качественные рассуждения, иллюстрируемые рис. 6.4. Точное выражение для $\psi(t)$ позволит понять, что мы имеем

в виду, утверждая, что произведение ширины частотного спектра импульса на его длительность близко к единице.

Для упрощения вычислений будем делать их в комплексной форме. Выражение (45) представляет собой произведение константы $A$ на вещественную часть комплексной функции $f(t)$:

$$f(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{i(\omega_1+\delta\omega)t} + e^{i(\omega_1+2\delta\omega)t} + \ldots + e^{i(\omega_1+\Delta\omega)t} \equiv e^{i\omega_1 t} S, \quad (49)$$

где $S$ [обозначим $e^{i\delta\omega t} = a$ и $\Delta\omega = (N-1)\delta\omega$] — сумма геометрической прогрессии:

$$S = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{N-1}.$$

Тогда

$$aS = a + a^2 + \ldots + a^{N-1} + a^N, \quad (a-1)S = a^N - 1,$$

$$S = \frac{a^N-1}{a-1} = \frac{e^{iN\delta\omega t}-1}{e^{i\delta\omega t}-1} = \frac{e^{1/2 iN\delta\omega t}}{e^{1/2 i\delta\omega t}} \cdot \left[\frac{e^{1/2 iN\delta\omega t} - e^{-1/2 iN\delta\omega t}}{e^{1/2 i\delta\omega t} - e^{-1/2 i\delta\omega t}}\right] =$$

$$= e^{1/2 i(N-1)\delta\omega t} \cdot \frac{\sin 1/2\, N\delta\omega t}{\sin 1/2\, \delta\omega t} = e^{1/2 i\Delta\omega t} \frac{\sin 1/2\, N\delta\omega t}{\sin 1/2\, \delta\omega t}.$$

Таким образом,

$$f(t) = e^{i\omega_1 t} S = e^{i[\omega_1 + 1/2\,\Delta\omega]t} \frac{\sin 1/2\, N\delta\omega t}{\sin 1/2\, \delta\omega t} = e^{\omega_{\text{ср}} t} \frac{\sin 1/2\, N\delta\omega t}{\sin 1/2\, \delta\omega t}.$$

Наконец, имея в виду, что $\psi(t)$ есть произведение константы $A$ на вещественную часть $f(t)$, имеем

$$\psi(t) = A \cos\omega_{\text{ср}} t \frac{\sin 1/2\, N\delta\omega t}{\sin 1/2\, \delta\omega t},$$

т. е.

$$\psi(t) = A(t) \cos\omega_{\text{ср}} t, \quad (50)$$

где

$$A(t) = A \frac{\sin 1/2\, N\delta\omega t}{\sin 1/2\, \delta\omega t}. \quad (51)$$

Выражение (51) для $A(t)$ является точным. Посмотрим, следует ли из него простая формула для случая биений с двумя компонентами. Полагая $N=2$ в (51) и пользуясь равенством $\sin 2x = 2\cos x \sin x$, где $x = 1/2\,\delta\omega$, имеем:

для $N=2$ $\quad \psi(t) = [2A\cos 1/2\,\delta\omega t]\cos\omega_{\text{ср}} t =$

$$= 2A\cos 1/2(\omega_1 - \omega_2)t \cos\omega_{\text{ср}} t,$$

т. е. выражение, полученное для биений в п. 1.5.

Уравнение (51) можно представить в более удобной форме, выразив постоянную $A$ через $A(0)$ в момент $t=0$. Чтобы найти значение $A(0)$, нужно найти, к чему стремится предел выражения $\sin N\theta/\sin\theta$ при 0, стремящемся к нулю. Используя разложение в ряд Тейлора в точке $t=0$ и имея в виду, что $\theta = 1/2\,\delta\omega t$, получим

$$\frac{\sin N\theta}{\sin\theta} = \frac{N\theta - \frac{1}{6}(N\theta)^3 + \ldots}{\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \ldots}. \quad (52)$$



Для достаточно малых $\theta$ можно пренебречь всеми членами в разложении, кроме первого (это относится как к числителю, так и к знаменателю). Тогда получим

$$\lim_{\theta\to 0}\left\{\frac{\sin N\theta}{\sin\theta}\right\} = N. \quad (53)$$

Из (51) следует:

$$A(0) = NA, \quad A = \frac{A(0)}{N}, \quad (54)$$

т. е.

$$A(t) = A(0)\frac{\sin 1/2\, N\delta\omega t}{N \sin 1/2\, \delta\omega t}. \quad (55)$$

Теперь рассмотрим случай, когда $N$ очень велико. При достаточно большом $N$ расстояние $\delta\omega$ между соседними гармоническими компонентами станет настолько малым, что его невозможно будет обнаружить с помощью имеющихся физических приборов. В этом случае можно считать, что мы имеем непрерывное распределение гармонических компонент по частоте. Такое $N$, при котором все вышесказанное справедливо, условно можно называть бесконечно большим. Для бесконечно большого $N$ можно пренебречь разницей между $N$ и $N-1$. Тогда имеем:

для $N$ бесконечно большого $N\delta\omega \approx (N-1)\,\delta\omega = \Delta\omega$. $\quad (56)$

Таким образом, мы устремляем $N$ к бесконечности, а $\delta\omega$ к нулю, но при этом их произведение остается равным ширине полосы $\Delta\omega$. В знаменателе (55), равном $\sin 1/2\,\delta\omega t$, положим, что $\delta\omega$ стремится к нулю (но $t$ не стремится к бесконечности, так как импульс обладает определенной длительностью). Тогда в разложении $\sin 1/2\,\delta\omega t$ в ряд Тейлора можно пренебречь всеми членами, кроме первого. В результате имеем

$$A(t) = A(0)\frac{\sin 1/2\, N\delta\omega t}{N \sin 1/2\, \delta\omega t} = A(0)\frac{\sin 1/2\,\Delta\omega t}{N \cdot 1/2\,\delta\omega t} = A(0)\frac{\sin 1/2\,\Delta\omega t}{1/2\,\Delta\omega t}, \quad (57)$$

$$\psi(t) = A(t)\cos\omega_{\text{ср}} t. \quad (58)$$

Вернемся теперь к выражению (45) для $\psi(t)$ как суперпозиции гармонических колебаний и перепишем его, имея в виду, что $\delta\omega \to 0$. Используя выражения (54) и (56), можем записать

$$A = \frac{A(0)}{N} = \frac{A(0)}{\Delta\omega}\delta\omega. \quad (59)$$

Суперпозиция (45) может быть записана в виде

$$\psi(t) = \frac{A(0)}{\Delta\omega}[\delta\omega\cos\omega_1 t + \delta\omega\cos(\omega_1+\delta\omega)t + \ldots + \delta\omega\cos\omega_2 t]. \quad (60)$$

При $\delta\omega \to 0$ выражение в квадратных скобках представляет собой интеграл от $\cos\omega t\,\delta\omega$, взятый в пределах от $\omega_1$ до $\omega_2$. Поэтому уравнение (60) примет вид

$$\psi(t) = \frac{A(0)}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos\omega t\, d\omega. \quad (61)$$

*Интеграл Фурье.* Выражение (61) является примером *непрерывной суперпозиции гармонических колебаний.* Его называют также *интегралом Фурье.* Оказывается, что любая («разумная») непериодическая функция $\psi(t)$ может быть представлена (в общем случае) интегралом Фурье:

$$\psi(t) = \int_0^\infty A(\omega) \sin \omega t \, d\omega + \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega t \, d\omega. \qquad (62)$$

Непрерывные функции $A(\omega)$ и $B(\omega)$ называются *коэффициентами Фурье* по аналогии с коэффициентами разложения в ряд Фурье.

Сравнивая формулы (61) и (62), мы видим, что функция $\psi(t)$, определяемая выражениями (57) и (58), имеет следующие коэффициенты Фурье:

$$\left.\begin{aligned} A(\omega) &= 0 \quad \text{для всех } \omega, \\ B(\omega) &= 0 \quad \text{для } \omega \text{ вне интервала } (\omega_1, \omega_2), \\ B(\omega) &= \frac{A(0)}{\Delta\omega} \quad \text{для } \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2. \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

*Частотный спектр Фурье.* График зависимости коэффициентов Фурье от частоты называется *частотным спектром* $\psi(t)$. Спектр, определяемый выражением (63), является простейшим частотным спектром. Он постоянен в пределах всего диапазона частот $\Delta\omega$ и равен нулю вне его. Такой спектр иногда называет «прямоугольным» в соответствии с его формой. [Заметим, что в общем случае мы должны рассматривать два графика: один для $A(\omega)$ и другой для $B(\omega)$.]

На рис. 6.6 показана наша функция $\psi(t)$ и ее коэффициенты Фурье $B(\omega)$. Заметим, что огибающая $A(t)$ первый раз обращается в нуль в $t_1 = 2\pi/\Delta\omega$. Это — время, необходимое для равномерного распределения по фазе всех гармонических компонент в интервале $2\pi$ (см. мгновенные стробоскопические снимки на рис. 6.4). Интервал времени $\Delta t$, когда амплитуда $A(t)$ относительно велика, можно было бы определить как интервал между значениями $t = -t_1$ и $t = +t_1$. Однако этот интервал слишком велик и более разумно за $\Delta t$ принять интервал, вне которого амплитуда $A(t)$ никогда не достигает своего значения в интервале. Для рассматриваемого случая это означает, что за $\Delta t$ можно взять половину интервала между двумя нулями в $t = \pm t_1$. Таким образом, мы можем определить длительность импульса как

$$\Delta t = t_1 = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

откуда

$$\Delta\upsilon \, \Delta t = 1. \qquad (64)$$

В уравнении (64) стоит знак равенства вместо знака приближенного равенства, так как мы точно определили, что подразумевается под длительностью импульса $\Delta t$. В соответствии с нашим определением $A(t)$ на концах интервала $\Delta t$ равна

$$A\left(\frac{t_1}{2}\right) = A(0) \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} A(0). \qquad (65)$$



Таким образом, в начале и в конце интервала $\Delta t$ амплитуда $A(t)$ равна $2/\pi$ от своего максимального значения.

Энергия колебаний «почти гармонического осциллятора», смещение которого равно $\psi(t) = A(t) \cos \omega_{ср} t$, пропорциональна $A^2(t)$.

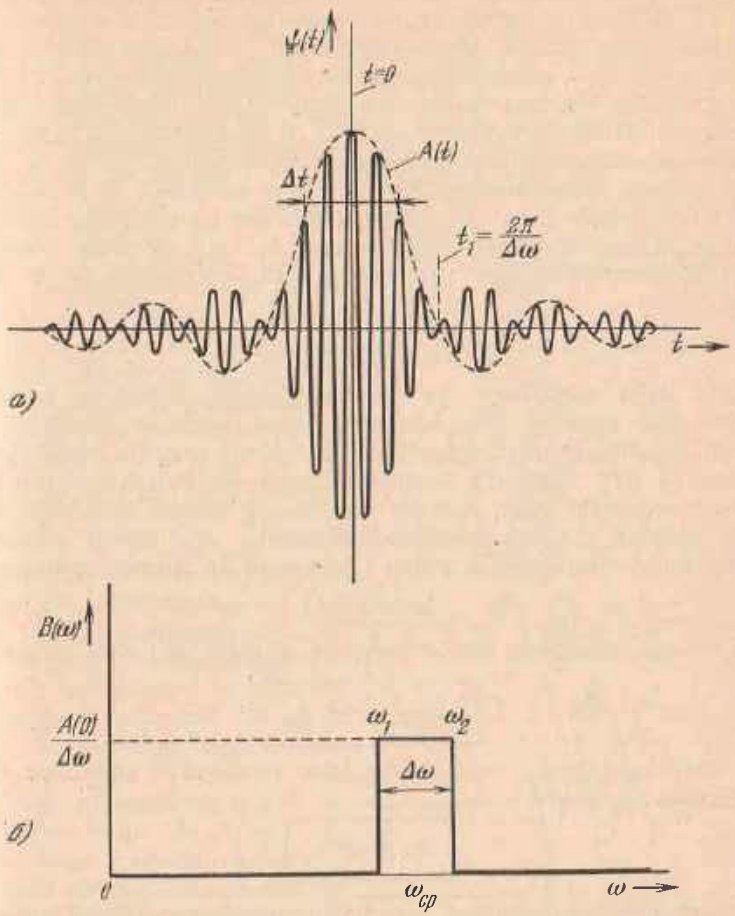



Рис. 6.6. Фурье-анализ непериодической функции.

*а)* Импульс $\psi(t)$, форма которого выражается равенствами (57) и (58); *б)* непрерывный частотный спектр фурье-коэффициентов, определяемый равенствами (63). [Так как $\psi(t)$ — четная функция времени $t$, фурье-коэффициент $A(\omega)$ равен 0 для всех $\omega$.]

Поэтому энергия максимальна в центре импульса ($t = 0$) и уменьшается на концах интервала $\Delta t$ в $(2/\pi)^2 = 0{,}406$ раза. Таким образом, с энергетической точки зрения $\Delta t$ соответствует интервалу, в течение которого осциллятором выдается около 60% запасенной в нем энергии.

В п. 6.4 мы рассмотрим другие примеры импульсов и соответствующие им интегралы Фурье.

*Пакет бегущих волн.* Предположим, что в точке $z=0$ «движение» передатчика похоже на импульс, показанный на рис. 6.6. Так как время, в течение которого передатчик излучает волны в среду, ограничено и волны распространяются от передатчика, то они будут представлять собой импульсы конечной протяженности в пространстве. Такой импульс называется *волновым пакетом* или *волновой группой*. Волновая группа распространяется с групповой скоростью. Поскольку $k$ и $\omega$ связаны дисперсионным соотношением $k(\omega)$, то существование полосы частот $\Delta\omega$ приводит к появлению соответствующей полосы волновых чисел $\Delta k$ (и соответственно длин волн) в волновом пакете. В соответствии с основной частотой $\omega_0$ будет существовать и основное волновое число $k_0=k(\omega_0)$ [т. е. $k_0$ получается подстановкой $\omega=\omega_0$ в дисперсионное соотношение $k=k(\omega)$]. Полоса $\Delta k$ центрирована относительно $k_0$. Ее ширина получается дифференцированием дисперсионного соотношения в точке $\omega=\omega_0$:

$$\Delta k=\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0\Delta\omega=\frac{\Delta\omega}{v_{\text{гр}}}. \qquad (66)$$

[Индекс нуль означает, что производная вычисляется в центре полосы. Мы пренебрегаем членами более высокого порядка, чем первый, в разложении дисперсионного соотношения в ряд Тейлора. Уравнение (66) является первым членом этого разложения.]

*Произведение длины пакета на ширину полосы волновых чисел.* Пакет длиной $\Delta z$, распространяющийся с групповой скоростью $v_{\text{гр}}$, проходит мимо данной точки $z$ за время $\Delta t$. В этом случае имеем

$$\Delta z\approx v_{\text{гр}}\,\Delta t. \qquad (67)$$

Перемножая правые и левые части уравнений (66) и (67), получим

$$\boxed{\Delta k\,\Delta z\approx\Delta\omega\,\Delta t.} \qquad (68)$$

Так как $\Delta\omega\,\Delta t\geqslant 2\pi$, то и $\Delta k\,\Delta z\geqslant 2\pi$. Используя волновое число $\sigma=k/2\pi=\lambda^{-1}$, имеем

$$\boxed{\Delta\sigma\,\Delta z\geqslant 1.} \qquad (69)$$

Это соотношение полностью аналогично имеющему общий характер соотношению $\Delta\nu\,\Delta t\geqslant 1$, но относится к импульсу в пространстве, а не во времени.

Другой вывод уравнения (69) заключается в рассмотрении неопределенности в числе циклов колебаний, укладывающихся в $\Delta z$. Величина $\sigma$ (в циклах на единицу длины) равна

$$\sigma\approx\frac{\text{циклы}\pm{}^1/_2}{\Delta z}. \qquad (70)$$

Отсюда следует, что неопределенность в ширине полосы близка к $1/\Delta z$. Этот вывод для координаты аналогичен сделанному выше выводу (44) соотношения $\Delta\nu\Delta t=1$ для времени.



*«Расползание» волнового пакета со временем.* Следует обратить внимание на то, что если пакет распространяется в диспергирующей среде, то его длина не остается постоянной. Пакет растягивается по мере распространения. Причина такого расползания в том, что групповая скорость $v_{\text{гр}}=d\omega/dk$ зависит от $k$ (или $\omega$). Поэтому полоса $\Delta k$ определяет соответствующую полосу групповых скоростей $\Delta v_{\text{гр}}$:

$$\Delta v_{\text{гр}}=\left(\frac{dv_{\text{гр}}}{dk}\right)_0\Delta k=$$
$$=\left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_0\Delta k. \qquad (71)$$

Волновой пакет в момент $t=0$ имел длину $(\Delta z)_0$, в момент времени $t$ будет иметь длину $(\Delta z)_t$, приблизительно равную

$$(\Delta z)_t\approx(\Delta z)_0+(\Delta v_{\text{гр}})\,t. \qquad (72)$$

Соответственно увеличится время $\Delta t$, необходимое пакету для прохождения точки $z$. [Уравнение (68) справедливо для любого момента времени, так как $\Delta k$ и $\Delta\omega$ — постоянные величины.]

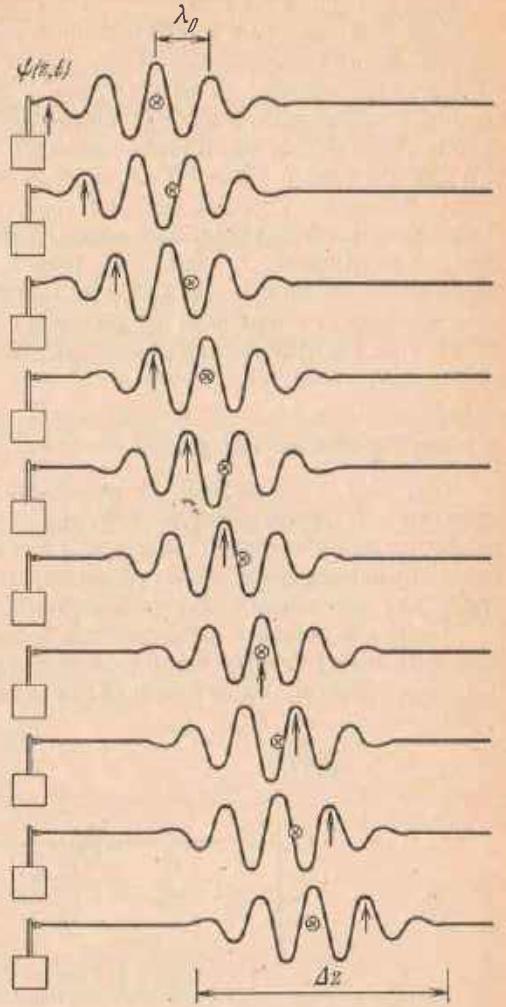



Рис. 6.7. Волновой пакет, для которого фазовая скорость в два раза больше групповой.
Стрелки перемещаются с фазовой скоростью, следуя за точкой постоянной фазы в колебании с доминирующей частотой. Кресты перемещаются с групповой скоростью. Они следуют за пакетом.

Из-за размывания пакета соотношения $\Delta\sigma\,\Delta z\approx 1$ и $\Delta\nu\,\Delta t\approx 1$ выполняются только в начальный момент времени $t=0$. Для того чтобы соотношение $\Delta\nu\,\Delta t\approx 1$ было справедливо, необходимо, чтобы все гармонические составляющие были в правильной фазе. Это имеет место для $t=0$. Однако как только пакет начал распространяться в среде и прошел некоторое расстояние, то из-за дисперсии среды различные части пакета будут иметь разные скорости и все составляющие в диапазоне $\Delta k$ (или $\Delta\omega$) не останутся в фазе (в какой-то точке $z$). Таким образом, фазы различных частотных компонент

будут отличаться друг от друга, и мы получим, что $\Delta\sigma\,\Delta z \approx \approx \Delta\nu\,\Delta t > 1$ для $t \neq 0$. Если же мы имеем дело со средой без дисперсии, то растяжения пакета не происходит и соотношение $\Delta\sigma\,\Delta z \approx \approx \Delta\nu\,\Delta t \approx 1$ сохраняется.

*Волновые пакеты в воде.* Волновые пакеты, распространяющиеся по кругам на поверхности воды, можно образовать, бросая в пруд гальку. При некотором опыте удается следить за распространением групп и наблюдать, как отдельные гребни возникают позади группы, проходят через нее и рассасываются. (Это явление связано с тем, что для длин волн с $\lambda > 1{,}7$ *см*, возбуждаемых камнем средней величины, фазовая скорость больше групповой. Картина распространения волновой группы, для которой фазовая скорость в два раза больше групповой, показана на рис. 6.7.) Мы настоятельно рекомендуем понаблюдать за распространением волновых групп. Вначале возникнут некоторые трудности, связанные с довольно большой скоростью распространения группы, однако усилия будут оправданы. (См. домашние опыты.)

### 6.4. Фурье-анализ импульсов

В п. 6.3 мы впервые встретились с представлением функции времени $\psi(t)$ в виде интеграла Фурье. Здесь мы покажем, как найти непрерывный частотный спектр для любого «разумного» импульса, а также приведем несколько примеров, представляющих большой интерес для различных областей физики.

*Импульсы ограниченной длительности.* Предположим, что функция $\psi(t)$ имеет форму импульса ограниченной длительности (рис. 6.8): она равна нулю до момента времени $t_0$ и после момента времени

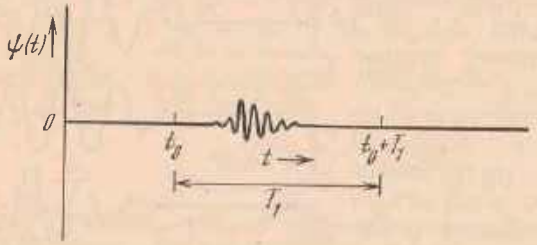



Рис. 6.8. Импульс $\psi(t)$.
Для времен более ранних, чем $t_0$, и более поздних, чем $t_0+T_1$, функция $\psi(t)=0$.

$t_0+T_1$. Таким образом, мы предполагаем, что существует конечный интервал времени $T_1$, внутри которого происходят колебания вида $\psi(t)$ (см. рис. 6.8). Величина интервала $T_1$, в общем, произвольна, однако в дальнейшем мы будем считать ее очень большой (но не бесконечно большой). (Величина $\nu_1 = 1/T_1$ будет нашей «единицей частоты», которую мы сможем выбрать сколь угодно малой.)

В п. 2.3 мы применили фурье-анализ для разложения периодической функции $F(t)$, определенной для всех $t$ и имеющей период



$T_1$, так что $F(t+T_1)=F(t)$. Мы умеем также применять фурье-анализ к функции, определенной в ограниченном интервале времени $t$. В этом случае мы строили новую периодическую функцию, определенную для всех $t$ и совпадающую с исходной функцией на временном интервале, равном периоду. Продолжив таким образом исходную функцию и сделав ее периодической, можно применить формулы, выведенные для периодических функций. Здесь мы поступим точно так же. Образуем периодическую функцию $F(t)$ с периодом $T_1$; на каждом периоде $F(t)$ является копией импульса $\psi(t)$ (рис. 6.9).

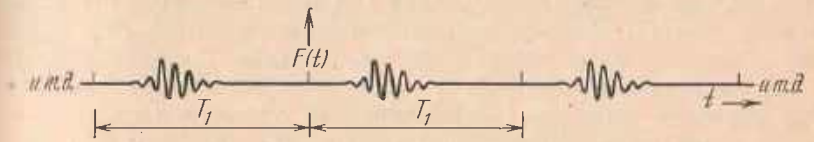



Рис. 6.9. Периодическая функция $F(t)$ с периодом $T_1$, полученная «повторением» импульса $\psi(t)$ в последовательные интервалы времени протяженностью $T_1$.

Разложение функции $F(t)$ в ряд Фурье определяется выражениями (2.49) — (2.52) из п. 2.3. Приведем заново результаты, которые нам понадобятся:

$$F(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t, \tag{73}$$

где

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1 = \frac{2\pi}{T_1}. \tag{74}$$

Тогда

$$B_0 = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} F(t)\,dt, \tag{75}$$

$$B_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} F(t)\cos n\omega_1 t\,dt, \tag{76}$$

$$A_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} F(t)\sin n\omega_1 t\,dt, \tag{77}$$

где $n=1, 2, 3,\ldots$ Постараемся применить формулы (73) — (77) к нашей задаче о представлении функции $\psi(t)$ в виде суперпозиции гармонических колебаний.

Заметим, что коэффициент $B_0$ в разложении (73) равен нулю. Действительно, функция $\psi(t)$ равна нулю вне своего интервала $T_1$, а в пределах этого интервала осциллирует. С физической точки зрения равенство $B_0=0$ означает, что в системе нет «постоянного смещения» или «постоянного напряжения», т. е. в общем случае у процесса, заданного функцией $\psi(t)$, нет постоянной составляющей. (Это не означает, конечно, отсутствия таких процессов, для которых функция $\psi(t)$ имела бы вне $T_1$ не нулевое, а какое-либо конечное

значение. Мы просто не рассматриваем сейчас такие случаи. Сила принципа суперпозиции заключается в том, что он дает возможность не рассматривать не интересующие нас члены суперпозиции, с той оговоркой, что «мы уже рассматривали их и позже добавим эти члены в результат».]

*Переход от суммы Фурье к интегралу Фурье.* Рассмотрим несколько первых членов в бесконечных суммах разложения (73). Эти члены имеют вид $A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t$, $A_2 \sin 2\omega_1 t + B_2 \cos 2\omega_1 t$ и т. д. Покажем, что *эти первые члены пренебрежимо малы*. Из рис. 6.8 мы видим, что у функции $\psi(t)$ нет компонент с периодом большим, чем $T_1$. Искусственно построенная функция $F(t)$ будет иметь компоненту с периодом $T_1$. Но так как выбор $T_1$ произволен (за исключением особых случаев), то мы можем сделать этот интервал очень большим, так что соответствующая угловая частота $\omega_1 = 2\pi/T_1$ будет очень малой. Константы $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ и т. д. при соответствующем выборе $T_1$ могут быть сделаны очень малыми, и ими можно пренебречь. В частности, мы можем сделать $T_1$ таким, что первыми несколькими константами $A_n$ и $B_n$ можно пренебречь. Под «первыми несколькими $A_n$ и $B_n$» мы подразумеваем, например, первые десять тысяч членов. Теперь рассмотрим такие $n$, для которых уже нельзя пренебречь членами $A_n$ и $B_n$. Рассмотрим два последовательных члена в уравнении (73), $n$ и $n+1$:

$$F(t) = \ldots + A_n \sin n\omega_1 t + A_{n+1} \sin (n\omega_1 + \omega_1) t + \ldots \qquad (78)$$

Если $T_1$ достаточно велико, мы можем предположить, что $\omega_1$ столь мало, а $n$ столь велико, что $A_{n+1}$ отличается от $A_n$ на бесконечно малую величину. В этом случае мы можем заменить $n\omega_1$ на непрерывную переменную $\omega$ и рассматривать $A_n$ как непрерывную функцию частоты $\omega$:

$$\omega = n\omega_1. \qquad (79)$$

Пусть $\delta\omega$ — приращение $\omega$ при увеличении $n$ на $\delta n$:

$$\delta\omega = \omega_1 \delta n, \quad \delta n = \delta\omega/\omega_1. \qquad (80)$$

Далее, пусть $\delta n$ настолько мало, что коэффициенты $A_n$ в диапазоне от $n$ до $n+\delta n$ можно считать практически равными. В этом случае мы можем сгруппировать члены, соответствующие диапазону $\delta n$ в уравнении (78), считая, что все они имеют одинаковую частоту $\omega$ (среднее значение $\omega$ в диапазоне $\delta\omega$). Перепишем разложение (78) следующим образом [используя равенства (79) и (80)]:

$$F(t) = \ldots + \delta n A_n \sin n\omega_1 t + \ldots = \ldots + \delta\omega \frac{A_n}{\omega_1} \sin \omega t + \ldots \equiv$$

$$\equiv \ldots + \delta\omega\, A(\omega) \sin \omega t + \ldots = \int_0^\infty A(\omega) \sin \omega t\, d\omega + \ldots \qquad (81)$$

Чтобы получить последнее из равенств (81), мы заменили сумму по последовательности полос с шириной $\delta\omega$ интегралом, а $\delta\omega$ — на более общий символ $d\omega$. Точки (...) в формуле (81) соответствуют



второй сумме в (73), а именно $\sum B_n \cos n\omega_1 t$. Эту сумму также можно представить в виде интеграла. Окончательно получаем

$$F(t) = \int_0^\infty A(\omega) \sin \omega t\, d\omega + \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega t\, d\omega, \qquad (82)$$

$$A(\omega) = A(n\omega_1) = A_n/\omega_1, \quad B(\omega) = B(n\omega_1) = B_n/\omega_1. \qquad (83)$$

Заметим, что переменная $\omega$ имеет нижний предел, равный нулю. Это справедливо потому, что $A_n$ и $B_n$ равны (примерно) нулю при $n$, близких к нулю, и поэтому $A(\omega)$ и $B(\omega)$ должны равняться нулю при $\omega = 0$.

Из равенств (83) и (77) имеем

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega_1 T_1} \int_{t_a}^{t_a + T_1} F(t) \sin \omega t\, dt;$$

учитывая, что $\omega_1 T_1 = 2\pi$, получим

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \sin \omega t\, dt.$$

В последнем равенстве мы учли тот факт, что интеграл по периоду от искусственно построенной периодической функции $F(t)$ равен интегралу по времени от $-\infty$ до $+\infty$ от непериодического импульса $\psi(t)$.

*Интеграл Фурье.* Мы пришли к выводу, что вместо периодической функции $F(t)$ можем написать в выражении (82) первоначальную функцию $\psi(t)$. Для этой функции справедливо следующее разложение, которое называется *интегралом Фурье*:

$$\boxed{\psi(t) = \int_0^\infty A(\omega) \sin \omega t\, d\omega + \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega t\, d\omega,} \qquad (84)$$

где коэффициенты $A(\omega)$ и $B(\omega)$ равны

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \sin \omega t\, dt, \qquad (85)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \cos \omega t\, dt. \qquad (86)$$

Рассмотрим несколько интересных применений этих формул.

Приложение. *Прямоугольный частотный спектр.* Пусть функция $A(\omega)$ равна нулю для всех $\omega$, а функция $B(\omega)$ постоянна для $\omega$ между $\omega_1$ и $\omega_2$ и равна нулю для всех других значений $\omega$. Выберем постоянное значение $B(\omega)$ таким, чтобы площадь под $B(\omega)$

была равна единице, т. е.

$$\left.\begin{aligned} B(\omega) &= \frac{1}{\Delta\omega} \text{ для } \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega, \\ B(\omega) &= 0 \quad \text{для остальных } \omega. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

(Так как $B(\omega)$ имеет размерность обратной частоты, то функция $\psi(t)$ должна быть безразмерной.) Функция $\psi(t)$ вычисляется следующим образом:

$$\psi(t) = \int_0^\infty A(\omega)\sin\omega t\, d\omega + \int_0^\infty B(\omega)\cos\omega t\, d\omega =$$

$$= 0 + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\Delta\omega}\cos\omega t\, d\omega = \frac{1}{\Delta\omega}\frac{\sin\omega t}{t}\Bigg|_{\omega=\omega_1}^{\omega=\omega_2},$$

т. е.

$$\psi(t) = \frac{\sin\omega_2 t - \sin\omega_1 t}{\Delta\omega t} = \frac{\sin\omega_2 t - \sin\omega_1 t}{(\omega_2-\omega_1)t}. \tag{88}$$

В этом выражении числитель представляет собой суперпозицию двух колебаний, которая дает модулированное колебание с частотой модуляции $(\omega_2 - \omega_1)/2$. Знаменатель содержит множитель $t$, благодаря которому $\psi(t)$ имеет наибольшее значение при $t=0$. Представим выражение (88) в виде почти гармонического колебания со средней частотой $\omega_0$ и с медленно изменяющейся амплитудой:

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= {}^1\!/_2(\omega_2+\omega_1), \qquad {}^1\!/_2\Delta\omega = {}^1\!/_2(\omega_2-\omega_1), \\ \omega_2 &= \omega_0 + {}^1\!/_2\Delta\omega, \qquad \omega_1 = \omega_0 - {}^1\!/_2\Delta\omega; \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

$$\psi(t) = \frac{\sin(\omega_0 + {}^1\!/_2\Delta\omega)t - \sin(\omega_0 - {}^1\!/_2\Delta\omega)t}{\Delta\omega t} = \left[\frac{\sin {}^1\!/_2\Delta\omega t}{{}^1\!/_2\Delta\omega t}\right]\cos\omega_0 t. \tag{90}$$

Таким образом, $\psi(t)$ представляет собой «быстрое» колебание с медленно изменяющейся амплитудой $A(t)$:

$$\psi(t) = A(t)\cos\omega_0 t, \quad A(t) = \frac{\sin {}^1\!/_2\Delta\omega t}{{}^1\!/_2\Delta\omega t}. \tag{91}$$

Результат, представленный равенством (91), аналогичен результату, полученному в п. 6.3 для суперпозиции $N$ гармонических колебаний, частоты которых равномерно распределены между границами интервала $\omega_1$ и $\omega_2$. Если перейти к пределу, устремив $N$ к $\infty$, мы получим разложение (91). (См. формулы (57) и (58), п. 6.3.) Импульс $\psi(t)$ и его преобразование Фурье показаны на рис. 6.6.

Приложение. *«Прямоугольный» временной импульс.* Пусть функция $\psi(t)$ равна нулю всюду, кроме промежутка $\Delta t$, центрированного относительно $t_0$ и простирающегося от $t_1$ до $t_2$. В этом промежутке функция имеет постоянное значение, которое выбрано таким, чтобы интеграл от $\psi(t)$ по $t$ был равен единице:

$$\psi(t) = \frac{1}{\Delta t}, \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 = t_1 + \Delta t. \tag{92}$$

Найдем коэффициенты Фурье $A(\omega)$ и $B(\omega)$ для функции $\psi(t)$.



Если $t_0 = 0$, то $\psi(t)$ — четная функция времени, и поэтому $A(\omega)$ должно равняться нулю (так как $\sin\omega t$ — нечетная функция). Если $t_0 \neq 0$, то мы должны вычислять как $A(\omega)$, так и $B(\omega)$. Мы всегда можем облегчить вычисление, сместив ось времени, т. е. заменив $t$ на $t - t_0$. Так как $\psi(t)$ — четная функция от $t - t_0$, то мы имеем

$$\psi(t) = \int_0^\infty B(\omega)\cos\omega(t-t_0)\, d\omega, \tag{93}$$

где

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\cos\omega(t-t_0)\, dt. \tag{94}$$

Произведя это несложное интегрирование (задача 6.20), мы получим

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin {}^1\!/_2\Delta t\,\omega}{{}^1\!/_2\Delta t\,\omega}. \tag{95}$$

Прямоугольный импульс [функция (92)] и его фурье-коэффициент $B(\omega)$ показаны на рис. 6.10. Заметим, что если мы определяем $\Delta\omega$

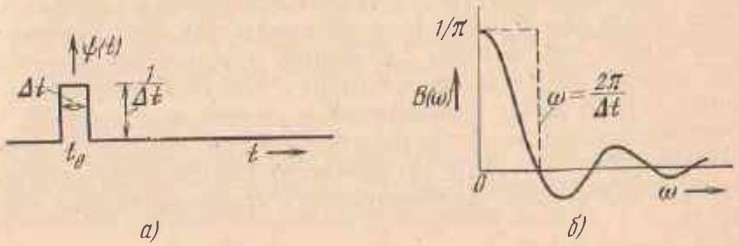



Рис. 6.10. Прямоугольный импульс $\psi(t)$ и его фурье-коэффициент $B(\omega)$.

как интервал, простирающийся от минимальной частоты (которая равна нулю) до частоты, соответствующей первому нулю в коэффициенте $B(\omega)$, то имеем

$$\Delta\omega\,\Delta t = 2\pi, \quad \Delta\nu\,\Delta t = 1. \tag{96}$$

*Фурье-анализ хлопка с помощью рояля.* Предположим, что мы хотим оценить длительность звука от хлопка руками. У нас нет ни микрофона, ни усилителя звуковых частот, ни осциллографа, но в нашем распоряжении находится рояль. Нажав на демпфирующую педаль (освободив тем самым все струны), расположим руки под поднятой крышкой рояля и хлопнем в ладоши. Рояль будет играть роль частотного анализатора. Оцените наивысший тон, для которого интенсивность звука достаточно велика. Можно сказать, что для этой частоты справедливо приближенное равенство $\nu \approx 1/\Delta t$. Этот пример, как следует из дальнейших рассуждений, дает нам дополнительное представление о смысле анализа Фурье.

С некоторым приближением мы можем считать, что воздушная волна давления длительностью $\Delta t$ воздействует на все струны в одно

и то же время и в одном направлении. Струны начинают колебаться с собственными частотами. Те струны, частоты которых малы по сравнению с $1/\Delta t$, совершат только часть полного колебания за время действия силы. Эти струны испытывают ускорение в течение всего времени $\Delta t$ действия силы. Струны с периодом, точно равным $\Delta t$, ускоряются волной давления в течение первой полуволны длительностью $\Delta t/2$ и тормозятся в течение следующей полуволны. Замедление и ускорение, получаемые струной за время $\Delta t/2$, равны по величине, и поэтому после прекращения действия силы струна не колеблется. Таким образом, струны с собственными частотами от нуля до значения несколько меньшего, чем $1/\Delta t$, возбуждаются с положительной амплитудой. Струна с частотой $1/\Delta t$ имеет нулевую амплитуду: эта частота определяет первый нуль для коэффициента $B(\omega)$ в выражении (95). Струны с частотами между $1/\Delta t$ и $2/\Delta t$ сделают от одного до двух полных колебаний за время $\Delta t$. Струна с частотой $2/\Delta t$ совершит за это время два полных колебания и успокоится. Эта частота соответствует второму нулю $B(\omega)$. Струна с частотой $1{,}5/\Delta t$ будет вести себя следующим образом: после окончания первого цикла колебаний на эту струну в течение первой половины второго цикла будет действовать сила того же направления. Эта струна получит $^1/_3$ часть импульса силы, так как она совершает три полуцикла собственных колебаний, причем вклады от двух из них взаимно уничтожаются. Струна с частотой собственных колебаний $^1/_2(1/\Delta t)$ за $\Delta t$ совершит лишь полцикла колебаний, а амплитуда ее должна быть в три раза больше, чем для струны с частотой колебаний $\nu = 1{,}5\,(1/\Delta t)$. Из равенства (95) следует, что коэффициент $B(\omega)$ для $\omega\,\Delta t = \pi$ действительно в три раза больше, чем для $\omega\,\Delta t = 3\pi$.

Этот пример показывает, что рояль или аналогичный музыкальный инструмент можно использовать в качестве частотного анализатора. (Мы пренебрегаем тем фактом, что связь воздуха со струнами может и не быть столь совершенной.) Заметим, что из пианино, используемого в качестве анализатора, очень трудно получить информацию о *фазе* колебаний. Однако для нашего уха фаза не представляет интереса. Это общая ситуация; часто нас не интересуют коэффициенты $A(\omega)$ и $B(\omega)$ по отдельности, так что мы можем ограничиться *интенсивностью* $I(\omega)$ фурье-разложения, которая определяется следующим образом:

$$I(\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega). \tag{97}$$

*Дельта-функция времени.* Если продолжительность $\Delta t$ прямоугольного импульса значительно короче периода колебания наибольшей частоты, который мы можем обнаружить, то коэффициент $B(\omega)$ постоянен для регистрируемого нами диапазона частот. Это утверждение можно пояснить при помощи рис. 6.10. Если устремить $\Delta t$ к нулю, то первый нуль функции $B(\omega)$ устремится к $+\infty$ и для любой частоты функция $B(\omega)$ будет равна $1/\pi$. Импульс, определяемый функцией (92), называется дельта-функцией времени, если $\Delta t$



достаточно мало. Например, наивысшая частота ноты рояля $\nu \approx 5000$ *гц*, и поэтому любой звуковой импульс длительностью меньше десятой миллисекунды будет возбуждать колебания всех струн. Нужно заметить, что с помощью рояля мы не сможем отличить этот звуковой импульс от звукового импульса, в десять раз большего по величине, длительность которого на порядок меньше. В обоих случаях конечный результат движения струн будет одинаков.

Приложение. *Затухающий гармонический осциллятор; естественная ширина линии.* Нас интересует частотный спектр, т. е. «форма линии» видимого света, испускаемого атомом, среднее время жизни которого порядка $\tau \approx 10^{-8}$ *сек*. Если бы нас интересовала лишь ширина спектральной линии, то ее легко определить, и мы знаем, что она порядка $1/\tau$, т. е. $10^8$ *гц*. Нас однако интересует большее, а именно детальная форма линии. Будем считать, что *моделью атома является затухающий гармонический осциллятор*. Это значит, что функция $\psi(t)$ равна нулю для всех $t < t = 0$, а при $t = 0$ действует скачкообразное возмущение и функция имеет вид

$$\psi(t) = e^{-{}^1/_2\Gamma t}\cos\omega_1 t. \tag{98}$$

(Мы полагаем постоянную амплитуду равной единице, чтобы сократить вычисления.) Коэффициент затухания обратно пропорционален среднему времени жизни атома:

$$\Gamma = 1/\tau. \tag{99}$$

Пусть частота колебаний нашей модели атома в отсутствие затухания равна $\omega_0$. Мы знаем (см. главу 3), что частота затухающих колебаний $\omega_1$ следующим образом связана с $\omega_0$ и $\Gamma$:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - {}^1/_4\Gamma^2. \tag{100}$$

Выразим равенство (98) с помощью интеграла Фурье:

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\sin\omega t\,d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega)\cos\omega t\,d\omega. \tag{101}$$

Имеем

$$2\pi A(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\sin\omega t\,dt = \int_0^{\infty} e^{-{}^1/_2\Gamma t}\,2\cos\omega_1 t\sin\omega t\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-{}^1/_2\Gamma t}\left[\sin(\omega+\omega_1)t + \sin(\omega-\omega_1)t\right]dt, \tag{102}$$

$$2\pi B(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\cos\omega t\,dt = \int_0^{\infty} e^{-{}^1/_2\Gamma t}\,2\cos\omega_1 t\cos\omega t\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-{}^1/_2\Gamma t}\left[\cos(\omega+\omega_1)t + \cos(\omega-\omega_1)t\right]dt. \tag{103}$$

В любой таблице определенных интегралов мы найдем

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{b^2+a^2}, \tag{104}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{a}{b^2+a^2}. \tag{105}$$

Равенства (102) и (103) дают

$$2\pi A(\omega)=\frac{(\omega+\omega_1)}{(\omega+\omega_1)^2+(1/2\Gamma)^2}+\frac{(\omega-\omega_1)}{(\omega-\omega_1)^2+(1/2\Gamma)^2}, \tag{106}$$

$$2\pi B(\omega)=\frac{1/2\Gamma}{(\omega+\omega_1)^2+(1/2\Gamma)^2}+\frac{1/2\Gamma}{(\omega-\omega_1)^2+(1/2\Gamma)^2}. \tag{107}$$

Воспользуемся равенством (100) для замены $\omega_1^2$ на $\omega_0^2$. После ряда преобразований получим

$$2\pi A(\omega)=\frac{2\omega(\omega^2-\omega_0^2)+\omega\Gamma^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{108}$$

$$2\pi B(\omega)=\frac{\Gamma(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{109}$$

$$I(\omega)\equiv[2\pi A(\omega)]^2+[2\pi B(\omega)]^2=\frac{4\omega^2+\Gamma^2}{(\omega_0^2-\omega^2)+\Gamma^2\omega^2}. \tag{110}$$

*Сравнение свободно затухающего колебания с вынужденным колебанием.* Интересно сравнить полученные результаты частотного фурье-анализа колебаний свободно затухающего гармонического осциллятора с результатами частотного анализа установившихся вынужденных колебаний. Приведем результаты, которые были получены для такой системы в п. 3.2 [равенства (3.17) и (3.32) — (3.35)]:

$$A_д(\omega)=\frac{F_0}{M}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{111}$$

$$A_п(\omega)=\frac{F_0}{M}\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{112}$$

$$|A|^2\equiv[A_д(\omega)]^2+[A_п(\omega)]^2=\frac{F_0^2}{M^2}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{113}$$

$$P(\omega)=\frac{1}{2}\frac{F_0^2}{M}\frac{\Gamma\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{114}$$

$$E(\omega)=\frac{1}{2}\frac{F_0^2}{M}\frac{1/2(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}. \tag{115}$$

Сравнивая эти выражения с формулами (108) и (109), мы видим, что коэффициент $B(\omega)$ для затухающих колебаний пропорционален запасенной энергии $E(\omega)$ вынужденных колебаний. Коэффициент $A(\omega)$ для затухающих колебаний состоит из двух слагаемых: одно из них пропорционально $\omega A_д(\omega)$, а второе пропорционально



$A_п(\omega)$. При достаточно слабом затухании слагаемое, пропорциональное $A_п$, пренебрежимо мало, за исключением значений $\omega$, очень близких к резонансу $\omega_0$; поэтому $A(\omega)$ в этом случае практически пропорционально $\omega A_д(\omega)$. Интенсивность $I(\omega)$, определяемая как $A^2(\omega)+B^2(\omega)$, состоит из двух частей: одна часть пропорциональна поглощаемой мощности $P(\omega)$, а вторая часть, при достаточно слабом затухании, т. е. при $\Gamma^2\ll\omega^2$, пренебрежимо мала. Поэтому можно считать, что интенсивность $I(\omega)$ для свободного затухания практически пропорциональна поглощаемой мощности $P(\omega)$ для вынужденных колебаний.

*Лоренцевская форма линии; связь с резонансной кривой.* В случае слабого затухания для $\omega$, близких к $\omega_0$, коэффициент $B(\omega)$ и интенсивность $I(\omega)$ пропорциональны функции $L(\omega)$:

$$L(\omega)=\frac{(1/2\Gamma)^2}{(\omega_0-\omega)^2+(1/2\Gamma)^2}. \tag{116}$$

Эта функция называется *лоренцевской формой линии*. Коэффициент затухания $\Gamma$ равен величине интервала частот, внутри которого $L(\omega)>1/2L(\omega_0)$. Этот интервал частот называется *шириной линии* $\Delta\omega$ частотного спектра, описывающего затухающие колебания:

$$(\Delta\omega)_{з.к}=\Gamma. \tag{117}$$

Лоренцевская форма линии (116) совпадает с брейт-вигнеровской резонансной кривой $R(\omega)$, которая дает (для слабого затухания) частотную зависимость величин $A_п(\omega)$, $|A|^2$, $E(\omega)$ и $P(\omega)$ при вынужденных колебаниях [равенство (3.36), п. 3.2)]:

$$R(\omega)=\frac{(1/2\Gamma)^2}{(\omega_0-\omega)^2+(1/2\Gamma)^2}. \tag{118}$$

Полная ширина резонанса на уровне половины максимального значения равна

$$(\Delta\omega)_{рез}=\Gamma. \tag{119}$$

Таким образом, мы пришли к замечательному выводу, что для слабо затухающего гармонического осциллятора (который мы взяли в качестве модели излучающего атома) *преобразование Фурье дает ту же частотную зависимость, что и резонансные характеристики вынужденных колебаний*:

$$\boxed{(\Delta\omega)_{з.к}=(\Delta\omega)_{рез}=\frac{1}{\tau_{з.к}}}. \tag{120}$$

*Измерение собственной частоты и полосы частот.* Тот факт, что фурье-преобразование для затухающих свободных колебаний совпадает с резонансной кривой для установившихся вынужденных колебаний, имеет важные экспериментальные следствия. Допустим, что мы хотим определить а) первую моду рояльной струны и б) энергию первого возбужденного состояния атома.

Рассмотрим три способа, которыми это можно сделать:

1. *Временна́я зависимость свободных колебаний.* В зависимости от того, с какой из двух систем мы имеем дело, мы можем воспользоваться либо молоточком рояля, либо столкновением атома с другим атомом для внезапного возбуждения системы в момент $t=0$. Произведя скоростные фотоснимки движения затухающего осциллятора, мы можем построить график смещения в зависимости от времени. Это возможно для рояльной струны, но для атома невозможно, даже в принципе. (В томе «Квантовая физика» будет показано, почему это невозможно.)

2. *Резонансная характеристика вынужденного колебания.* Пусть в установившемся режиме на систему воздействует гармоническая сила $F_0 \cos \omega t$. Будем менять частоту внешней силы и измерять поглощаемую мощность $P(\omega)$ как функцию частоты. Это можно

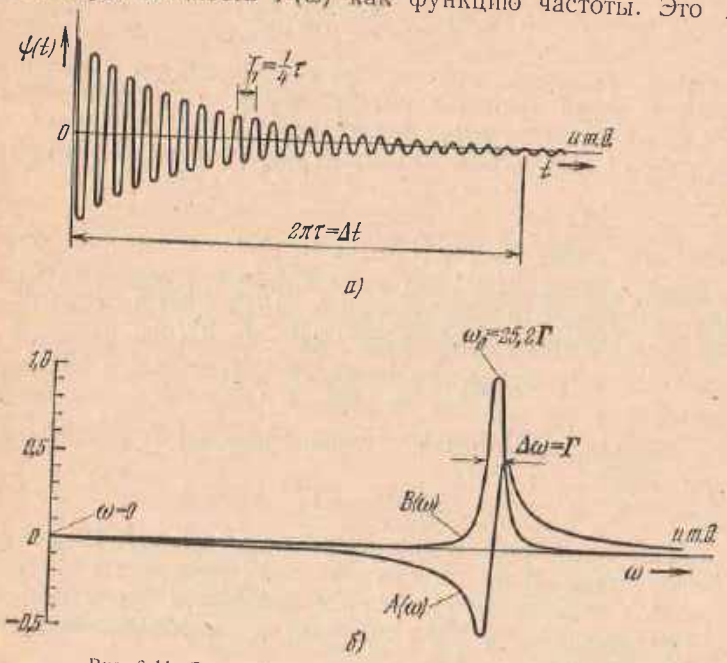



Рис. 6.11. Слабо затухающий гармонический осциллятор.

*а)* Импульс $\psi(t)=\exp[-\frac{1}{2}t/\tau]\cos\omega t$ при $\omega_0=8\pi\Gamma$, т. е. $\tau=4T_0$; *б)* фурье-коэффициенты для непрерывной суперпозиции гармонических членов.

$$\int_0^\infty [A(\omega)\sin\omega t+B(\omega)\cos\omega t]\,d\omega.$$

сделать не только для струны рояля, но и для некоторых возбужденных состояний атомов, если на них действует установившееся электромагнитное излучение. Снимая зависимость $P$ от $\omega$, можно найти $\omega_0$ и $\Gamma$.

3. *Фурье-анализ испускаемого спектра.* Выполним фурье-анализ излучения для системы, внезапно приведенной в возбужденное состояние. Это возможно как для струны рояля, так и для некоторых возбужденных состояний атома, если измерять частоты испускаемого атомом света. Легче всего измерить интенсивность излучения в зависимости от частоты. Эта величина пропорциональна интенсивности $I(\omega)$, получаемой из фурье-анализа. Зная функцию $I(\omega)$, мы можем получить частоту $\omega_0$ и ширину полосы $\Gamma$. На рис. 6.11 показаны затухающие колебания гармонического осциллятора и коэффициенты Фурье $A(\omega)$ и $B(\omega)$. Для того чтобы в произведении ширины полосы на интервал времени $\Delta\omega\,\Delta t \geqslant 2\pi$ получить точное равенство, мы должны определить длительность $\Delta t$ как произведение $2\pi$ на среднее время жизни $\tau$. Тогда равенство (120) примет вид $\Delta\omega\,\Delta t=2\pi$.

## 6.5. Фурье-анализ бегущих волновых пакетов

Предположим, что передатчик в точке $z=0$ воздействует на непрерывную, однородную, одномерную открытую систему таким образом, что волновая функция $\psi(z, t)$ бегущих волн в точке $z=0$ имеет известную зависимость от времени $f(t)$:

$$\psi(0, t)=f(t). \tag{121}$$

Любая «разумная» функция $f(t)$ может быть представлена суперпозицией гармонических колебаний. Если $f(t)$ не периодическая функция времени, то суперпозиция непрерывна (по частоте) и выражается через интеграл Фурье:

$$f(t)=\int_0^\infty [A(\omega)\sin\omega t+B(\omega)\cos\omega t]\,d\omega. \tag{122}$$

*Бегущие волны в однородной диспергирующей среде.* Каждая гармоническая составляющая суперпозиции (122) определяет свою собственную гармоническую бегущую волну с волновым числом $k$, значение которого следует из дисперсионного соотношения

$$k=k(\omega). \tag{123}$$

Каждая частотная составляющая бегущей волны распространяется со своей собственной фазовой скоростью

$$v_\Phi=\frac{\omega}{k(\omega)}. \tag{124}$$

Вся бегущая волна $\psi(z, t)$ является суперпозицией этих гармонических бегущих волн. Это значит, что мы получим $\psi(z, t)$ и $\psi(0, t)$ заменой $\omega t$ на $\omega t-kz=\omega t-k(\omega)z$ в каждой гармонической составляющей суперпозиции (122):

$$\psi(0, t)=\int_{\omega=0}^\infty [A(\omega)\sin\omega t+B(\omega)\cos\omega t]\,d\omega, \tag{125}$$

$$\psi(z, t)=\int_{\omega=0}^\infty \{A(\omega)\sin[\omega t-k(\omega)z]+B(\omega)\cos[\omega t-k(\omega)z]\}\,d\omega. \tag{126}$$

В общем случае диспергирующих сред фазовая скорость $v_\Phi$ зависит от частоты $\omega$. Поэтому форма $\psi(z,\ t)$ не остается постоянной с течением времени.

*Недиспергирующие волны (специальный случай).* Для особого случая, когда фазовая скорость $v_\Phi$ не зависит от частоты, волновая функция $\psi(z,\ t)$ имеет одну и ту же форму для всех $t$. Этот результат можно получить из общего выражения (126) следующим образом. Пусть $v$ — фазовая скорость, одинаковая для всех гармоник:

$$v=\frac{\omega}{k(\omega)},\quad \text{т. е.}\quad k(\omega)=\frac{\omega}{v}. \tag{127}$$

Тогда уравнение (126) примет вид

$$\psi(z,\ t)=\int_0^\infty\left[A(\omega)\sin\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)+B(\omega)\cos\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)\right]d\omega, \tag{128}$$

где $v$ постоянна (по предположению), т. е. не зависит от частоты. Мы видим, что каждый член суперпозиции (128) получается из суперпозиции (125), соответствующей $\psi(0,\ t)$, простой заменой $t$ в $\psi(0,\ t)$ на $t-(z/v)$. Таким образом, для недиспергирующих волн имеем

$$\psi(z,\ t)=\psi(0,\ t'),\quad t'\equiv t-\frac{z}{v}. \tag{129}$$

Заметим, что в этом случае нет необходимости иметь дело с преобразованием Фурье. Зная $\psi(0,\ t)$, мы всегда сможем получить $\psi(z,\ t)$, используя равенство (129). Смысл этого равенства заключается в том, что бегущая волна в недиспергирующей среде не изменяет свою форму. Это значит, что смещение (или электрическое поле, или какой-нибудь другой параметр) в какой-то точке имеет то же значение во время $t$, что и смещение в $z=0$ во время $t-(z/v)$.

Примером недиспергирующих волн являются, например, слышимые звуковые волны или волны света в вакууме. Пусть в точке $z=0$ смещение равно

$$\psi(0,\ t)=Ae^{-(1/2)\,t^2/\tau^2}. \tag{130}$$

Выражение (130) представляет собой *импульс в форме гауссовской кривой*. Он имеет максимум при $t=0$ и очень быстро уменьшается для $t<0$ и $t>0$ (уменьшение практически до нуля происходит в пределах нескольких значений $\tau$). Мы могли бы применить преобразование Фурье к уравнению (130), однако в этом нет необходимости, поскольку, по предположению, среда недиспергирующая, и мы можем сразу же написать выражение для бегущей волны:

$$\psi(z,\ t)=\psi(0,\ t')=Ae^{-(1/2)\,(t')^2/\tau^2}=Ae^{-(1/2)\,[t-(z/v)]^2/\tau^2}. \tag{131}$$

*Недиспергирующие волны и классическое волновое уравнение.* Любая гармоническая бегущая волна вида

$$\psi(z,\ t)=A\cos\left[\omega t-k(\omega)\,z\right] \tag{132}$$

удовлетворяет (покажите это) дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2\psi(z,\ t)}{\partial t^2}=\frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2\psi(z,\ t)}{\partial z^2}=v_\Phi^2(\omega)\frac{\partial^2\psi(z,\ t)}{\partial z^2}. \tag{133}$$



Для специального случая (недиспергирующих волн) имеем $v_\Phi=v$, т. е. скорость постоянна и не зависит от частоты. В этом случае каждый член в суперпозиции бегущих гармонических волн [см., например, разложение (128)] удовлетворяет одному и тому же дифференциальному уравнению:

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi(z,\ t)}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2\psi(z,\ t)}{\partial z^2}}, \tag{134}$$

где через $\psi(z,\ t)$ обозначена любая из гармонических бегущих волн суперпозиции (128). Так как каждый член суперпозиции (128) удовлетворяет уравнению (134), то оно справедливо и для всей суперпозиции, т. е. общая волновая функция $\psi(z,\ t)$ удовлетворяет уравнению (134). Это уравнение в частных производных называется *классическим волновым уравнением для недиспергирующих волн* или просто *классическим волновым уравнением*.

*Волны, сохраняющие свою форму, удовлетворяют классическому волновому уравнению.* Любая бегущая волна, сохраняющая свою форму по мере распространения, должна удовлетворять уравнению (134). Предположим, что задано $\psi(0,\ t)=f(t)$ и мы знаем, что волна распространяется, сохраняя свою форму, т. е.

$$\psi(z,\ t)=f(t'),\quad t'\equiv t-\frac{z}{v}. \tag{135}$$

Можно показать, что функция $\psi(z,\ t)$, определяемая выражением (135), удовлетворяет классическому волновому уравнению (задача 6.26). Очевидно, что любая недиспергирующая бегущая волна, распространяющаяся в направлении $-z$, также удовлетворяет этому уравнению. Это видно, если заменить $v$ на $-v$ в производных. Далее, любая суперпозиция недиспергирующих бегущих волн, распространяющихся в обоих направлениях, также удовлетворяет классическому волновому уравнению, поскольку все члены суперпозиции удовлетворяют ему.

Гармоническая стоячая волна вида

$$\psi(z,\ t)=A\cos k(z-z_0)\cos\omega(t-t_0)$$

также удовлетворяет уравнению (133), что легко показать. Если среда недиспергирующая, то все гармонические стоячие волны удовлетворяют уравнению (134). Это следует из уравнения (135), если $v_\Phi=v$ для всех частот. (Для стоячих волн $v_\Phi$ означает $\omega/k$, хотя понятие фазовой скорости не будет естественным параметром для описания стоячих волн.) Это также следует из того факта, что стоячая волна может быть представлена суперпозицией бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Напомним, что впервые с классическим волновым уравнением мы встретились в п. 2.2 при изучении стоячих волн в непрерывной струне.

**6.1.** Покажите, что суперпозиция двух гармонических бегущих волн $A_1\cos(\omega t-kz+\varphi_1)$ и $A_2\cos(\omega t-kz+\varphi_2)$, распространяющихся в направлении $+z$ и *имеющих одинаковую частоту* $\omega$, представляет собой гармоническую бегущую волну того же типа. Покажите, что эта сумма может быть записана в виде $A\cos(\omega t-kz+\varphi)$. Найдите, как $A$ и $\varphi$ связаны с $A_1$, $A_2$, $\varphi_1$ и $\varphi_2$. (Совет. Удобно воспользоваться комплексными числами или векторной диаграммой.)

**6.2.** Рассмотрим электромагнитное излучение в среде с диэлектрической постоянной $\varepsilon(\omega)$. Положим, что магнитная проницаемость $\mu=1$. Тогда $n(\omega)=[\varepsilon(\omega)]^{1/2}$. В соответствии с теорией относительности сигнал не может распространяться со скоростью, большей чем $c=3{,}0\cdot10^{10}$ *см/сек*. Какое ограничение накладывает это условие на возможную зависимость $\varepsilon$ от $\omega$? (Считаем, что $\varepsilon(\omega)$ положительно для всех $\omega$.)

Ответ. $\omega(dn/d\omega)+(n-1)\geqslant0$.

**6.3.** Опыт. Определите приблизительно полосу частот в широковещательном диапазоне вашего приемника, работающего на АМ, поворачивая настроечный лимб и наблюдая крайние значения шкалы для приема данной станции. Как согласуется полученный вами результат с тем, что для перекрытия обеих боковых полос, необходимого для высококачественного воспроизведения звука, нужна полоса частот $\Delta\nu\approx40$ *кгц*?

**6.4.** Туба (большая басовая труба) может издавать очень низкие звуки, например звук $C_1$ с частотой 32,7 *гц*. (Самое низкое С у рояля обозначается $C_1$.) На флейте можно взять очень высокий звук; самая высокая нота у флейты — это нота $C_7$ с частотой 2093 *гц* (это на одну октаву ниже самой высокой ноты рояля). Каждая нота, при равномерной настройке инструмента, отличается по частоте от предыдущей в 1,06 раза (т. е. на 6%). На флейте можно играть очень быстро, на тубе нельзя. Зависит ли это от того, кто играет на тубе, или от свойств самой тубы? Можно ли переделать тубу так, чтобы на ней можно было играть так же быстро, как на флейте? Оцените максимальную скорость, с которой можно играть на тубе в районе ноты С32,7 и на флейте в районе ноты С2093? Очевидно, вы должны вначале «запастись» разумным музыкальным критерием, а потом уже решать задачу.

Ответ. 2 *ноты/сек* для тубы; 120 *нот/сек* для флейты.

**6.5.** Человек приносит свой АМ-приемник в мастерскую и жалуется на то, что настройка недостаточно хорошая. Он хочет, чтобы положение данной станции было очень «резко» определено на лимбе. Его просьбу удовлетворяют. Через некоторое время он опять приносит свой приемник. На что он жалуется теперь?

**6.6.** а) Одним из способов определения скорости звука в воздухе является измерение интервала времени между хлопком и эхом от известного отражателя. Другой способ — это определение длины картонной трубы, резонирующей на известной частоте (с учетом краевых эффектов). Какая скорость определяется этими способами: фазовая или групповая?

б) Одним из способов измерения скорости света является определение времени прохождения прерывающимся лучом известного расстояния от одного пункта до другого и обратно (после отражения от зеркала). Другой способ — это нахождение длины полости, резонансная частота и мода колебаний которой известны. Какая скорость определяется этими методами: фазовая или групповая?

**6.7.** Покажите, что если показатель преломления света равен $n(\lambda)$, то

$$\frac{1}{v_{\text{гр}}}=\frac{1}{v_{\text{ф}}}-\frac{1}{c}\,\lambda\,\frac{dn(\lambda)}{d\lambda},$$

где $\lambda$ — длина волны света в вакууме.

**6.8.** В таблицах для скорости света в вакууме дано значение $c=(2{,}997925\pm0{,}000001)\cdot10^{10}$ *см/сек*. Предположим, что вы измеряете скорость света, определяя время прохождения прерывающимся лучом расстояния от одного пункта до другого и обратно (после отражения от зеркала). Вначале вы пренебрегали тем, что луч распространяется в воздухе, а не в вакууме. Теперь определите поправку, которую нужно ввести, чтобы из измеренной скорости получить скорость света в вакууме, предполагая, что свет распространяется в воздухе с фазовой скоростью. (Для показателя преломления воздуха возьмите значение $n=1+0{,}3\cdot10^{-3}$.) Повторите вычисление поправки, предполагая, что свет распространяется в воздухе с групповой скоростью. Чтобы оценить поправку в этом случае, воспользуйтесь результатами задачи 6.7 и предположите, что молекула воздуха неотличима от молекулы стекла. Если бы плотность числа молекул в воздухе и стекле была одинаковой, вы могли бы получить значение $dn/d\lambda$ из табл. 4.2 п. 4.3. В действительности для воздуха плотность равна $N\approx2{,}7\cdot10^{19}$ *молекул/см*$^3$, а для стекла $N\approx2{,}6\times10^{22}$ *молекул/см*$^3$. Найдите $dn/d\lambda$ для воздуха (для желтого света), используя табл. 4.2 и соответствующую поправку для плотности. Зависит ли результат от того, какую из двух поправок вы используете (имея в виду точность определения скорости света)? Какую поправку следует использовать?

**6.9.** Покажите, что для затухающего гармонического осциллятора время затухания $\tau$ равно

$$\frac{1}{\tau}=\frac{1}{E_{\text{запас}}}\,\frac{dE_{\text{потер}}}{dt}.$$

**6.10.** Предположим, что вы ударили по картонной трубке. В течение короткого времени вы слышите ноту, соответствующую самой первой моде. Предположим, что мы имеем дело с затухающими гармоническими колебаниями и можем говорить о некотором времени затухания $\tau$. Удвоим длину трубки. Частота моды уменьшится в два раза. Предположим, однако, что вы возбуждаете трубку так, что в ней происходят колебания с первоначальной частотой (эта частота соответствует теперь второй моде удлиненной трубки). Считаем, что после быстрого возбуждения воздух совершает свободные затухающие колебания.

а) Предположим, что все потери энергии определяются излучением с концов трубки. Сравните новое время затухания со старым.

б) Предположим, что диаметр трубки настолько мал, что потеря энергии на концах трубки пренебрежимо мала по сравнению с потерей на трение вдоль стенок трубки и излучением от боковых поверхностей трубки. Сравните новое и старое время затухания.

в) Предположим, что, воздействуя на новую и старую трубки одинаковым параметром (частота колебаний которого соответствует частоте самой низкой моды первоначальной коротгой трубки) и изменяя длину трубки с помощью бумажного «тромбона», вы измеряете ширину резонансной полосы новой и старой трубок. Сравните полосу длины $\Delta L$ для двух случаев, упомянутых выше. Найдите связь между $\Delta L$ и полной полосой частот. Используйте результаты задачи 6.9.

**6.11.** Опыт. *Волновые пакеты на воде.* Лучшим способом уяснения разницы между групповой и фазовой скоростями является наблюдение волновых пакетов на поверхности воды. Чтобы образовать расходящиеся круговые волновые пакеты с преобладающей длиной волны 3—4 *см* или больше, бросьте в бассейн или пруд большой камень. Чтобы создать прямые волны (двухмерный аналог трехмерных плоских волн), опустите в ванну или большой таз деревянный прут и резко ударьте по нему несколько раз в вертикальном направлении. После некоторой практики вы заметите, что для этих пакетов фазовая скорость больше групповой. (См. табл. 6.1, п. 6.2.) Вы увидите небольшие волны, возникающие на заднем конце пакета, проходящие через пакет и исчезающие впереди. (Это требует небольшой практики, так как волны распространяются достаточно быстро.) Такие волны можно также образовать, поместив на конце ванны доску и постукивая по ней.

Чтобы создать волны миллиметровой длины (волны поверхностного натяжения), используйте глазную пипетку, наполненную водой. Пусть на поверхность воды в тазу падает капля из пипетки с высоты в несколько миллиметров. В этом случае будут возникать волны с доминирующей длиной в несколько миллиметров. Чтобы убедиться в том, что эти волны возникают благодаря поверхностному натяжению, добавьте в воду немного мыла и повторите опыт. Вы заметите уменьшение групповой скорости. Чтобы убедиться в том, что более длинные волны вызваны не поверхностным натяжением, можно повторить этот опыт с длинными волнами. Для увеличения длины основной волны в группе капля должна падать с большей высоты.

Покажем, как убедиться (без сложных измерений), что миллиметровые волны имеют бо́льшую групповую скорость, чем сантиметровые или еще более длинные волны.

Образуйте пакет, содержащий как миллиметровые, так и сантиметровые волны, капнув в круглый таз, до краев наполненный водой, каплю с высоты примерно 30 *см*. Обратите внимание на то, что после отражения от края таза группа приходит в фокус, находящийся в точке, сопряженной с точкой, в которую упала капля. (Под двумя сопряженными точками мы подразумеваем точки на диаметре круга, расположенные по обе стороны от центра, на равных расстояниях от него.) Когда пакет проходит через сопряженный фокус, то образуется временная стоячая волна (точно так же, как образуется временная стоячая волна, когда волновой пакет распространяется по «пружине», конец которой привязан к стене, а на другом конце возбуждаются волновые пакеты). Это дает вам возможность оценить среднее время прибытия пакета (в фокус). Есть ли разница во временах прибытия коротковолновых и длинноволновых составляющих пакета? Этот эффект трудно измерить, но легко наблюдать.

Опыт, который мы не сделали, должен был бы заключаться в образовании волновых пакетов с определенной длиной волны и групповой скоростью в равномерно текущем потоке, скорость которого равна групповой скорости пакета. В этом случае пакет будет оставаться практически на одном месте относительно покоящегося наблюдателя. Конечно, это наиболее наглядный способ изучения волновых пакетов.

**6.12.** Опыт. *Волновые пакеты в мелкой воде; приливные волны.* В задаче 2.31 вы изучали закон дисперсии для пилообразных стоячих волн в мелкой воде и получили, что $v_\Phi \approx 1{,}1\sqrt{gh}$. Для синусоидальных волн в мелкой воде фазовая скорость равна $v_\Phi = \sqrt{gh}$. Таким образом, волны в мелкой воде не имеют дисперсии. (Фазовая скорость не зависит от длины волны). Теперь вместо стоячих волн рассмотрим волновые пакеты, распространяющиеся по мелкой воде. Так как волны недиспергирующие, то одна «отдельная волна» или «приливная волна» будет распространяться без изменения своей формы (в первом приближении). Такие волны могут быть возбуждены подводными землетрясениями в океане. В этом случае они называются «цуна́ми». Средняя глубина океана близка к 5 *км* ($h = 5 \cdot 10^5$ *см*). Поэтому приливные волны с длиной, много большей 5 *км*, можно считать волнами в мелкой воде. В океане цуна́ми распространяется со скоростью

$$v = \sqrt{gh} = \sqrt{980 \cdot 5 \cdot 10^5} = 2{,}2 \cdot 10^4 = 220 \text{ м/сек} = 790 \text{ км/ч},$$

что несколько меньше скорости обычного реактивного самолета. Сколько времени нужно такой волне, чтобы пройти расстояние от Аляски до Гавайев?

В 1883 г. произошло извержение вулкана Кракатау, сопровождавшееся самым большим в мире взрывом. (Кракатау расположен в Зондском проливе, между островами Суматрой и Явой. Описание этого взрыва можно найти в энциклопедии.) Образовались огромные приливные и атмосферные волны. Недавно было обнаружено существование воздушных бегущих волн, распространяющихся со скоростью 220 *м/сек*. (Напомним, что скорость звука при 0 °C равна 332 *м/сек*.) Существование этих воздушных волн, возможно, объясняет, почему приливные водяные волны от взрыва появлялись с обратной стороны материков, которые должны были бы блокировать прохождение водяных волн. По-видимому, приливные волны «перепрыгивали» материковые массивы, будучи связанными с воздушными волнами, имеющими ту же скорость (и то же время возбуждения) *).

Вы можете создать свои собственные мелководные приливные волны. Возьмите квадратный сосуд со стороной около 50 *см*. Наполните его водой на глубину $^1/_2 \div 1$ *см*. Резко толкните сосуд (или поднимите один конец сосуда и неожиданно бросьте его). Таким образом вы создадите два бегущих волновых пакета на двух концах сосуда, распространяющихся в противоположных направлениях. Следите за бо́льшим из двух пакетов. Измерьте скорость пакета, засекая время прохождения пакетом нескольких длин сосуда. Воспользуйтесь секундомером. Можно также считать хлопки, которые соответствуют удару пакета о стенки сосуда, запоминая «музыкальный темп» и измеряя его с помощью часов. Насколько хорошо согласуются ваши результаты со значением скорости $v = \sqrt{gh}$? Увеличивая глубину воды, вы постепенно дойдете до глубины, когда волны уже не будут мелководными. В этом случае дисперсионное соотношение постепенно переходит в дисперсионное соотношение для глубоководных гравитационных волн $\omega^2 = gk$, т. е.

$$v_\Phi = \lambda\nu = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

(Мы выведем это соотношение в главе 7.) Таким образом, волновой пакет будет распространяться, не сохраняя свою форму. Для достаточно мелкой воды (глубина меньше 1 *см*) форма пакета сохраняется очень хорошо на нескольких метрах.

Наконец, возбудите бегущую приливную волну в ванне, «толкнув с помощью доски сразу всю воду на одном конце ванны. Измерьте время распространения волны «туда и обратно» и определите скорость. Равна ли она $\sqrt{gh}$?

**6.13.** Опыт. *Музыкальные трели и полоса частот.* Для этого опыта необходим рояль. Возьмите трель на двух соседних нотах (отличающихся на полтона). Начните с двух высоких нот. Перебирайте две соседние клавиши медленно, затем так быстро, как только можете. Оцените частоту трели. Можете ли вы еще различить обе ноты в трели? Теперь возьмите трель на двух соседних басовых нотах, перебирая клавиши вначале очень медленно, затем все более быстро. Существует ли частота трели, начиная с которой звучание двух нот переходит в беспорядочную, неразличимую смесь? Оцените эту частоту. Теперь сделайте расчет и решите, насколько хорошо ваше ухо и мозг различают два отдельных максимума в разложении Фурье в том случае, когда ширина пиков по частоте (измеренная на уровне половинной мощности) не мала по сравнению с расстоянием (по частоте) между максимумами пиков.

**6.14.** *Групповая скорость за граничными частотами.* Покажите, что для системы связанных маятников групповая скорость на частотах, меньших нижней граничной частоты и больших верхней граничной частоты, равна нулю. Чему равна фазовая скорость на двух этих частотах? Нарисуйте график дисперсионного соотношения, т. е. график зависимости $\omega$ от $k$. Покажите, как из этой диаграммы можно определить фазовую и групповую скорости.

**6.15.** *Фурье-анализ экспоненциальной функции.* Рассмотрим функцию $f(t)$, которая равна нулю для отрицательных $t$ и равна $\exp(-t/2t)$ для $t \geqslant 0$. Найдите коэффициенты Фурье $A(\omega)$ и $B(\omega)$ этой функции в случае представления $f(t)$ непрерывной суперпозицией (интегралом Фурье):

$$f(t) = \int_0^\infty [A(\omega)\sin\omega t + B(\omega)\cos\omega t]\, d\omega.$$

**6.16.** *Фурье-анализ одного колебания синусоидальной волны.* Предположим, что функция $f(t)$ равна нулю всюду, за исключением интервала от $t = t_1$ до $t = t_2$. Предположим далее, что на интервале $\Delta t = t_2 - t_1$ функция $f(t)$ совершает точно одно синусоидальное колебание с угловой частотой $\omega_0$ (т. е. $\Delta t = T_0 = 2\pi/\omega_0$), причем на концах интервала функция имеет нулевые значения. Найдите коэффициенты Фурье $A(\omega)$ и $B(\omega)$ в случае представления этой функции интегралом Фурье:

$$f(t) = \int_0^\infty [A(\omega)\sin\omega(t - t_0) + B(\omega)\cos\omega(t - t_0)]\, d\omega.$$

Нарисуйте примерный график зависимости коэффициентов Фурье от $\omega$. Нарисуйте также функцию $f(t)$.

**6.17.** *Струна с грузами.* Выведите выражения для групповой скорости бегущих волн в струне с грузами. Нарисуйте (грубо) график дисперсионного соотношения для струны с грузами при изменении $k$ от $k = 0$ до максимального значения. Нарисуйте (грубо) график зависимости групповой скорости от $k$ и график зависимости фазовой скорости от $k$ для $0 < k < k_{\text{макс}}$.

*) См. статью: F. Press, D. Harkrider, Air-Sea Waves from the Explosion of Krakatoa, Science **154**, 1325 (Dec. 9, 1966).

**6.18.** *Фазовая и групповая скорости света в стекле.* Предположим, что дисперсия определяется одним резонансом. Пренебрегая затуханием, имеем

$$c^2k^2 = \omega^2\left(1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right), \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m},$$

где $N$ — число резонирующих электронов в единице объема.

а) Нарисуйте график зависимости квадрата показателя преломления $n^2$ от $\omega$ для $0 \leqslant \omega < \infty$. Важными параметрами этого графика являются его значения и наклон при $\omega = 0$, при $\omega$, чуть меньшем и чуть большем $\omega_0$, при $\omega = \sqrt{\omega_0^2+\omega_p^2}$ и при $\omega$, равном бесконечности. Как вы объясните область, где $n^2$ отрицательно? область около $\omega_0$?

б) Выведите следующую формулу для квадрата групповой скорости:

$$\left(\frac{v_{\text{гр}}}{c}\right)^2 = \frac{1+\dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}}{\left[1+\dfrac{\omega_p^2\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\right]^2}.$$

Постройте зависимость $(v_{\text{гр}}/c)^2$ от $\omega$. Покажите, что $(v_{\text{гр}}/c)^2$ всегда меньше, чем единица, что является требованием теории относительности. Покажите, что $v_{\text{гр}}^2$ отрицательно в том же диапазоне частот, где $n^2$ отрицательно. Для какой частоты групповая скорость максимальна? Чему равна групповая скорость на этой частоте?

**6.19.** *Фазовая и групповая скорости в глубокой воде.* Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = gk + \frac{Tk^3}{\rho},$$

где $g = 980$, $T = 72$ и $\rho = 1{,}0$ (все в единицах СГС). Выведите формулу для групповой и фазовой скорости. Покажите, что групповая скорость равна фазовой, когда $gk$ и $Tk^3/\rho$ равны, и что это имеет место для длины волны 1,7 *см* и скорости 23,1 *см/сек*. Покажите, что для *волн поверхностного натяжения*, т. е. волн с длиной, значительно меньшей 1,7 *см*, групповая скорость равна фазовой, умноженной на 1,5. Покажите, что для *гравитационных волн*, т. е. волн с длиной волны значительно большей, чем 1,7 *см*, групповая скорость равна половине фазовой. Продолжите табл. 6.1 из п. 6.2, включив в нее волны с длиной 128 *м* и 256 *м*. Значение скоростей дайте в *км/ч*.

**6.20.** *Фурье-анализ одиночного прямоугольного импульса.* Рассмотрим прямоугольный импульс $\psi(t)$, равный нулю для всех $t$, кроме интервала от $t_1$ до $t_2$. Внутри этого интервала $\psi(t)$ имеет постоянное значение $1/\Delta t$, где $\Delta t = t_2 - t_1$. Пусть $t_0$ — время в центре этого интервала. Покажите, что функция $\psi(t)$ может быть представлена следующим образом:

$$\psi(t) = \int_0^\infty A(\omega)\sin\omega(t-t_0)\,d\omega + \int_0^\infty B(\omega)\cos\omega(t-t_0)\,d\omega,$$

где

$$A(\omega) = 0, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin {}^1\!/_2\Delta t\omega}{{}^1\!/_2\Delta t\omega}.$$

Постройте график зависимости $B$ от $\omega$. В пределе, когда $\Delta t$ стремится к нулю, $\psi(t)$ стремится к дельта-функции, которую обозначим $\delta(t-t_0)$. Чему равно $B(\omega)$ для дельта-функции?

**6.21.** *Фурье-анализ цуга синусоидальных колебаний.* Пусть функция $\psi(t)$ равна нулю вне интервала, простирающегося от $t_1$ до $t_2$. Длина интервала равна $\Delta t = t_2 - t_1$, а центральное значение $t_0 = {}^1\!/_2(t_1+t_2)$. Положим, что $\psi(t) = \cos\omega(t-t_0)$ внутри этого интервала.



а) Покажите, что $\psi(t)$ может быть записана в виде

$$\psi(t) = \int_0^\infty B(\omega)\cos\omega(t-t_0)\,d\omega,$$

$$\pi B(\omega) = \frac{\sin[(\omega_0+\omega)\,{}^1\!/_2\Delta t]}{\omega_0+\omega} + \frac{\sin[(\omega_0-\omega)\,{}^1\!/_2\Delta t]}{\omega_0-\omega}.$$

б) Покажите, что если $\Delta t$ значительно меньше любого периода, которым мы интересуемся, то $\pi B(\omega)$ имеет постоянное значение, равное $\Delta t$.

в) Покажите, что если $\Delta t$ содержит много колебаний, т. е. если $\omega_0\Delta t \gg 1$, то для $\omega$, достаточно близкого к $\omega_0$, коэффициент $B(\omega)$ практически определяется одним вторым членом:

$$\pi B(\omega) \approx \frac{\sin[(\omega_0-\omega)\,{}^1\!/_2\Delta t]}{\omega_0-\omega}, \quad |\omega_0-\omega| \ll |\omega_0+\omega|.$$

г) Постройте графики $\psi(t)$ и $B(\omega)$ для случая в). Эта задача поможет нам понять *расширение* спектральных линий *из-за столкновений*. Невозмущенный атом, испускающий почти монохроматический видимый свет, имеет среднее время высвечивания порядка $10^{-8}$ *сек*. Поэтому спектр Фурье этого излучения занимает полосу частот шириной $\Delta\nu \sim 10^8$ *гц*. Если атомы находятся в газоразрядной лампе, то полоса частот испускаемого света (или «ширина линии» в оптической терминологии) оказывается порядка $10^9$ *гц*, а не $10^8$ *гц*. Такое *расширение спектральной линии* отчасти связано с тем, что атомы претерпевают *столкновения*, которые приводят к резкому изменению амплитуды и фазы. Действие столкновения аналогично внезапному прекращению гармонического колебания. Данный атом может провести большую часть времени «невозбужденным». Неожиданно он возбуждается, и колебания элементов в возбужденном атоме соответствуют колебаниям затухающего гармонического осциллятора с временем затухания порядка $10^{-8}$ *сек* (мы рассуждаем классически; более точная картина требует знания квантовой механики). Однако в течение времени $\Delta t$, равного примерно $10^{-9}$ *сек* (в типичном газоразрядном световом источнике), атом испытывает столкновение, в результате которого колебание обрывается случайным образом. Если сложить свет от многих атомов, то полоса частот $\Delta\nu$ определится как $\Delta\nu \approx (1/\Delta t) \approx 10^9$ *гц*.

**6.22.** *Фурье-анализ почти периодически повторяющегося прямоугольного импульса.* Одиночный прямоугольный импульс длительностью $\Delta t$ имеет непрерывный частотный спектр. Наиболее важная его часть заключена в пределах частот от нуля до $\nu_{\text{макс}} = \Delta\nu$, где $\Delta\nu = 1/\Delta t$. (См. задачу 6.20.) Периодически повторяющийся прямоугольный импульс длительностью $\Delta t$, с периодом повторения $T_1$ ($T_1 > \Delta t$), дает *дискретный* частотный спектр, состоящий из *гармоник* (целых кратных) частоты $\nu_1 = 1/T_1$. Наиболее важная часть этого спектра простирается от нуля до $\nu_{\text{макс}} = \Delta\nu$, где $\Delta\nu \approx 1/\Delta t$. (См. задачу 2.30.)

Теперь рассмотрим «почти периодически» повторяющийся прямоугольный импульс длительностью $\Delta t$ с периодом $T_1$. Время $T_{\text{повт}}$, в течение которого происходит многократное повторение импульсов, конечно, больше периода $T_1$. Если бы $T_{\text{повт}}$ было бесконечно, то мы имели бы периодически повторяющийся прямоугольный импульс, что соответствует рассмотренному выше случаю. При этом каждая гармоника была бы бесконечно узкой (по частоте).

а) Покажите, что для конечного значения $T_{\text{повт}}$ спектр Фурье почти периодического прямоугольного импульса представляется суперпозицией почти дискретных гармоник основной частоты $\nu_1 = 1/T_1$. В действительности каждая гармоника представлена узкой полосой частот шириной $\delta\nu \approx 1/T_{\text{повт}}$. Наиболее «важные» гармоники лежат между нулем и $\nu_{\text{макс}} \approx 1/\Delta t$. Нет необходимости заниматься интегрированием, используйте качественные рассуждения.

б) Нарисуйте графики, передающие форму $\psi(t)$ и фурье-коэффициентов $A(\omega)$ и $B(\omega)$.

**6.23.** *Фиксация мод лазера для получения узких импульсов видимого света.* (Сначала сделайте задачу 6.22.) Схематически лазер можно представить в виде некоторой области длиной $L$, на концах которой установлены зеркала для отражения света «туда и обратно». При соответствующих условиях, когда область $L$ заполнения света «туда и обратно». При соответствующих условиях, когда область $L$ заполнения

нена возбужденными атомами, излучение от каждого атома стимулирует излучение других возбужденных атомов, причем фазовые соотношения между всеми излучающими атомами таковы, что в сумме для излучения по длине лазера имеет место конструктивная интерференция. При этом все атомы колеблются в фазе и колебания атомов плюс излучение (имеется в виду излучение между зеркалами) соответствуют *нормальной моде* всей системы в целом. Частоты возможных нормальных мод свободных колебаний являются гармониками основной частоты $\nu_1$. Период $T_1 = 1/\nu_1$ определяет время, необходимое для прохождения света туда и обратно между зеркалами, т. е. $T_1 = 2L/(c/n)$, где $n$—показатель преломления. Тогда $\nu_1 = 1/T_1$ и возможные моды имеют частоты $\nu = m\nu_1$, где $m = 1, 2, 3$ и т. д. Далее, если бы не было зеркал, то возбужденные атомы независимо испускали бы свое обычное излучение (свет). Для лазера, наполненного газовой смесью гелий — неон, это излучение соответствует красному свету с длиной волны 6328 Å. Время затухания для отдельного атома в этом случае составляет примерно $10^{-9}$ *сек*, что дает полосу частот $\Delta\nu$ порядка $10^9$ *гц*. Однако если возбуждена нормальная мода всей системы (атомы плюс излучение, т. е. присутствуют зеркала), то время затухания для этой моды значительно больше, чем время затухания $\tau$ отдельного атома. Затухание моды вызвано утечкой света (излучения) через зеркала, отклонением пучка света от параллельности и другими причинами. Время затухания $T_{\text{затух}}$ может быть в сотни и тысячи раз больше времени высвечивания свободного атома. Это означает, что каждая мода имеет полосу частот $\delta\nu = 1/T_{\text{затух}}$, которая в сотни и тысячи раз уже естественной ширины линии $\Delta\nu$. Однако естественная ширина линии $\Delta\nu$ играет важную роль. Поскольку именно свободно высвечивающиеся атомы возбуждают всю систему, то в значительной степени будут возбуждаться только те моды, для которых частота моды $m\nu_1$ лежит где-то внутри полосы $\Delta\nu$. Для видимого света и при длине $L$ порядка метра номер моды $m$ будет очень большим числом.

а) Каков порядок величины $m$?

б) Нарисуйте форму частотного спектра важных мод лазера. Другими словами, представьте графически то, что мы только что обсудили. Отметьте на этом графике интервал $\nu_1$ между соседними модами, ширину $\delta\nu$ каждой моды и ширину $\Delta\nu$ наиболее легко возбудимых мод.

Теперь продолжим наши рассуждения. Если возбуждается какая-нибудь система, которая затем начинает колебаться, то колебания соответствуют более или менее сложной суперпозиции нормальных мод. Если система возбуждена достаточно грубым образом, то ее колебания будут представлены большим количеством мод с произвольными фазовыми соотношениями между ними. Такую суперпозицию мы можем назвать «некогерентной» суперпозицией мод. Обычно она имеет место при возбуждении нескольких мод лазера. Например, нетрудно возбудить лазер таким образом, чтобы практически все моды в диапазоне $\Delta\nu$ оказались возбужденными. Фазовые соотношения между различными модами «случайны» в следующем смысле: если вы посмотрите на систему в данный момент времени и зафиксируете относительные фазы мод, а затем посмотрите в более позднее время, много большее, чем время $T_{\text{затух}}$, то относительные фазы отдельных мод изменятся непредсказуемым образом. Это происходит потому, что в течение времени порядка $T_{\text{затух}}$ вся энергия, соответствующая данной моде и определяемая энергией возбуждения одной группы атомов, ослабнет (рассеется), но восполнится энергией других, вновь возбужденных атомов. Таким образом, в течение интервала $T_{\text{затух}}$ происходит по крайней мере одно вторичное возбуждение моды, т. е. «включение». «Время включения» случайно. Поэтому фазы меняются непредсказуемым образом (произвольно) в течение времени порядка $T_{\text{затух}}$. Отметим, что частотный спектр главных мод, который вы нарисовали, очень похож на частотный фурье-спектр почти периодически повторяющегося прямоугольного импульса (задача 6.22). Однако есть одно крайне важное различие. В случае почти периодической прямоугольной волны имеют место вполне определенные фазовые соотношения между частотными компонентами суперпозиции. Для некогерентной смеси мод лазера фазовые соотношения не определены.

в) Покажите, что суперпозиция некогерентной смеси мод лазера, каждая из которых имеет ширину по частоте $\delta\nu = 1/T_{\text{затух}}$ при ширине всей суперпозиции $\Delta\nu$, соответствует функции $\psi(t)$, являющейся почти периодической функцией $t$ с периодом $T_1$. Покажите, что эта почти периодическая функция будет сохранять



подобие самой себе в течение последовательных временных интервалов $T_1$, содержащихся во временных интервалах порядка $T_{\text{затух}}$. Покажите, что, хотя и может случиться так, что в течение данного временного интервала порядка $T_{\text{затух}}$ почти периодическая функция $\psi(t)$ будет иметь вид периодически повторяющейся прямоугольной волны длительностью $\Delta t \approx 1/\Delta\nu$, это будет редкой случайностью. Обычно мы ожидаем, что $\psi(t)$ значительно отличается от нуля в течение целого периода $T_1$. Таким образом, мы должны иметь $\Delta t \gg 1/\Delta\nu$. Теперь мы подготовлены для понимания красивого изобретения, которое обеспечивает фиксацию моды. Положим, что каким-либо способом (каким именно, пока нас не интересует) нам удалось получить все главные моды лазера в фазе друг с другом. Тогда мы можем ожидать, что когерентная суперпозиция мод с одинаковыми фазовыми постоянными даст почти периодическую функцию $\psi(t)$, состоящую из повторяющихся с периодом $T_1$ импульсов длительностью $\Delta t \approx 1/\Delta\nu$, форма которых остается примерно постоянной в течение времени порядка $T_{\text{затух}}$. Это наше предположение может быть подтверждено опытным путем. Вот описание остроумного метода фиксации мод. Включим лазер. Какая-то мода около центра полосы $\Delta\nu$ возбудится первой. Назовем эту моду $\nu_0$. Теперь сделаем так, что (например) прозрачность среды (или зеркал, или каких-либо предметов, через которые проходит свет) изменяется или «модулируется» по синусоиде относительно некоторого среднего значения. Частота модуляции выбрана равной основной частоте $\nu_1 = 1/T_1$, где $T_1$ — время прохождения излучения «туда и обратно» (между зеркалами). Таким образом, амплитуда колебаний первой моды окажется модулированной, а частота модуляции будет равна $\nu_1$:

$$\psi_{\text{мода 1}} = [A_0 + A_{\text{мод}} \cos \omega_1 t] \cos \omega_0 t.$$

Это «почти гармоническое» колебание может быть записано как суперпозиция гармонических колебаний с частотами $\omega_0$, $\omega_0 + \omega_1$ и $\omega_0 - \omega_1$:

$$\psi_{\text{мода 1}} = A_0 \cos \omega_0 t + \tfrac{1}{2} A_{\text{мод}} \cos (\omega_0 + \omega_1) t + \tfrac{1}{2} A_{\text{мод}} \cos (\omega_0 - \omega_1) t.$$

Члены с $\cos(\omega_0 + \omega_1)t$ и $\cos(\omega_0 - \omega_1)t$ действуют теперь как возмущающие силы. Они помогают «включиться» модам $\omega_0 + \omega_1$ и $\omega_0 - \omega_1$. Эти моды возбуждаются возмущающими силами, а не включаются в колебания системы случайным образом. Моды имеют определенную фазу относительно центральной моды $\omega_0$. Как только моды $\omega_0 + \omega_1$ и $\omega_0 - \omega_1$ включатся, будет происходить модуляция их амплитуд, вследствие того же физического эффекта, который определял модуляцию амплитуды моды $\omega_0$. Фаза модулированных колебаний будет одинакова. Далее, эти модулированные по амплитуде моды будут содержать компоненты, которые действуют как вынуждающие силы для мод $\omega_0 + 2\omega_1$ и $\omega_0 - 2\omega_1$. Таким образом, будут включаться моды с частотами, все больше отличными от $\omega_0$, и с определенными фазовыми соотношениями.

Для газового лазера естественное время распада $\tau$ порядка $10^{-9}$ *сек*, чему отвечает собственная ширина линии $\Delta\nu$ порядка $10^9$ *гц*. Поэтому при помощи газового лазера с фиксацией моды можно генерировать импульсы длительностью $\Delta t \approx 10^{-9}$ *сек*. Для «твердого» лазера, сделанного, например, из полированного рубина, собственное время затухания отдельных атомов порядка $10^{-11}$ *сек* или $10^{-12}$ *сек*. (Вследствие столкновений с соседними атомами в твердом теле колебания затухают быстрее.) Поэтому излучение от возбужденных атомов рубина занимает полосу частот примерно равную $10^{12}$ *сек*$^{-1}$. Эта полоса соответствует также легко возбуждаемым модам лазера. Таким образом, используя твердый лазер, можно генерировать ультракороткие световые импульсы длительностью $\Delta t \approx 1/\Delta\nu \approx 10^{-11}$ *сек* или $10^{-12}$ *сек*. Конечно, в соответствии с классической механикой, эта длительность просто равна длительности светового импульса от высвечивания одного атома в твердом теле. Тогда почему мы с таким энтузиазмом говорим о полученном результате? Лишь потому, что один атом не может дать много света, а в лазере мы имеем огромное число атомов, испускающих излучение одновременно. В результате возникает необычайно *мощный* световой импульс малой длительности. Следует также отметить, что, в соответствии с квантовой механикой, отдельный атом не испускает свет непрерывным потоком, как в классической модели. Вместо этого световой «фотон» испускается в дискретном сгустке энергии. Для отдельного атома невозможно предсказать точно, когда этот сгусток энергии будет испущен. Известна

только зависимость вероятности испускания от времени. Таким образом, используя отдельный атом, нельзя получить синхронизированные короткие световые импульсы.

Ультракороткие световые импульсы могут быть использованы для многих интересных экспериментов *).

**6.24.** *Частотная дельта-функция.* В п. 6.4 мы рассмотрели суперпозицию

$$\psi(t)=\int_0^\infty B(\omega)\cos\omega t\,d\omega$$

для «прямоугольного» спектра частот, имеющего форму $B(\omega)=1/\Delta\omega$ для $\omega$ в интервале от $\omega_1$ до $\omega_2=\omega_1+\Delta\omega$ и $B(\omega)=0$ для всех других частот. Мы нашли, что суперпозиция имеет вид

$$\psi(t)=\left[\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\omega t}{\frac{1}{2}\Delta\omega t}\right]\cos\omega_0 t,$$

где $\omega_0$ — частота, отвечающая центру интервала $\Delta\omega$. Пусть время $t_{макс}$ будет больше длительности любого задуманного вами опыта. Покажите, что если $\Delta\omega$ достаточно мало, так что $\Delta\omega t_{макс}\ll 1$, то $\psi(t)$ представляет точно гармоническое колебание с постоянными амплитудой и фазой. В этом случае коэффициент Фурье $B(\omega)$ называется «дельта-функцией частоты». Дельта-функция частоты равна нулю всюду, за исключением малой области $\Delta\omega$. Интеграл от дельта-функции по частоте $\omega$ равен единице. Покажите, что выражение для $B(\omega)$, данное выше, обладает этими свойствами при условии $\Delta\omega\ll 1/t_{макс}$ и поэтому является примером дельта-функции частоты.

**6.25.** *Резонанс в приливных волнах.* Допустим, что глубина океана постоянна и равна 5 км. (Это примерно средняя глубина океана.) Покажите, что приливные волны, образованные (например) землетрясением, распространяются со скоростью порядка 200 *м/сек*. Теперь предположим, что на Земле нет континентов, а вода заключена в «каналы», идущие по параллелям, так что она может смещаться только на запад или на восток. По какой широте должна распространяться приливная волна (образованная землетрясением), чтобы обогнуть земной шар за 25 часов? Обозначим эту широту $\theta_0$. (На экваторе $\theta_0=0$, а на полюсе $\theta_0=90°$.)

Солнце и Луна являются источниками возмущающих гравитационных сил, которые вызывают приливы. Рассмотрим Луну. (Солнце создает в два раза меньшую вынуждающую силу.) Лунные сутки длятся 25 *ч*. Если считать, что Земля не вращается вокруг своей оси, то приливы, вызываемые Луной, будут возникать прямо под Луной и в диаметрально противоположной точке земной поверхности. В новолуние и полнолуние суммарное действие Солнца и Луны будет приводить к очень большим подъемам воды. Поэтому в эти дни месяца можно ожидать высокой воды точно в полдень и полночь и низкой воды на рассвете и на закате (для «статической модели» невращающейся Земли). Так, по крайней мере, будет вести себя вода у островов в океане. Следует ожидать, что в гавани вода будет втекать или вытекать. Теперь рассмотрим нашу модель с каналами и будем считать, что Земля вращается. Когда в этом случае следует ожидать появления приливов в канале на экваторе, а полнолуние или новолуние? Когда приливы будут возникать на широтах, больших чем $\theta_0$? (У к а з а н и е. Рассмотрите вынужденное движение осциллятора.)

Дальнейшие сведения о приливных волнах, о сейшах в Женевском озере, об эволюции системы Земля — Луна и о других связанных с проблемой приливов явлениях можно получить в популярной классической книге «Приливы», написанной Джорджем Дарвином (сыном Чарльза Дарвина) в 1882 г. В этой книге описаны также простые и остроумные машины для фурье-анализа, разработанные в то время.

**6.26.** *Недиспергирующие волны.* Покажите, что любая дифференцируемая функция $f(t')$, где $t'=t-(z/v)$, удовлетворяет классическому волновому уравнению,

*) См. A. de Maria, D. Stetser, W. Glenn, Jr., Ultrashort Light Pulse, Science **156**, 1557 (June 23, 1967).



$$\frac{\partial^2 f(t')}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 f(t')}{\partial z^2}.$$

Покажите, что любая дифференцируемая функция $g(t'')$, где $t''=t+(z/v)$, также удовлетворяет классическому волновому уравнению. Укажите пример функции $f(t')$ и проверьте, что она удовлетворяет классическому волновому уравнению.

**6.27.** *Амплитудная модуляция и нелинейность.*

а) Одним из способов амплитудной модуляции несущей волны является пропускание тока $I=I_0\cos\omega_0 t$ ($\omega_0$ — частота несущей волны) через сопротивление $R$, которое меняется с частотой модуляции, т. е. $R=R_0(1+a_m\cos\omega_{мод}t)$. (В угольном микрофоне сопротивление модулируется при движении мембраны, сжимающей угольный порошок.) Напряжение $V=IR$, приложенное к сопротивлению, будет в этом случае модулированным по амплитуде. Получите выражение для $V$ как суперпозиции несущей (частота $\omega_0$), верхней боковой (частота $\omega_0+\omega_{мод}$) и нижней боковой (частота $\omega_0-\omega_{мод}$) полос.

б) Имеем два напряжения, одно из них меняется с несущей частотой, а второе — с частотой модуляции. Задача в том, что сделать с этими напряжениями $V_0=A_0\times\cos\omega_0 t$ и $V_m=A_m\cos\omega_{мод}t$, чтобы получить модулированное по амплитуде напряжение? Вначале предположим, что вы просто сложили эти напряжения, подав их на одну широковещательную антенну. Получится ли у нас что-нибудь?

в) Предположим, что после сложения двух этих напряжений мы подаем результирующее напряжение на вход усилителя, например, между сеткой и катодом радиолампы. Считаем, что *усилитель линейный*, т. е. напряжение на выходе пропорционально напряжению на входе. Получим ли мы на выходе амплитудно-модулированные колебания?

г) Предположим, что выходное напряжение усилителя содержит как первую, так и вторую степень входного напряжения:

$$V_{вых}=A_1V_{вх}+A_2(V_{вх})^2.$$

Пусть $V_{вх}=V_0+V_m$ [см. часть б)]. Покажите, что благодаря нелинейному (квадратичному) члену $A_2(V_{вх})^2$ выходное напряжение усилителя, наряду с другими членами, содержит модулированную по амплитуде несущую волну.

д) Модулированная по амплитуде несущая волна в г) содержит компоненты с частотами $\omega_0$, $\omega_0+\omega_{мод}$ и $\omega_0-\omega_{мод}$. Какие еще частотные компоненты присутствуют в $V_{вх}$? Нарисуйте полный частотный спектр выходного напряжения усилителя. Как избавиться от нежелательных частотных компонент, используя полосовые фильтры? Положим, что $\omega_{мод}$ мало по сравнению с $\omega_0$. Насколько избирательны должны быть фильтры?

**6.28.** *Амплитудная демодуляция и нелинейность.* Предположим, что принимающая антенна «уловила» волну, модулированную по амплитуде:

$$V=V_0(\cos\omega_0 t)(1+a_m\cos\omega_{мод}t).$$

Как выделить из этого напряжения напряжение модуляции $a_m\cos\omega_{мод}t$? В вашем распоряжении любые полосовые фильтры, а также нелинейный усилитель, описанный в задаче 6.27, для которого

$$V_{вых}=A_1V_{вх}+A_2(V_{вх})^2.$$

(У к а з а н и е. Представьте модулированную по амплитуде несущую волну как суперпозицию волн, затем пропустите эту суперпозицию через нелинейный усилитель и воспользуйтесь фильтрами.)

**6.29.** *Частотная модуляция.* Модулированное по частоте напряжение может быть записано в виде

$$V=V_0\cos[\omega_0(1+a_m\cos\omega_{мод}t)\,t]=V_0\cos\omega t,$$

где

$$\omega=\omega_0+\omega_0 a_m\cos\omega_{мод}t.$$

Одним из способов образования модулированной по частоте несущей волны является использование емкостного микрофона. Звуковые волны воздействуют на мембрану, которая связана с одной из пластин конденсатора. Емкость

конденсатора равна

$$C = C_0 (1 + c_m \cos \omega_{мод} t).$$

Предположим, что эта емкость входит в $LC$-цепочку, у которой собственная частота колебаний равна $\omega = \sqrt{1/LC}$. Пусть напряжение на емкости равно, например, $V = V_0 \cos \omega t$. Покажите, что, если $c_m$ меньше единицы, мы получаем модулированное по частоте напряжение с амплитудой $a_m$, пропорциональной $c_m$. Найдите коэффициент пропорциональности между $c_m$ и $a_m$.

**6.30.** *Фазовая модуляция* (*ФМ*). Модулированное по фазе напряжение имеет вид

$$V = V_0 \cos (\omega_0 t + a_m \sin \omega_{мод} t) = V_0 \cos (\omega_0 t + \varphi),$$

где

$$\varphi = a_m \sin \omega_{мод} t.$$

Мгновенное значение частоты можно получить, продифференцировав по $t$ выражение для фазы в круглых скобках:

$$\omega = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + a_m \omega_{мод} \cos \omega_{мод} t.$$

Сравнение этого результата с задачей 6.29 показывает, что фазовая и частотная модуляции тесно связаны.

а) Покажите, что модулированное по фазе колебание может быть представлено суперпозицией гармонических колебаний с частотами $\omega_0$, $\omega_0 \pm \omega_{мод}$, $\omega_0 \pm 2\omega_{мод}$, $\omega_0 \pm 3\omega_{мод}$ и т. д. (Указание. Воспользовавшись тригонометрическим тождеством, разложите $\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Затем разложите $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в ряд Тейлора. Далее воспользуйтесь тригонометрическими соотношениями, выведенными в задаче 1.13.)

б) Покажите, что если амплитуда модуляции $a_m$ мала по сравнению с единицей, то мы можем пренебречь всеми членами суперпозиции, за исключением членов с частотами $\omega_0$ и $\omega_0 \pm \omega_{мод}$. Таким образом, для малой амплитуды модуляции имеем только несущую и одну верхнюю и одну нижнюю боковые полосы. Поэтому для малых $a_m$ необходима полоса частот для передачи информации такая же, как и для АМ (амплитудной модуляции). При больших $a_m$ необходимая полоса становится больше, так как появляются дополнительные боковые полосы на частотах $\omega_0 \pm 2\omega_{мод}$ и т. д.

в) Сравните относительную фазу несущей и двух ближайших боковых полос при ФМ с фазовыми соотношениями между несущей и боковыми полосами при АМ в задаче 6.27. Вы увидите, что фазовые соотношения различны. Надо сказать, что это дает возможность отличить ФМ (а также ЧМ) от АМ.

г) Предположим, что мы хотим преобразовать АМ-напряжение в ФМ-напряжение. В нашем распоряжении любые полосовые фильтры, а также схема, которая обеспечивает желаемый фазовый сдвиг. Придумав, как это сделать, посмотрите задачу 9.58. Задача рассмотрена в главе 9 в связи с обсуждением фазово-контрастного микроскопа (задача 9.59).

**6.31.** *Передача одной боковой полосы.* Если информация, которую необходимо передать, занимает полосу частот от $\omega_{мод}$ (мин) до $\omega_{мод}$(макс), то АМ- или ФМ-широковещательный диапазон простирается от $\omega_0 - \omega_{мод}$ (макс) до $\omega_0 + \omega_{мод}$ (макс), где $\omega_0$ — частота несущей волны. Таким образом, полоса частот составляет $2\omega_{мод}$(макс). Полоса частот, необходимая для работы станции, является «драгоценностью», поскольку полосы частот различных станций в данном районе не должны перекрываться, во избежание взаимных помех.

а) Предположим, что мы ведем передачу на АМ-радиоволнах, причем используем полосовой фильтр для отделения несущей и верхней боковой полосы от нижней (т. е. нижняя полоса не передается). Придумайте, как восстановить нижнюю полосу в приемнике, пропуская принимаемый сигнал (несущую и верхнюю полосы) через нелинейный усилитель, описанный в задачах 6.27 и 6.28. Обсудите фазовые и амплитудные соотношения, необходимые для того, чтобы получить сигнал, пропорциональный первоначальному АМ-сигналу.

б) Можно еще больше уменьшить передаваемую полосу частот, если отфильтровать не только нижнюю боковую полосу, но и несущую. Предположим, что в



передается только верхняя боковая полоса. Предположим далее, что приемник имеет свой собственный генератор, который выдает сигнал $V = A \cos \omega_0' t$, где $\omega_0'$ максимально близко к $\omega_0$ ($\omega_0'$ никогда не будет точно равно $\omega_0$ вследствие неизбежных дрейфов, вызванных различными причинами). Придумайте способ, с помощью которого, используя сигнал от генератора и сигнал от передатчика (т. е. верхнюю боковую полосу), можно восстановить нижнюю боковую полосу. Используйте нелинейные усилители, фильтры, фазосдвигающие цепочки, т. е. все, что окажется необходимым.

в) Предположим, что частота несущей волны равна 100 *Мгц* (1 *Мгц* $= 10^6$ *гц*) и частота $\omega_0'$ собственного генератора в приемнике, используемая при передаче и восстановлении одной боковой полосы, превышает $\omega_0$ (например) на 30 *гц*. Таким образом, ошибка по частоте составляет одну трехмиллионную. Предположим, что флейта играет ноту А 440 (т. е. 440 *гц*). Какая нота будет звучать из громкоговорителя после того, как вы восстановите боковые полосы и произведете демодуляцию? Результат показывает, почему коммерческое телевидение пользуется передачей верхней боковой полосы и несущей. При передаче речи (голоса) несущая полоса может быть подавлена, так как никого не волнует неточное воспроизведение тона речи.

**6.32.** *Модуляция с помощью субчастот.* Часто мы хотим иметь два или более независимых канала информации, используя для каждого одну и ту же несущую частоту $\omega_0$. По этим каналам информация может передаваться в виде полос частот модуляции $\omega_{мод}$ (1), $\omega_{мод}$ (2) и т. д. Если эти полосы не перекрываются, то можно модулировать несущую частоту сразу всеми частотами модуляции. Например, можно сложить колебания несущей частоты и частот модуляции от всех каналов на входе нелинейного усилителя, как было сделано для одного канала в задаче 6.27. На выходе усилителя (наряду с другими членами) будем иметь модулированную по амплитуде несущую частоту, что эквивалентно суперпозиции колебаний, содержащих частоты $\omega_0$, $\omega_0 \pm \omega_{мод}$ (1), $\omega \pm \omega_{мод}$ (2) и т. д.

а) Докажите это утверждение.

В приемнике мы должны произвести демодуляцию (например, как в задаче 6.28), чтобы восстановить полосы частот модуляции $\omega_{мод}$ (1), $\omega_{мод}$(2) и т. д. Затем, если полосы не перекрываются, их можно разделить с помощью полосовых фильтров. В результате мы получим раздельный выход информации для каналов 1, 2 и т. д., т. е. каналы не будут перекрываться.

Однако очень часто полосы частот модуляции отдельных каналов перекрываются и описанный способ не годится. Например, при стереофоническом радиовещании с ФМ используются два канала. Один канал связан с микрофоном, установленным, например, около деревянных духовых инструментов, а другой канал — с микрофоном, расположенным около медных духовых инструментов. Поскольку частоты, передаваемые по этим каналам, соответствуют музыкальным частотам, то естественно, что каналы перекрываются.

Другим примером является телефонная линия дальней связи или радиосвязь, осуществляемые с одной несущей частотой. В этих случаях различные каналы представлены различными одновременными телефонными разговорами и частотами модуляции являются частоты человеческого голоса. Примерно та же проблема имеет место при передаче показаний приборов, установленных на спутниках, на Землю (телеметрия»). Каждый прибор имеет отдельный канал. Частоты модуляции зависят от того, как сконструирован прибор. (Например, термометр может представлять собой конденсатор, емкость которого меняется с температурой. Эта емкость, включенная в $LC$-цепь генератора, может определять $\omega_{мод}$.) Полосы частот модуляции могут сильно перекрываться.

Очевидно, необходимо как-то «пометить» каналы, чтобы иметь возможность их разделять. Одним из способов может быть использование различных несущих частот для каждого канала. Именно этот способ используется различными радио- или телестанциями. Однако существует более удобный способ, называемый *методом субчастот*. При этом способе каждый канал помечается своей собственной «субчастотой» следующим образом. Назовем $\omega_1$, $\omega_2$ и т.д. субчастотами для каналов 1, 2 и т. д. (Субчастоты значительно больше частот модуляции. Основная несущая частота $\omega_0$, в свою очередь, значительно больше любой субчастоты.) Для канала 1 осуществляется амплитудная (или частотная) модуляция субчастоты $\omega_1$

частотой $\omega_{мод}$ (1). В результате на выходе канала 1 имеет место суперпозиция с частотами $\omega_1, \omega_1+\omega_{мод}$ (1) и $\omega_1-\omega_{мод}$ (1). Точно так же на выходе канала 2 будем иметь суперпозицию с частотами (т. е. в суперпозицию будут входить члены с этими частотами) $\omega_2, \omega_2+\omega_{мод}$ (2) и $\omega_2-\omega_{мод}$ (2). Субчастоты $\omega_1$ и $\omega_2$ выбраны так, что находятся достаточно далеко друг от друга и перекрытия двух полос с центром в этих субчастотах не происходит, т. е., например, если $\omega_1$ меньше $\omega_2$, то самая верхняя боковая полоса $\omega_1+\omega_{мод}$ (1) меньше, чем самая нижняя боковая полоса $\omega_2-\omega_{мод}$ (2). (Под $\omega_{мод}$ (1) и $\omega_{мод}$ (2) имеется в виду некоторый диапазон частот.) Например, для стереорадиопередач при ФМ типичные значения субчастот: $\nu_1=20$ *кгц* и $\nu_2=40$ *кгц*. Если частоты модуляции (музыка) занимают диапазон от нуля до 10 *кгц*, то канал 1 будет иметь полосу от 10 до 30 *кгц*, а канал 2 — от 30 до 50 *кгц*. Пока что мы имеем две несущие частоты для двух каналов. Однако мы еще не подали сигналы на передающую антенну! Сложим сигналы на выходе всех каналов и будем рассматривать эту многоканальную, многополосную суперпозицию как один большой диапазон частот модуляции, простирающийся от самой нижней частоты в нижней боковой полосе канала 1 до самой верхней частоты в верхней боковой полосе самого большого канала (т. е. канала с максимальной подчастотой). Весь этот диапазон используем для модулирования основной несущей частоты $\omega_0$, подав эту суперпозицию на вход нелинейного усилителя (см. задачу 6.27).

б) Возьмем такой же нелинейный усилитель, как и в задаче 6.27. Что будет на его выходе? Не пользуясь формулами, постройте приблизительный график зависимости интенсивности (т. е. напряжения на выходе усилителя) от частоты. Отметьте полосы около $\omega_0$, которые вы будете подавать в передающую антенну. Отметьте также другие частоты, которые будут появляться на выходе усилителя и которые нужно будет отфильтровать.

в) В приемнике демодуляцию можно произвести следующим образом. Подадим сигнал, состоящий из несущей частоты $\omega_0$ и боковых полос (т. е. сигнал, который вы пропустили на передающую антенну), на вход нелинейного усилителя, как в задаче 6.28. Выходное напряжение усилителя среди многих составляющих будет содержать составляющие с субчастотой $\omega_1$ и ее боковые полосы $\omega_1\pm\omega_{мод}$ (1). То же будет справедливо и для других каналов. Докажите это утверждение. Различные субчастоты и их боковые полосы не перекрываются и могут быть разделены с помощью полосовых фильтров. Таким образом, каждому каналу соответствует свой собственный выходной сигнал, причем выходные сигналы разных каналов не перекрываются.

**6.33.** *Новый метод инфракрасной спектроскопии: модуляционная спектроскопия.* В 1967 г. в технике инфракрасной астрономии произошла революция. Новый метод повышал разрешение по частоте в 100 раз и в 60 000 раз уменьшил время, необходимое для частотного анализа света. В этом методе остроумно использованы основные идеи метода субчастот, рассмотренные в задаче 6.32.

Частотный спектр звезды, испускающей видимый свет, может быть получен с помощью дифракционной решетки, за которой на соответствующем расстоянии расположена фотопластинка. На ней сразу получается весь спектр, так как волны, в зависимости от длины, дифрагируют в разных направлениях и попадают на разные части фотопластинки. Почернение фотопластинки при данном угле дифракции определяет интенсивность компоненты с данной длиной волны.

Для инфракрасного света (длины волн порядка $10^{-4}$ *см*) нет соответствующих фотоматериалов, однако дифракционная решетка может быть использована и для этих волн. Вместо фотопластинки здесь можно взять фотоумножитель с передаижной щелью. Положение щели определяет угол дифракции и, таким образом, определяет длину волны. Выходной ток фотоумножителя определяет интенсивность. Если мы хотим иметь полный частотный спектр инфракрасного излучения, то должны при одном положении щели, подождав достаточное время (процесс должен установиться), определить интенсивность излучения данной длины волны, затем, переместив щель на расстояние, равное ширине щели, сделать то же самое для нового положения щели и т. д. Для получения полного спектра в частотном диапазоне $\nu_1 \div \nu_2$ с шагом $\Delta\nu$ необходимо сделать $(\nu_2-\nu_1)/\Delta\nu$ отдельных замеров интенсивности. Для диапазона длин волн от 1 до 3 *мкм* (1 *мкм* $=10^{-4}$ *см*) имеем диапазон волновых чисел от $1\cdot10^4$ *см*$^{-1}$ до $(1/3)\cdot10^4$ *см*$^{-1}$, что дает $\lambda_1^{-1}-\lambda_2^{-1}=(2/3)\cdot10^4$ *см*$^{-1}$. Типичная разрешающая способность системы с фотоумножите-



лем равна $\Delta(\lambda^{-1})=\Delta(\nu/c)\approx0{,}1$ *см*$^{-1}$. Таким образом, для получения полного спектра излучения нам понадобится $(2/3)\cdot10^5\approx60\,000$ независимых измерений. Так как каждое измерение может занимать одну ночь, все измерения могут длиться несколько сотен лет!

Конечно, имея 60 000 фотоумножителей, можно сразу промерить (за одну ночь) весь спектр, но так, очевидно, никто не делает. Если же на один фотоумножитель падают сразу все дифрагировавшие лучи, то напряжение на его выходе будет пропорционально общей интенсивности излучения, усредненной по всему спектру, и мы не сможем определить интенсивность, соответствующую той или иной длине.

Это можно сравнить со случаем, когда все телефонные разговоры между Нью-Йорком и Сан-Франциском передавались бы по одному каналу и не были бы разделены друг от друга. Задача разделения отдельных телефонных разговоров в одном канале была решена с помощью «маркировки» каждого разговора своей собственной «субнесущей» (см. задачу 6.32). Конечно, если бы существовал способ маркировки каждой отдельной инфракрасной волны с помощью какой-либо субнесущей частоты, позволяющий промаркировать все длины волн в излучении, то задача была бы решена. Все инфракрасное излучение можно было бы сфокусировать на одном фотоумножителе. К его выходному току можно было бы применить анализ Фурье для выделения отдельных субнесущих полос. Интенсивность каждой субнесущей частоты соответствовала бы интенсивности определенной длины волны инфракрасного излучения.

а) Придумайте способ маркировки субнесущей частоты каждой длины волны излучения, используя механический прерыватель, состоящий из вращающегося колеса с отверстиями или щелями, которые пропускают падающее излучение. Вашей основной задачей будет придумать, как сделать так, чтобы частота прерывания зависела от длины волны инфракрасного излучения.

В новом методе инфракрасной спектроскопии используется следующий красивый способ. Не применяется ни дифракционная решетка, ни механический прерыватель. Вместо этого используется интерферометр Майкельсона с одним подвижным зеркалом. (Этот тип интерферометра показан на прилагаемом рисунке.)

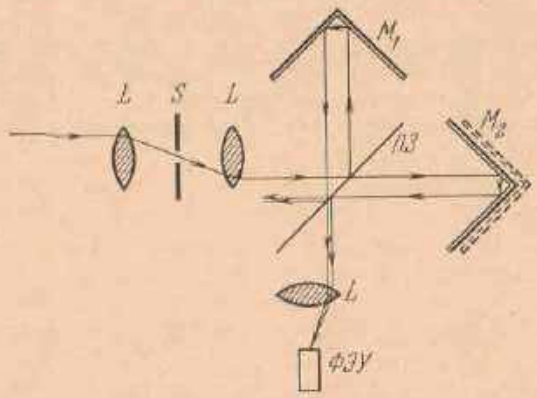



Рис. к задаче 6.33.

Свет от звезды падает (например) в направлении $x$ на полупосеребренную стеклянную пластинку, наклоненную под углом 45° к падающему пучку и расщепляющую его на два пучка. Часть падающего пучка отражается от пластинки в направлении $y$, а часть проходит в направлении $x$. Зеркала отражают падающие на них пучки света, и отраженные пучки вновь попадают на полупрозрачную пластинку, причем пучок, распространяющийся в направлении $-y$, частично проходит и частично отражается в направлении $-x$; аналогично, пучок, распространяющийся в направлении $-x$, частично проходит и частично отражается в направлении $-y$. Фотоумножитель регистрирует лучи, идущие в направлении $-y$. (Лучи, отраженные и проходящие в направлении $-x$, не рассматриваются.) Для данной длины

волны $\lambda$ ток фотоумножителя будет максимальным или минимальным в зависимости от относительной фазы двух пучков в направлении $-y$. Относительная фаза двух пучков будет зависеть от приобретенной в интерферометре разности хода.

*б)* Теперь предположим, что одно зеркало движется со скоростью $v$. Покажите, что если в интерферометр входит инфракрасный свет частоты $\nu$, то на выходе фотоумножителя возникает ток с компонентой, меняющейся по гармоническому закону $\cos 2\pi\nu_{мод}t$ с частотой модуляции $\nu_{мод}=2\,(v/c)\nu$. Покажите также, что если положение зеркала меняется произвольным образом, а выходной ток фотоумножителя измеряется как функция координаты $x$, то выходной ток фотоумножителя включает компоненту, изменяющуюся пропорционально $\cos k_{мод}x$ с модуляционным волновым числом $k_{мод}=4\pi/\lambda$. Если в пучке много волн разной длины, то на выходе фотоумножителя будет суперпозиция, состоящая из постоянной составляющей (среднее по всему спектру) плюс компоненты Фурье для каждого модуляционного волнового числа $k_{мод}$. Таким образом, если мы произведем фурье-анализ (т. е. получим спектр) выходного тока фотоумножителя, то интенсивность, полученная для каждого $k_{мод}$, будет определять интенсивность соответствующей длины волны инфракрасного излучения. Важнейшей особенностью метода является одновременное измерение всего спектра инфракрасного излучения по зависимости выходного тока фотоумножителя от $x$. Каждая длина волны «маркируется» частотой модуляции (или волновым числом), которая появляется на выходе фотоумножителя. Таким образом, частота модуляции действует как «субнесущая», позволяя различать при помощи анализа Фурье выходного тока фотоумножителя одновременную запись многих длин волн.

С помощью описанного прибора можно, например, находясь на Земле, определить, «есть ли жизнь на Марсе».

Анализ инфракрасного излучения атмосферы Марса укажет на ее состав, после чего можно поставить вопрос о компонентах, ответственных за протекание жизненных процессов.

Описанный метод чрезвычайно чувствителен*), и телескопы, которые сейчас проектируются, смогут определять столь незначительные компоненты газа в атмосфере звезд как, например, одну часть на $10^9$.

---

*) Более подробное описание метода модуляционной спектроскопии можно найти в английском журнале «Science Journal» for April 1967: «Detecting Planetary Life from Earth», by J. Lovelock, D. Hitchcock, P. Fellgett, J. and P. Connes, L. Kaplan, J. Ring, p. 56. См. также книгу М. Кардона «Модуляционная спектроскопия», «Мир», 1972.

ГЛАВА 7

# ВОЛНЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ДВУХ И ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЙ

## 7.1. Введение

Волны, которые мы рассматривали до сих пор, были почти всегда одномерными. Это означает, что они распространялись вдоль прямой, которую мы обычно принимали за ось $z$. В п. 7.2 мы познакомимся с трехмерными волнами. Для этого будет достаточно совершить поворот координатной системы, используемой для описания плоской одномерной бегущей волны. Таким образом, мы получим трехмерное представление плоской гармонической бегущей волны.

Мы увидим, что введение дополнительных координат может означать нечто большее, чем простую замену переменных. Действительно, увеличение числа измерений означает увеличение числа степеней свободы. Например, в трехмерном вакууме электромагнитная волна может быть бегущей волной для одного направления, чисто стоячей для другого и экспоненциальной волной для третьего направления! В одномерном случае экспоненциальную электромагнитную волну в вакууме получить невозможно, так как дисперсионное соотношение $\omega^2=c^2k^2$ не может превратиться в соотношение $\omega^2=-c^2\varkappa^2$ для некоторого диапазона частот. Для получения экспоненциальной волны в одномерном случае нам необходимо наличие граничной частоты, т. е. дисперсионное соотношение должно иметь вид соотношения для ионосферы: $\omega^2=\omega_0^2+c^2k^2$, которое для достаточно низких частот может превратиться в соотношение $\omega^2=\omega_0^2-c^2\varkappa^2$.

Мы покажем, что в трехмерном случае $k$ — это величина вектора, который называется вектором распространения. Таким образом, дисперсионное соотношение для электромагнитных волн в вакууме имеет вид $\omega^2=c^2(k_x^2+k_y^2+k_z^2)$. В некоторых случаях можно заменять компоненты $k_x^2$ и т. д. на $-k_x^2$ и т. д., но всегда следует сохранить положительное значение величины $\omega^2$, имеющей смысл возвращающей силы на единицу смещения и на единицу массы. В качестве примера мы рассмотрим электромагнитные волны в волноводах и полное отражение света. В п. 7.3 мы рассмотрим волны в воде (для идеальной воды) и найдем их пространственную зависимость

(поляризацию) и дисперсию. (В конце главы приведено несколько опытов, которые легко позволяют получить закон дисперсии волн в воде.) В п. 7.4 при помощи уравнений Максвелла будут объяснены явления, которые мы изучали в главе 4 при рассмотрении волн в передающей линии, образованной параллельными пластинами. В п. 7.5 мы рассмотрим излучение колеблющегося точечного заряда. Полученные результаты позволят решить вопрос о естественной ширине линий видимого света, испускаемого атомом, и объяснить синий цвет неба.

## 7.2. Гармонические плоские волны и вектор распространения

Рассмотрим *гармоническую плоскую бегущую волну*, распространяющуюся в однородной среде вдоль положительного направления оси $z$. Предположим, что в плоскости $z'=0$ волновая функция следующим образом зависит от времени:

$$\psi(0,\ t) = A\cos\omega t. \tag{1}$$

Тогда в любой плоскости, заданной фиксированным значением $z'$, волновая функция будет иметь вид

$$\psi(z',\ t) = A\cos(\omega t - kz'). \tag{2}$$

Выразим эту функцию через обычные декартовы координаты $x$, $y$, $z$. Будем считать, что начало координат совпадает с плоскостью $z'=0$. Пусть вектор $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ определяет положение точки в пространстве относительно начала координат. Плоскость $z' = \text{const}$ в системе координат $x$, $y$, $z$ определяется уравнением $z' = \mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{z}}' = \text{const}$, где $\hat{\mathbf{z}}'$ — единичный вектор, задающий направление оси $z'$. Поэтому в уравнении (2) величина $kz'$ может быть записана следующим образом:

$$kz' = k(\hat{\mathbf{z}}'\cdot\mathbf{r}) = (k\hat{\mathbf{z}}')\cdot\mathbf{r} \equiv \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}. \tag{3}$$

*Вектор распространения*. Величина $k\hat{\mathbf{z}}'$ называется *вектором распространения* $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k} \equiv k\hat{\mathbf{z}}'. \tag{4}$$

Величина вектора $\mathbf{k}$ равна $k$, а направление совпадает с направлением распространения волны. Уравнение (3) можно переписать так:

$$kz' = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z. \tag{5}$$

С физической точки зрения волновое число $k$ представляет собой число радиан фазы на единицу смещения вдоль направления распространения $\hat{\mathbf{z}}'$, так что $kz'$ равно фазе, приобретенной на расстоянии $z'$. Величина $k_x$ соответствует *числу радиан, отнесенному к единице смещения вдоль оси* $+x$, т. е. вдоль $\hat{\mathbf{x}}$; аналогичный смысл имеют $k_y$ и $k_z$. Предположим, например, что $\hat{\mathbf{x}}$ составляет угол $\theta$ с $\hat{\mathbf{z}}'$ и что длина волны равна $\lambda$. Если продвинуться вдоль направления $\hat{\mathbf{z}}'$ на расстояние $\lambda$, то фаза возрастет на $2\pi$. Если перемещение



происходит вдоль $\hat{\mathbf{x}}$, то, чтобы $z'$ увеличилось на одну длину волны, мы должны пройти расстояние $\lambda/\cos\theta$. На направлении вдоль $\hat{\mathbf{x}}$ фаза увеличилась на $2\pi$ на участке, большем чем $\lambda$ в $(\cos\theta)^{-1}$ раз, т. е. можно сказать, что увеличение фазы, приходящееся на единицу длины вдоль $\hat{\mathbf{x}}$, меньше чем $k$ в $\cos\theta$ раз. Таким образом, проекция вектора $\mathbf{k}$ на направление $\hat{\mathbf{x}}$ (т. е. $k_x = \mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{x}}$) всегда будет меньше длины вектора в отношении, определяемом косинусом соответствующего угла.

*Почему нет вектора длины волны?* Выясним это на примере. Приведем кажущееся правдоподобным (однако неверное) рассуждение. Фазовая скорость бегущей волны равна $v_\phi = \lambda\nu$. Мы хотим описать волну, распространяющуюся в трехмерном пространстве в направлении $\hat{\mathbf{z}}'$. Вектор длины волны можно было бы определить так:

$$\mathbf{v}_\phi = \boldsymbol{\lambda}\nu\hat{\mathbf{z}}' = (\boldsymbol{\lambda}\hat{\mathbf{z}}')\,\nu = \boldsymbol{\lambda}\nu.$$

Длина волны $\lambda$ определяется как расстояние между двумя соседними гребнями вдоль $z'$. Эта величина будет определять модуль «вектора» $\boldsymbol{\lambda}$. Аналогично $\lambda_x$ соответствует расстоянию между соседними гребнями волны смещения вдоль $x$. Однако у вектора $\boldsymbol{\lambda}$ есть следующее «ужасное» свойство: $\lambda_x$ больше, чем $\lambda$. Так, если $\hat{\mathbf{x}}$ перпендикулярно $\hat{\mathbf{z}}'$, то величина $\lambda_x$ бесконечно велика, в то время как в случае обычного вектора составляющая по $x$ должна равняться нулю. Итак, мы можем сказать, что $\lambda$ *не может быть вектором*, ибо составляющие вектора не могут быть больше его величины.

*Плоскость постоянной фазы*. Бегущая волна, заданная уравнением (2), может быть записана в следующих эквивалентных формах:

$$\begin{aligned}\psi(x,\ y,\ z,\ t) &= A\cos(\omega t - kz') = \\ &= A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = \\ &= A\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{6}$$

Аргумент синусоидальной волновой функции называется *фазой* $\varphi(x,\ y,\ z,\ t)$:

$$\begin{aligned}\varphi(x,\ y,\ z,\ t) &= \omega t - kz' = \\ &= \omega t - k_x x - k_y y - k_z z = \\ &= \omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}.\end{aligned} \tag{7}$$

В фиксированный момент времени $t$ точки пространства, имеющие одинаковые значения $\varphi$, образуют плоскость равной фазы, называемую *волновым фронтом*:

$$\left.\begin{aligned} &d\varphi = \omega\,dt - \mathbf{k}\cdot d\mathbf{r}, \\ &d\varphi = 0 - \mathbf{k}\cdot d\mathbf{r} \text{ в данный момент}, \\ &d\varphi = 0, \text{ только если } d\mathbf{r} \text{ перпендикулярно } \mathbf{k}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

В заданный момент времени значение фазы будет постоянно во всех точках, образованных смещением на вектор $d\mathbf{r}$, перпендикулярный

направлению распространения k. Для всех этих точек $d\varphi=0$, и их геометрическое место образует плоскость. Поэтому такие волны называются *плоскими*.

*Фазовая скорость.* Фазовая скорость равна $dz'/dt$ при фиксированном $\varphi$:

$$d\varphi = \omega\, dt - k\, dz' = 0,$$
$$r_\phi = \frac{dz'}{dt} = \frac{\omega}{k}. \tag{9}$$

*Дисперсионные соотношения для трехмерного случая.* Ниже приведены знакомые вам дисперсионные соотношения, переписанные для трех измерений.

Пример 1. *Электромагнитные волны в вакууме*:

$$\omega^2 = c^2k^2 = c^2\,(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \tag{10}$$

Пример 2. *Электромагнитные волны в диспергирующей среде*:

$$\omega^2 = \frac{c^2}{n^2}\,k^2 = \frac{c^2}{n^2}\,(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \tag{11}$$

Пример 3. *Электромагнитные волны в ионосфере*:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2 = \omega_p^2 + c^2\,(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \tag{12}$$

Дисперсионные соотношения не зависят от граничных условий. Однако граничные условия определяют тип волн, с которыми нам приходится иметь дело: это могут быть стоячие волны, бегущие волны или (как мы увидим) волны смешанного типа.

*Стоячие волны.* Суперпозиция двух бегущих плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях и имеющих одинаковую амплитуду (и частоту), дает стоячую волну

$$\psi(x,\ y,\ z,\ t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \alpha). \tag{13}$$

Вспомнив, что $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$, и воспользовавшись тригонометрическими тождествами, мы можем записать выражение (13) в виде

$$\psi(x,\ y,\ z,\ t) =$$
$$= A\cos(\omega t + \varphi)\cos(k_x x + \alpha_1)\cos(k_y y + \alpha_2)\cos(k_z z + \alpha_3). \tag{14}$$

Когда мы выражаем гармоническую волну через стоячие волны (14), то для $k_x$, $k_y$ и $k_z$ можно взять положительные значения. Действительно, в стоячей волне колебания не распространяются в одном направлении (как это имеет место в бегущей волне), а «распространяются в двух направлениях сразу». Очевидно, что функция $\psi(x,\ y,\ z,\ t)$ не изменится, если, например, заменить $k_x$ на $-k_x$ и $\alpha_1$, на $-\alpha_1$. Таким образом, мы можем оставить все три значения $k_x$, $k_y$, $k_z$ положительными и (в случае необходимости) изменить соответствующим образом константы $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\alpha_3$.

*Смесь бегущей и стоячей волн.* В одномерном пространстве суперпозиция двух стоячих волн может дать бегущую волну. Аналогично, стоячую волну можно представить в виде суперпозиции



двух бегущих волн. Возможна суперпозиция более общего характера, которая не образует ни чисто бегущей, ни чисто стоячей волны. Все это справедливо и для трехмерного пространства. Здесь, однако, возникает дополнительная свобода, связанная с тем, что три координаты «независимы». Так, например, возможна волна, которая по оси $x$ имеет постоянную составляющую, по оси $y$ представляет собой стоячую волну, а по оси $z$ — бегущую:

$$\psi(x,\ y,\ z,\ t) = \psi(y,\ z,\ t) = A\sin(k_y y)\cos(k_z z - \omega t). \tag{15}$$

Позже мы встретимся с различными примерами таких смешанных волн.

*Трехмерные волновые уравнения и классическое волновое уравнение.* Любая трехмерная синусоидальная гармоническая волна независимо от того, является ли она стоячей, бегущей или волной смешанного типа, удовлетворяет следующим уравнениям (вы легко можете это доказать):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\psi\,(x,\ y,\ z,\ t)}{\partial t^2} = -\,\omega^2\psi\,(x,\ y,\ z,\ t),\\ &\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\,k_x^2\psi,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\,k_y^2\psi,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\,k_z^2\psi. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Приведем примеры волновых уравнений, соответствующих дисперсионным соотношениям (10), (11) и (12).

Пример 1. *Электромагнитные волны в вакууме.* Используя уравнения (16) и (10), мы находим, что волновая функция для отдельной гармонической составляющей с частотой $\omega$ и волновым числом $k$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right\}. \tag{17}$$

Так как $c$ не зависит от частоты, то волновое уравнение (17) справедливо для каждой гармонической составляющей, а также для произвольной суперпозиции стоячих и бегущих электромагнитных волн в вакууме. Уравнение (17) представляет собой трехмерное *классическое волновое уравнение для недиспергирующих волн*. Аналогичное уравнение справедливо для любой другой трехмерной недиспергирующей волны, например звуковой волны в воздухе. Правая часть уравнения (17) представляет собой произведение $c^2$ на div grad $\psi$, что иначе можно записать в виде $\nabla\cdot\nabla\psi$ или

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\psi. \tag{18}$$

Пример 2. *Электромагнитные волны в однородной диспергирующей среде.* Если принять во внимание дисперсионное соотношение (11), то волновое уравнение для гармонической волны частоты $\omega$ будет иметь вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{n^2(\omega)}\,\nabla^2\psi. \tag{19}$$

В этом уравнении $n$ зависит от частоты, и можно, например, разложить решение в ряд или интеграл Фурье и воспользоваться дисперсионным соотношением для каждой данной частоты. Классическое волновое уравнение (18) отличается от (19) тем, что его можно использовать для импульсов или других негармонических волн, не прибегая к фурье-анализу.

Пример 3. *Электромагнитные волны в ионосфере.* Используя дисперсионное соотношение (12) и уравнения (16), мы получаем трехмерное уравнение Клейна — Гордона:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega_p^2\psi + c^2\nabla^2\psi. \tag{20}$$

Приведем несколько примеров двухмерных синусоидальных гармонических волн.

Пример 1. *Электромагнитные волны в прямоугольном волноводе.* Чтобы получить прямоугольный волновод, достаточно добавить к передающей линии из плоскопараллельных проводящих пластин две проводящие боковые пластины, как это показано на рис. 7.1. Внутри волновода — вакуум. Мы рассмотрим лишь те

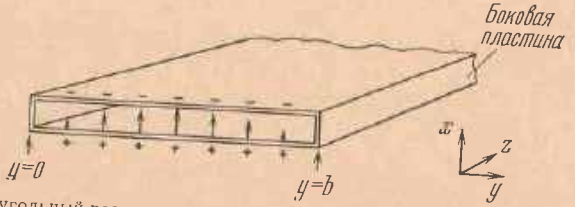



Рис. 7.1. Прямоугольный волновод. Получен из передающей линии с параллельными пластинами добавлением проводящих боковых пластин в $y=0$ и $y=b$.
Стрелками показано мгновенное электрическое поле на входе волновода.

волновые моды, для которых магнитное и электрическое поля не зависят от $x$ (для фиксированного $y$ и $z$ и для любого $x$ внутри волновода).

Волновое уравнение для этого случая будет двухмерным вариантом уравнения (17). Пусть $\psi$ соответствует электрическому полю $E_x$, мы имеем

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{21}$$

Для определенной частоты $\omega$ имеем

$$-\omega^2\psi = c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{22}$$

Наличие проводящих боковых пластин означает, что $E_x$ равно нулю в плоскостях $y=0$ и $y=b$. Поэтому волна $\psi(y,\ z,\ t)$ должна быть стоячей волной относительно оси $y$ с постоянными узлами в точках $y=0$ и $y=b$. Таким образом, электромагнитные волны распространяются по волноводу в направлении $+z$ и относительно оси $z$ мы имеем бегущие волны.



Мы видим, что уравнению (22) удовлетворяет смешанная волна, которая является стоячей по оси $y$ и бегущей по оси $z$ волной:

$$\psi(y,\ z,\ t) = A\sin k_y y\cos(k_z z - \omega t). \tag{23}$$

Для этой волны справедливо дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = c^2k_y^2 + c^2k_z^2. \tag{24}$$

Множитель $\sin k_y y$ в (23) удовлетворяет условию $E_x=0$ в $y=0$. Однако нам нужно, чтобы $\sin k_y y = 0$ и при $y=b$, т. е. чтобы

$$k_y b = \pi,\ 2\pi,\ \ldots,\ m\pi,\ \ldots \tag{25}$$

Такие волны называются ТЕ-модами (поперечные моды электрического поля). Поскольку магнитное поле однозначно связано с электрическим, то рассматривать его отдельно нет необходимости.

*Граничная частота со стороны низких частот.* Рассмотрим наинизшую моду. Мы получим ее, если в уравнении (25) положим $m=1$. Электрическое поле для этой моды показано на рис. 7.1. Подставляя уравнение (25) в уравнение (24), для $m=1$ имеем

$$\omega^2 = \frac{c^2\pi^2}{b^2} + c^2k_z^2. \tag{26}$$

Таким образом, дисперсионное соотношение между $\omega$ и $k_z$ (для моды, у которой $k_y b=\pi$) по внешнему виду аналогично дисперсионному соотношению для плоских волн, распространяющихся в направлении $z$ в ионосфере:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2, \tag{27}$$

или дисперсионному соотношению для связанных маятников (в длинноволновом пределе):

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{Ka^2}{M}k^2. \tag{28}$$

Поэтому следует ожидать, что величина $c^2\pi^2/b^2$ определяет нижнюю граничную частоту (точнее, квадрат этой частоты) и для вынуждающей частоты $\omega$, меньшей этой граничной частоты, дисперсионное соотношение (26) примет вид

$$\omega^2 = \frac{c^2\pi^2}{b^2} - c^2\varkappa_z^2. \tag{29}$$

Это предположение справедливо. Для частоты $\omega < \pi c/b$ волновое уравнение (21) имеет решение

$$\psi(y,\ z,\ t) = A\sin k_y y\cos\omega t\cdot e^{-\varkappa_z z} \tag{30}$$

при условии, что $\omega$, $k_y$ и $\varkappa_z$ связаны уравнением

$$\omega^2 = c^2k_y^2 - c^2\varkappa_z^2, \tag{31}$$

что равенства (25) удовлетворяются и что $\omega^2$ меньше $c^2\pi^2/b$ (для $m=1$), так что равенство (29) удовлетворяется при положительном $\varkappa_z^2$. [Заметим, что в уравнение (30) мы могли бы включить член, пропорциональный $\exp(+\varkappa_z z)$. Однако граничное условие,

заключающееся в том, что волновод простирается до $z = +\infty$, обращает в нуль коэффициенты при этом члене.]

*Физическая природа граничной частоты для волновода.* Предположим, что частота фиксирована, а ширина $b$ волновода меняется. Если $b$ бесконечно велико, то уравнение (26) переходит в дисперсионное соотношение для плоских электромагнитных волн в вакууме, распространяющихся в направлении $+z$. Волнам «кажется», что они распространяются в передающей линии из плоскопараллельных пластин. Для конечного $b$ величина $k_y$ (которая равна $\pi/b$) не равна нулю. Таким образом, если рассматривать волновую функцию как суперпозицию плоских бегущих волн (мы это всегда можем сделать, даже если имеем чисто стоячую волну), то мы видим, что уменьшение $b$ от бесконечности до некоторого конечного значения изменяет волну от чисто бегущей волны, распространяющейся вдоль $+\hat{\mathbf{z}}$, до суперпозиции с ненулевой компонентой вектора распространения $k_y$ вдоль $\hat{\mathbf{y}}$. В действительности мы должны иметь две бегущие волны, распространяющиеся в направлениях $+y$ и $-y$, суперпозиция которых дает стоячую волну вдоль $\hat{\mathbf{y}}$. *Величина* $\mathbf{k}$ всегда определяется дисперсионным соотношением для вакуума:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_z^2 + k_y^2. \tag{32}$$

Поэтому, если $y$-я компонента $\mathbf{k}$ увеличилась от нуля до какого-то конечного значения, то это должно привести к уменьшению $z$-й компоненты вектора $\mathbf{k}$. При дальнейшем уменьшении $b$ компонента по $y$ будет возрастать, а по $z$ уменьшаться дальше. Для любого фиксированного $b$ волновая функция может быть представлена суперпозицией плоских волн, бегущих «крест-накрест» вдоль волновода и накладывающихся друг на друга так, чтобы удовлетворить граничному условию на боковых пластинах. (Мы можем сказать, что токи, генерированные в боковой пластине приходящей волной, создают зеркально отраженную волну, бегущую в обратном направлении оси $y$.) При $b$, достаточно малом, $z$-я компонента $\mathbf{k}$ станет равной нулю и волны не будут распространяться вдоль волновода, а будут лишь отражаться туда и обратно между боковыми пластинами. Периодом $T_{гр}$ (соответствующим граничной частоте) будет время, необходимое плоской волне в вакууме, чтобы пройти расстояние от одной боковой полосы до другой и обратно:

$$T_{гр} = \frac{2b}{c}.$$

Тогда

$$\omega_{гр} = 2\pi\nu_{гр} = \frac{2\pi}{T_{гр}} = \frac{2\pi}{2b/c} = \frac{c\pi}{b}. \tag{33}$$

Сравнивая уравнения (33) и (26), мы видим, что уравнение (33) действительно определяет граничную частоту.

Для частот, меньших граничной частоты, амплитуда волны с возрастанием $z$ экспоненциально уменьшается, несмотря на то что мы имеем дело с вакуумом. Физический смысл уменьшения электрического поля состоит в следующем. Благодаря наличию проводящих боковых пластин заряды на верхней и нижней пластинах могут стекать, нейтрализуя друг друга. В области $z=0$ внешний источник все время «доставляет» новые заряды, поддерживая электрическое поле постоянным. С ростом $z$ влияние вынуждающей силы уменьшается, и при очень малой частоте заряды успевают нейтрализоваться.



*Бегущие «крест-накрест» волны.* Смешанная стоячая и бегущая волна, выражаемая уравнением (23), эквивалентна суперпозиции пересекающихся плоских волн, бегущих вдоль волновода. Это можно показать (см. задачу 7.1) с помощью равенства

$$\psi = A \sin k_y y \cos(k_z z - \omega t) = \\ = \frac{1}{2} A \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t) - \frac{1}{2} A \sin(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t), \tag{34}$$

где

$$\mathbf{k}_1 = \hat{\mathbf{z}} k_z + \hat{\mathbf{y}} k_y, \quad \mathbf{k}_2 = \hat{\mathbf{z}} k_z - \hat{\mathbf{y}} k_y.$$

Пересечение бегущих волн объясняется тем, что $y$-компоненты $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ имеют противоположные знаки.

*Фазовая скорость, групповая скорость и с.* Картина пересекающихся бегущих волн весьма наглядна, и с ее помощью легко найти соотношения между фазовой и групповой скоростями. Обратимся лишь к одной из двух бегущих волн из уравнения (34), как это показано на рис. 7.2. Рассмотрим небольшой участок волнового фронта, распространяющегося по диагонали через волновод на расстояние $ct$ за время $t$. На рис. 7.2 этот волновой фронт перпендикулярен направлению, обозначенному «луч $\mathbf{k}_1$». Нас интересуют фазовая и групповая скорости *в направлении* $z$. (Мы знаем, что только в этом направлении существует бегущая волна. Составляющая $\mathbf{k}_2$ приведет к уничтожению бегущей волны вдоль $y$, но внесет тот же вклад, что и $\mathbf{k}_1$, в направление $z$.) В то время как луч пробегает расстояние $ct$, пересечение волнового фронта с любым фиксированным значением $y$ (например, $y=b$) переносится на расстояние, обозначенное $v_\phi t$. Это дает нам фазовую скорость вдоль $z$, которая равна скорости, с которой распространяется вдоль $z$ гребень волны. Заметим, что, когда $\theta$ (см. рис. 7.2) становится равным 90°, фазовая скорость устремляется к бесконечности. Имеем

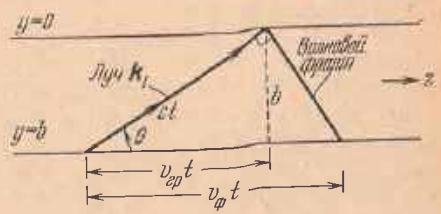


Рис. 7.2. Одна из бегущих волн в волноводе.

$$v_\phi = \frac{c}{\cos\theta}. \tag{35}$$

Групповая скорость определяет скорость переноса энергии в направлении $z$. Если мы «нанесем метку» на волну, то она будет

распространяться с групповой скоростью. Луч, обозначенный $\mathbf{k}_1$, будет переносить импульс со скоростью $c$ по диагонали волновода. Волна с вектором $\mathbf{k}_2$ дает импульс, $y$-я часть которого уничтожится с $y$-й частью волны с вектором $\mathbf{k}_1$. «Метки» волн $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ пройдут за время $t$ расстояние, показанное на рис. 7.2. Таким образом, мы имеем

$$v_{\text{гр}} = c\cos\theta. \tag{36}$$

Мы могли бы показать, используя дисперсионное соотношение, что выражения для $v_\phi$ и $v_{\text{гр}}$, определяемые формулами (35) и (36), справедливы. Вместо этого решим обратную задачу, т. е. выведем дисперсионное соотношение из равенств (35) и (36):

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\cos\theta},$$

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk_z} = c\cos\theta.$$

Перемножая $v_\phi$ и $v_{\text{гр}}$, получим

$$v_\phi v_{\text{гр}} = \frac{\omega}{k_z}\frac{d\omega}{dk_z} = c^2, \tag{37}$$

или

$$\frac{d(\omega^2)}{d(k_z^2)} = c^2, \quad \text{т. е.} \quad d(\omega^2) = c^2\, d(k_z^2).$$

Интегрирование дает

$$\omega^2 = c^2k_z^2 + \text{const}. \tag{38}$$

Константу можно определить, положив $k_z = 0$ (при этом $\omega = \omega_{\text{ср}}$) и потребовав, чтобы время пробега волной расстояния «туда и обратно» (от одной боковой полосы до другой и обратно) $T_{\text{ср}}$ равнялось $2b/c$. Таким образом, мы получим дисперсионное соотношение (26). Более высокие моды ($m = 2, 3, \ldots$) мы получим, полагая граничную частоту гармоникой самой низкой граничной частоты ($m = 1$):

$$\omega^2 = c^2k_z^2 + \frac{c^2\pi^2m^2}{b^2}. \tag{39}$$

Пример 2. *Отражение и прохождение света, падающего из стекла в воздух.* Это еще один пример двухмерной волны. Предположим, что пространство от $z = -\infty$ до $z = 0$ заполнено стеклом. При $z = 0$ стекло кончается, и начинается вакуум (или воздух), который простирается до $z = +\infty$. Можно было бы думать, что вакуум всегда будет вести себя как не реактивная, т. е. дисперсивная, среда. Однако в примере 1 (прямоугольный волновод) было показано, что, когда у нас нет плоских волн ($E_x$ изменялось вдоль оси $y$ и вдоль оси распространения $z$), волновод при некоторых условиях становится реактивным (либо он слишком узок, либо, что то же самое, частота слишком мала) даже в вакууме. Нечто подобное может происходить при падении света из стекла в воздух, если угол падения становится слишком большим. Это имеет большое практическое значение в оптическом приборостроении, где явление полного внут-



реннего отражения позволяет получить 100%-ное отражение света. Соответствующий пример показан на рис. 7.3.

Рассмотрим подробно, в чем заключается это явление. Волны света удовлетворяют волновому уравнению как в стекле, так и в вакууме (рассматриваем одну частоту $\omega$). Граница между стеклом и вакуумом находится в плоскости $z = 0$. Вектор распространения $\mathbf{k}_1$ падающей волны имеет компоненты $k_z$ вдоль $\hat{\mathbf{z}}$ и $k_y$ вдоль $\hat{\mathbf{y}}$. Таким образом, мы имеем двухмерную задачу (примерно ту же, что и для волновода). Геометрические условия показаны на рис. 7.4. В стекле

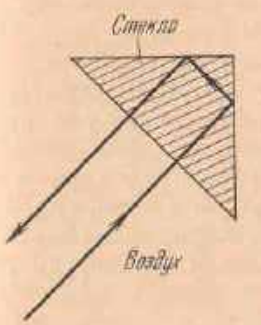



Рис. 7.3. Призма обратного хода, используемая для отклонения светового пучка на 180° без потери интенсивности.

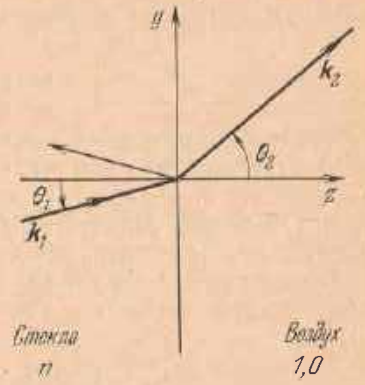



Рис. 7.4. Отражение и прохождение лучей, падающих из стекла в воздух.

величина $k_1$ вектора $\mathbf{k}_1$ равна произведению показателя преломления $n$ на отношение $\omega/c$, а величина $k_2$ вектора $\mathbf{k}_2$ равна отношению $\omega/c$:

$$k_1 = n\frac{\omega}{c}, \qquad k_2 = \frac{\omega}{c}. \tag{40}$$

Дисперсионное соотношение для среды 2 (вакуум) имеет вид

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_2^2 = k_{2y}^2 + k_{2z}^2. \tag{41}$$

Покажем, что $k_{2y}$ должно равняться $k_{1y}$. Мы знаем, что $k_{1y}$ равно произведению $2\pi$ на число гребней волны, приходящееся на единицу длины вдоль оси $y$ в среде 1. То же справедливо и для $k_{2y}$, только в среде 2. Будем двигаться вдоль оси $y$ в плоскости $z = 0$. Число гребней, мимо которых мы пройдем, в стекле и в вакууме должно быть одинаковым. Таким образом, имеем

$$k_{2y} = k_{1y} = k_1\sin\theta_1 = n\frac{\omega}{c}\sin\theta_1. \tag{42}$$

Подставляя уравнение (42) в (41), получим

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{n^2\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1 + k_{2z}^2, \tag{43}$$

т. е. имеем дисперсионное соотношение

$$k_{2z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 - n^2 \sin^2 \theta_1). \tag{44}$$

*Критический угол полного внутреннего отражения.* При увеличении угла падения $\theta_1$ $z$-я компонента вектора $\mathbf{k}_2$ будет уменьшаться. В конце концов мы достигнем угла падения, при котором $k_{2z}$ равно нулю (предполагаем, что $n$ больше единицы, что имеет место, например, для видимого света в стекле или воде). Такой угол называется *критическим углом падения*. В соответствии с уравнением (44) критический угол падения определяется из условия

$$\boxed{n \sin \theta_{кр} = 1.} \tag{45}$$

(Для стекла с показателем преломления $n = 1{,}52$ получим $\theta_{кр} = 41{,}2°$.) При критическом угле падения преломившийся пучок света касателен поверхности стекла.

*Закон Снеллиуса.* Для углов $\theta$ между нулем и $\theta_{кр}$ пучок света частично отражается и частично преломляется и проходит в вакуум. В этом случае существует угол $\theta_2$ (рис. 7.4) и соотношение $k_{2y} = k_{1y}$ эквивалентно *закону Снеллиуса* (в п. 4.3 мы ввели его другим способом):

$$k_{2y} = k_2 \sin \theta_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \theta_2,$$

$$k_{1y} = k_1 \sin \theta_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \theta_1.$$

Положив $k_{2y} = k_{1y}$, получим

$$\boxed{n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.} \tag{46}$$

*Полное внутреннее отражение.* Для углов падения, больших критических, дисперсионное соотношение получается заменой в уравнении (44) $k_{2z}^2$ на $-\varkappa_{2z}^2 = -\varkappa^2$:

$$\varkappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}[n^2 \sin^2 \theta_1 - 1], \tag{47}$$

где

$$n \sin \theta_1 > 1.$$

В этом случае волновая функция (электрическое или магнитное поле) в среде 2 является бегущей волной в направлении $y$, но экспоненциальной в направлении $z$:

$$\psi(y, z, t) = A \cos(\omega t - k_y y)\, e^{-\varkappa z}, \tag{48}$$

где $\varkappa$ определяется уравнением (47), а $k_y$ равно $k_1 \sin \theta = n(\omega/c) = \sin \theta_1$. Средняя во времени плотность энергии пропорциональна среднему во времени квадрату $\psi(y, z, t)$:

$$\text{Плотность энергии} \propto e^{-2\varkappa z}. \tag{49}$$



В качестве приложения уравнения (47) рассмотрим призму (см. рис. 7.3), меняющую направление пучка на обратное. На боковых гранях призмы свет падает на границу стекло — воздух под углом $\theta_1 = 45°$. Этот угол превышает критический угол $\theta_{кр} = 41{,}2°$ (для стекла $n = 1{,}52$). Поэтому луч света полностью отразится. Для поля, проникающего в вакуум (оно уменьшается по экспоненте), найдем

$$\delta = \varkappa^{-1} = \frac{c}{\omega}[n^2 \sin^2 \theta_1 - 1]^{-1/2} = \frac{\lambda}{2\pi}\left[\frac{(1{,}52)^2}{2} - 1\right]^{-1/2} = 0{,}4\lambda,$$

т. е. на расстоянии нескольких длин волн поле в вакууме станет пренебрежимо малым.

Наглядную демонстрацию полного внутреннего отражения можно получить, плавая с маской под водой. Если вы будете смотреть из воды вперед на границу вода — воздух, то увидите, что она блестит, как жидкая ртуть. Это происходит потому, что угол, под которым вы смотрите, превышает критический.

*Проникновение света через барьер.* Если вакуум не простирается до бесконечности, а ограничен второй пластиной из стекла, то в уравнение (48) нужно добавить второй член с положительной экспонентой $\exp(+\varkappa z)$. Таким образом, мы имеем здесь дело с типичной задачей проникновения через барьер.

Красивый и остроумный опыт, доказывающий экспоненциальное уменьшение плотности энергии, был выполнен студентом-дипломником Куном из Принстона *). Хотя этот опыт относится к области квантовой механики, он подтверждает результаты классической оптики. Это один из многих результатов классической оптики, которые сохраняются и в квантовой механике. Кун установил две призмы с воздушным зазором между ними так, что свет (зеленая линия ртути) падал через одну призму на границу стекло — воздух под углом, большим критического. Энергия света, переносимая через воздушный зазор ко второй призме, пропорциональна плотности энергии на поверхности второй призмы. Из квантовой механики мы знаем, что свет частоты $\omega$ переносится неделимыми частицами-фотонами и энергия каждого фотона равна $\hbar\omega$. Таким образом, для данной частоты $\omega$ энергия пропорциональна числу фотонов. Кун измерил плотность энергии, подсчитывая число испущенных фотонов в зависимости от толщины воздушного зазора, и подтвердил предсказанную экспоненциальную зависимость (49).

Качественная демонстрация проникновения через барьер и быстрого уменьшения поля в световой волне с удалением от стекла в вакуум легко осуществима с помощью стеклянной призмы или куба. Рассмотрим некоторую точку поверхности (через стекло) под углом, дающим полное отражение для линии вашего взгляда. Поднесите палец и расположите его над точкой на некотором расстоянии. Палец будет невидим, так как лежит в запрещенной области.

---

*) D. D. Coon, Am. J. Phys. **34**, 240 (1966).

Теперь прикоснитесь пальцем к поверхности. Вы увидите отпечаток пальца. Выпуклости кожи на пальце, соприкасаясь с полностью отражающей поверхностью стекла, нарушают полное отражение. Впадины кожи не касаются стекла и не нарушают полного отражения. Это выглядит, как серебряные завитки, разделяющие гребни. Глубина этих впадин имеет порядок нескольких длин волн, т. е. порядок глубины проникновения $\delta = \varkappa^{-1}$. Если глубина впадин меньше $\delta$, поле будет в заметной степени проникать через «барьер» между стеклом и кожей, и полное внутреннее отражение будет нарушено. Этот опыт можно выполнить с прозрачным, наполненным водой прямоугольным сосудом вместо куба или призмы.

### 7.3. Волны в воде

Водяные волны наблюдать нетрудно. В детстве мы следили за ними в ванне, в пруду, озере или море, наслаждаясь их красотой и сложностью. Теперь мы сможем получить интеллектуальное наслаждение, поняв их природу. Это понимание требует упрощений. Поэтому пренебрежем некоторыми свойствами реальной воды. Например, пренебрежем вязкостью, которая является результатом внутреннего трения. (Профессор Ричард Фейнман дал такой идеализированной воде название «сухой» воды.) Ограничимся также рассмотрением волн с небольшой амплитудой.

Будем изучать геометрическую структуру и дисперсионное соотношение $\omega(k)$ для волн в воде в рамках рассмотренных упрощений. Все результаты, которые мы получим, можно проверить на опытах в аквариуме или в другом подходящем сосуде. (См. домашний опыт 7.11.)

*Прямые волны.* Рассмотрим волны в воде, имеющие определенную длину. Пусть гребни и впадины этих волн образуют параллельные прямые. Такие волны называются *прямыми*. Они представляют собой двухмерный аналог трехмерных плоских волн.

Предположим, что у нас есть бесконечный водоем постоянной глубины $h$. Когда нет волны, поверхность воды плоская. Пусть для этой плоскости $y = 0$ и ось $y$ направлена вверх, а волна распространяется горизонтально вдоль оси $x$, так что гребни и впадины расположены вдоль линий, перпендикулярных $\hat{\mathbf{x}}$.

Обозначим через $x$ и $y$ *равновесные координаты* данной частицы воды. Величина $x$ может быть любой в пределах от $x = -\infty$ до $+\infty$, а $y$ лежит в пределах от $y = -h$ (дно озера) до $y = 0$ (поверхность).

В волне частица совершает движение, которое является комбинацией движения вверх — вниз (вдоль $y$) и движения вперед — назад (вдоль $x$). Вектор смещения в прямой волне имеет только $x$- и $y$-компоненты:

$$\boldsymbol{\psi}(x, y, t) = \hat{\mathbf{x}}\psi_x(x, y, t) + \hat{\mathbf{y}}\psi_y(x, y, t). \tag{50}$$



Мгновенная скорость частицы воды с равновесными координатами $x$, $y$ равна частной производной $\boldsymbol{\psi}$ по $t$:

$$\mathbf{v}(x, y, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(x, y, t)}{\partial t} = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial \psi_x}{\partial t} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial \psi_y}{\partial t}. \tag{51}$$

*Свойства идеальной воды.* Здесь мы рассмотрим некоторые свойства идеальной воды.

1. *Сохранение массы.* При изучении электрического тока (том II, п. 4.2) было показано, что *сохранение электрического заряда* выражается *уравнением непрерывности*

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{52}$$

из которого следует, что изменение заряда в бесконечно малом объеме связано с током через поверхность, ограничивающую этот объем. В нашем случае следует заменить плотность заряда $\rho$ на плотность воды. Тогда уравнение (52) выражает закон сохранения массы. Далее, с хорошей степенью точности воду можно считать *несжимаемой*. Тогда плотность $\rho$ постоянна и не зависит ни от времени, ни от координат. Поэтому правая часть уравнения (52) равна нулю. Воспользовавшись выражением (51) для скорости $\mathbf{v}$, мы получаем

$$0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

или

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}),$$

т. е.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = \text{const}. \tag{53}$$

2. *Отсутствие пузырьков.* Константа в уравнении (53) должна быть равна нулю. В противном случае, в соответствии с теоремой Гаусса, интеграл от $\boldsymbol{\psi}$ по поверхности маленькой сферы не будет равен нулю, что может означать только наличие пузырьков. Но мы предположим, что пузырьков нет. Таким образом, мы нашли, что «сохраняющаяся» и несжимаемая вода, в которой нет пузырьков, удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = \frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial y} = 0. \tag{54}$$

3. *Отсутствие водоворотов.* Линейный интеграл от скорости по окружности воронки водоворота не равен нулю. В бесконечно малом масштабе наличие маленьких завихрений приведет к тому (закон Стокса), что ротор от вектора $\mathbf{v}$ не будет равен нулю. (Чтобы вспомнить понятие ротора вектора, см. т. II, пп. 2.15—2.18.) Мы предполагаем, что завихрений нет, т. е.

$$0 = \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{\psi})$$

$$\nabla \times \psi = \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi_y - \frac{\partial}{\partial y}\psi_x\right) = \text{const}. \tag{55}$$

*Стоячие волны в воде.* Мы хотим найти форму водяных волн без алгебраических выкладок, с помощью интуиции. Рассмотрим, например, прямоугольный аквариум или другой сосуд в этом роде. Наполним его на 15—20 см водой и потрясем осторожно вдоль $x$, стараясь вызвать синусоидальные моды. Мы обнаружим, что самая низкая мода выглядит, как показано на рис. 7.5.

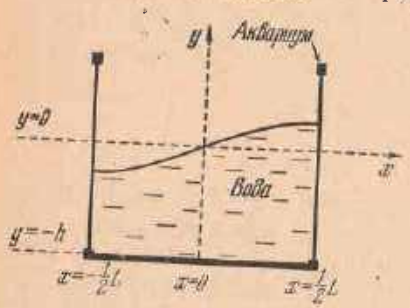



Рис. 7.5. Низшая синусоидальная мода в прямоугольном аквариуме.

Кинув в воду несколько кофейных зерен, можно наблюдать за движением воды. Нетрудно заметить, что все кофейные зерна покоятся в один и тот же момент времени и что смещения $x$ и $y$ равны нулю в одно и то же время. Этого и следует ожидать для нормальной моды, т. е. для стоячей волны. Все степени свободы (движущиеся элементы) колеблются в фазе. Поэтому мы можем предположить, что для достаточно малых колебаний временная зависимость $\psi_x$ и $\psi_y$ определяется гармоническим колебанием с одинаковой фазовой константой, т. е. членом $\cos \omega t$.

Далее предположим, что зависимость вертикального смещения $\psi_y$ от $x$ соответствует синусоидальной стоячей волне. Если мода выглядит, как показано на рис. 7.5, то $\psi_y$ имеет узел в $x = 0$. Поэтому $\psi_y$ содержит член $\sin kx$. Таким образом, можем записать

$$\psi_y(x, y, t) = \cos \omega t \sin kx\, f(y), \tag{56}$$

где $f(y)$ пока неизвестная функция от $y$.

*Граничные условия на стенках.* Как $\psi_x$ зависит от $x$? На краях аквариума частицы воды могут смещаться только вниз или вверх. Поэтому те места, где $\psi_y$ имеет максимум (стенка), соответствуют узлам $\psi_x$. Таким образом, мы должны иметь $\cos kx$ для $\psi_x$, тогда как для $\psi_y$ мы имеем $\sin kx$:

$$\psi_x(x, y, t) = \cos \omega t \cos kx\, g(y), \tag{57}$$

где $g(y)$ пока неизвестная функция от $y$.

*Связь между горизонтальным и вертикальным движением.* Теперь воспользуемся тем, что div и rot вектора смещения $\psi$ равны нулю. Легко показать, что из уравнений (56) и (57) следует:

$$\nabla \cdot \psi = 0: \quad -kg(y) + \frac{df(y)}{dy} = 0; \tag{58}$$

$$\nabla \times \psi = 0: \quad \frac{dg(y)}{dy} - kf(y) = 0. \tag{59}$$



Продифференцировав по $y$ уравнение (58) и сложив полученное выражение с (59), мы исключим $dg/dy$ и получим

$$\frac{d^2f}{dy^2} = k^2 f(y). \tag{60}$$

Это уравнение имеет общее решение

$$f(y) = Ae^{ky} + Be^{-ky}. \tag{61}$$

Аналогичное решение легко получить и для $g(y)$:

$$g(y) = Ae^{ky} - Be^{-ky}. \tag{62}$$

*Граничное условие на дне.* Теперь воспользуемся тем граничным условием, что на дне аквариума (озера) нет вертикального движения воды. Условие $\psi_y = 0$ при $y = -h$ эквивалентно условию $f(y) = 0$ при $y = -h$. Из уравнения (61) получим $B = -A \exp(-2kh)$. Таким образом, имеем окончательный результат для стоячей синусоидальной волны в аквариуме (озере) с постоянной глубиной $h$:

$$\psi_y = A \cos \omega t \sin kx\,(e^{ky} - e^{-2kh}e^{-ky}), \tag{63}$$

$$\psi_x = A \cos \omega t \cos kx\,(e^{ky} + e^{-2kh}e^{-ky}). \tag{64}$$

Уравнения (63) и (64) дают мгновенные значения смещений частицы воды с *равновесными* координатами $x$, $y$. Как легко показать из этих уравнений, движение данной частицы в стоячей волне в воде состоит из гармонического колебания вдоль прямой линии в плоскости $xy$. Это легко увидеть, наблюдая за кофейными зернами в аквариуме.

*Волны в глубокой воде.* Если глубина $h$ велика по сравнению с длиной волны, то член $\exp(-2kh)$ практически равен нулю и мы можем пренебречь вторым членом в выражениях для $g(y)$ и $f(y)$. В этом случае уравнения (63) и (64) примут вид

$$\psi_y = A \cos \omega t \sin kx\, e^{ky}, \tag{65}$$

$$\psi_x = A \sin \omega t \cos kx\, e^{ky}. \tag{66}$$

Мы видим, что волны синусоидальны в направлении $x$ и экспоненциальны в направлении $y$. Глубина проникновения амплитуды $\delta$ равна $1/k$ или, что то же, $\lambda/2\pi$. Величина $\lambda/2\pi$ называется *приведенной длиной волны* и обозначается символом $\lambda\!\!\!^{-}$. Таким образом, для волн в глубокой воде имеем

$$f(y) = e^{ky} = e^{-k|y|} = e^{-|y|/\lambda\!\!\!^{-}}. \tag{67}$$

*Глубина проникновения для амплитуды* (расстояние, на котором амплитуда уменьшается в $e$ раз) *равна приведенной длине волны.* Поэтому амплитуда колебаний частицы воды, находящейся в состоянии равновесия под водой на глубине одной длины волны от поверхности, меньше амплитуды колебаний частицы на поверхности в $\exp(-2\pi) \approx 1/500$ раз. Мы видим, что колебания почти полностью затухают на глубине порядка одной длины волны. На такой глубине движение будет пренебрежимо мало, и мы можем считать, что имеем дело с волнами в глубокой воде.

*Волны в неглубокой воде.* Под такими волнами понимают волны, которые возникают в сосуде (водоеме), равновесная глубина $h$ которого мала по сравнению с $\lambda$. В этом случае мы можем аппроксимировать зависимость $\psi_x$ и $\psi_y$ от $y$, оставив в разложении в ряд Тейлора функций $f(y)$ и $g(y)$ только первые члены. Легко показать, что для $h \ll \lambda$ уравнения (63) и (64) примут вид

$$\psi_y = 2A \cos \omega t \sin kx\,[k(y+h)], \tag{68}$$

$$\psi_x = 2A \cos \omega t \cos kx. \tag{69}$$

Мы видим, что для такой волны горизонтальное смещение частицы $\psi_x$ не зависит от ее равновесной координаты $y$. Вертикальное смещение $\psi_y$ меняется линейно с глубиной частицы, достигая нуля на дне и максимума на поверхности. На поверхности максимальное вертикальное смещение меньше максимального горизонтального в $h/\lambda \ll 1$ раз.

В нашей модели идеализированной воды мы пренебрегли трением воды о грубую поверхность дна. Для волн в глубокой воде это упущение несущественно. Для волн в мелкой воде трение играет важную роль, в чем можно убедиться, возбудив стоячие волны в прямоугольной ванночке (см. домашний опыт 7.11). Другое приближение заключается в том, что мы пренебрегли внутренним трением, т. е. вязкостью. Чтобы понять, как сказывается вязкость, выполните какой-нибудь из домашних опытов с маслом вместо воды.

*Дисперсионное соотношение для гравитационных волн в воде.* Мы рассмотрели геометрию идеальных волн в воде, но еще ничего не знаем о соотношении между «формой» (длиной волны и глубиной) и частотой. Чтобы изучить эту связь, нужно рассмотреть возвращающую силу, которая действует на воду в волне. (Напомним, что возвращающая сила, приходящаяся на единицу смещения и на единицу массы, равна $\omega^2$. Это — общий результат, справедливый как для гармонических водяных волн, так и для любых других гармонических волн.)

При изучении мод в главе 1 мы пришли к выводу, что в данной моде все движущиеся элементы имеют одно значение $\omega^2$ и чтобы найти соотношение между частотой моды и ее формой (если она известна), достаточно рассмотреть движение для одной степени свободы движущегося элемента. В нашей задаче форма волны определяется уравнениями (63) и (64). Поэтому мы можем рассматривать движение отдельной частицы только в направлении оси $x$ (или $y$). Будем рассматривать движение по $x$ бесконечно малого объема воды, расположенного очень близко к поверхности.

Рассмотрим небольшой объем воды (рис. 7.6), имеющий в равновесии размеры $\Delta x$ и $\Delta y$ и длину $L$ (по оси $z$). Пусть размеры $\Delta x$ и $\Delta y$ малы по сравнению с длиной волны. Возвращающая сила $F_x$, действующая на объем воды, равна площади $L\,\Delta y$, умноженной на разность давлений в точках $x$ и $x+\Delta x$. Разность давлений определяется произведением $\rho g$ (плотность воды на ускорение силы тя-



жести) на разность высот в точках $x$ и $x+\Delta x$, т. е. на разность $\psi_y(x+\Delta x) - \psi_y(x)$. Эта разность равна произведению производной $\partial\psi_y/\partial x$ на равновесное значение $\Delta x$. Окончательно имеем

$$F_x = -L\,\Delta y\,[p(x+\Delta x) - p(x)] = -L\,\Delta y\,\rho g\,[\psi_y(x+\Delta x) - \psi_y(x)] =$$

$$= -L\,\Delta y\,\Delta x\,\rho g\,\frac{\partial \psi_y}{\partial x} = -(\Delta M) g \left[\frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right]_{y=0}, \tag{70}$$

где $\Delta M = \rho L\,\Delta y\,\Delta x$ — масса воды в объеме рассматриваемого элемента. Сила $F_x$ создает ускорение, направленное по оси $x$. Его величина равна $\partial^2\psi_x/\partial t^2$, и так как движение гармоническое, то $\partial^2\psi_x/\partial t^2 = -\omega^2\psi$. Второй закон Ньютона для массы $\Delta M$

$$F_x = (\Delta M)\,\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2},$$

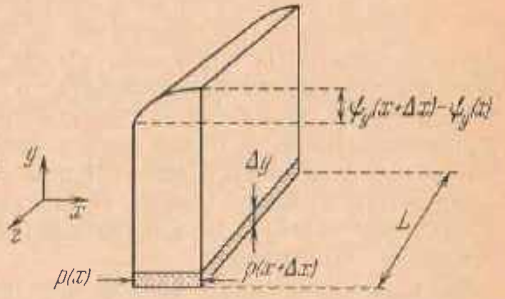



Рис. 7.6. Гравитационная возвращающая сила вдоль оси $x$ для элемента объема воды.
Выделенная часть объема испытывает силу, пропорциональную разности давления $p(x+\Delta x) - p(x)$. Эта разность пропорциональна разности высот воды $\psi_y(x+\Delta x) - \psi_y(x)$.

дает, если воспользоваться выражением (70) для $F_x$,

$$(\Delta M)\,g \left[\frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right]_{y=0} = (\Delta M)\,\omega^2 [\psi_x]_{y=0}. \tag{71}$$

Теперь, используя $\psi_y$ и $\psi_x$ из уравнений (63) и (64), получим

$$\boxed{\omega^2 = gk\,\frac{(1-e^{-2kh})}{(1+e^{-2kh})}}. \tag{72}$$

Выражение (72) и есть искомое дисперсионное соотношение. Из него легко получить дисперсионное соотношение и соответствующие фазовые скорости для гравитационных волн в глубокой и мелкой воде:

Волны в глубокой воде: $\omega^2 = gk$, $\quad v_\phi = \sqrt{g\lambda}$, (73)

Волны в мелкой воде: $\omega^2 = gk\,(h/\lambda)$, $\quad v_\phi = \sqrt{gh}$. (74)

Таким образом, гравитационные волны в мелкой воде не диспергируют. Глубинные гравитационные волны имеют дисперсию: фазовая скорость удваивается, если длина волны возрастает в четыре раза.

*Волны поверхностного натяжения.* При выводе дисперсионного соотношения (72) мы пренебрегли возвращающей силой, возникающей от поверхностного натяжения. Для данного элемента соответствующий вклад в возвращающую силу пропорционален произведению коэффициента поверхностного натяжения $T$ на кривизну поверхности. Последняя пропорциональна $k^2$. Поэтому вклад от сил поверхностного натяжения пропорционален $Tk^2$. Гравитационный вклад

пропорционален весу $Mg$, т. е. $\rho g$. Таким образом, следует предположить, что относительный вклад в $\omega^2$ сил поверхностного натяжения и сил тяжести определяется безразмерным отношением $Tk^2/\rho g$. Это предположение справедливо. (См. задачу 7.33.)

*Бегущие волны в воде.* Покажите сами (задача 7.31), что бегущие волны в воде описываются уравнениями

$$\psi_y = A\cos(\omega t - kx)\,(e^{ky} - e^{-2kh}e^{-ky}), \tag{75}$$

$$\psi_x = A\sin(\omega t - kx)\,(e^{ky} + e^{-2kh}e^{-ky}). \tag{76}$$

Из этих уравнений сразу следует, что у бегущих волн в глубокой воде данная частица воды движется по кругу в плоскости $xy$, смещаясь вперед, когда она на гребне волны, и назад, когда она находится во впадине. В общем случае любой глубины $h$ частицы воды движутся по эллипсу. Движение по эллипсу аналогично круговому движению в глубокой воде, с той лишь разницей, что между поверхностью и дном сосуда (озера, океана) происходит постепенное «сплющивание» окружности.

Все это справедливо, если можно пренебречь трением о дно. В противном случае воде будет легче продвигаться вперед на гребнях, чем смещаться назад во впадинах. В результате будет происходить перенос воды, и в этом случае волны «ломаются». Действительно, около берега можно наблюдать, как на волнах образуются буруны, которые опрокидываются вперед по ходу волны. Именно поэтому в сильное волнение (в случае больших длин волн) пловец должен держаться вдали от каменистого берега, в противном случае волна может с большой скоростью выбросить его на берег.

### 7.4. Электромагнитные волны

В этом пункте мы используем уравнения Максвелла, чтобы дать общее описание явлений, с которыми мы познакомились при рассмотрении передающей линии из плоскопараллельных пластин. Таким образом, мы подготовимся к лучшему пониманию поведения электромагнитных волн в трехмерном пространстве.

*Уравнение Максвелла для вакуума.* Эти уравнения имеют вид (см. том II, стр. 264)

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\nabla \times \mathbf{B}, \tag{77а}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \mathbf{E}, \tag{77б}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0. \tag{77в}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0. \tag{77г}$$

*Классическое уравнение для электромагнитных волн в вакууме.* Мы получим дифференциальное уравнение в частных производных



для $\mathbf{E}$, исключая $\mathbf{B}$ из уравнений (77). Сначала продифференцируем уравнение (77а) по времени, а затем используем уравнение (77б). Получим

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\nabla \times \mathbf{B},$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) =$$

$$= c\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} =$$

$$= c\nabla \times (-c\nabla \times \mathbf{E}) =$$

$$= -c^2\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}). \tag{77д}$$

Можно показать, что для любого вектора $\mathbf{C}$ [см. П. 4, уравнение (39)]

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{C}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{C}) - (\nabla\cdot\nabla)\,\mathbf{C}. \tag{78}$$

Подставляя $\mathbf{E}$ в уравнение (78) и помня, что $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ [уравнение (77в)], получаем из уравнения (77д)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, y, z, t)}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\mathbf{E}(x, y, z, t). \tag{79а}$$

Это векторное уравнение состоит из трех отдельных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 E_x; \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 E_y; \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 E_z. \tag{79б}$$

Итак, составляющие электрического поля $E_x$, $E_y$ и $E_z$ в отдельности удовлетворяют классическому волновому уравнению для недиспергирующих волн [см. уравнение (18), п. 7.2]. Исключив $\mathbf{E}$ из уравнений Максвелла, мы получим классическое волновое уравнение для трех компонент $\mathbf{B}$. (Задача 7.12.)

*Электромагнитные плоские волны в вакууме.* Электромагнитная *плоская волна* состоит из электрического $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ и магнитного $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ полей, обладающих следующими свойствами:

1. Существует единственное направление распространения. Мы совместим его с осью $\hat{\mathbf{z}}$. (Волны могут быть любой комбинацией бегущих или стоячих волн.)

2. Ни одна из компонент $\mathbf{E}$ или $\mathbf{B}$ не зависит от поперечных координат $x$ и $y$.

Таким образом, имеем

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}E_x(z, t) + \hat{\mathbf{y}}E_y(z, t) + \hat{\mathbf{z}}E_z(z, t), \tag{80}$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}B_x(z, t) + \hat{\mathbf{y}}B_y(z, t) + \hat{\mathbf{z}}B_z(z, t). \tag{81}$$

То, что мы имеем дело с плоскими волнами [выражения (80) и (81)], накладывает определенные ограничения на источник волн, на то, как они образуются, и т. д. Однако здесь нас не интересуют источники. Мы просто предполагаем, что волны откуда-то пришли и их форма определяется уравнениями (80) и (81).

*Электромагнитные плоские волны поперечны.* Применим уравнения Максвелла к волнам (80) и (81). Вначале используем закон Гаусса: $\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$. В вакууме плотность зарядов $\rho$ равна нулю. Так как любые компоненты поля $\mathbf{E}$ не зависят от $x$ или $y$, то частные производные по $x$ и $y$ равны нулю. Окончательно имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_z(z, t)}{\partial z} = 0. \tag{82}$$

Это означает, что $E_z$ не зависит от $z$. Кроме того, $E_z$ не зависит и от времени $t$. Действительно, рассмотрим уравнение Максвелла для тока смещения

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\nabla \times \mathbf{B}. \tag{83}$$

Возьмем $z$-компоненту уравнения (83). В правую часть уравнения войдут производные $\partial B_y/\partial x$ и $\partial B_x/\partial y$, равные нулю. Таким образом, $\partial E_z/\partial t$ равно нулю, и мы получили, что величина $E_z$ постоянна. Для простоты можем положить эту постоянную составляющую равной нулю. (Сделав так, мы не нарушим общности рассуждений, а поступим в согласии с принципом суперпозиции, позволяющим не рассматривать постоянную составляющую. Ее действие в случае необходимости может быть учтено.)

Аналогично, уравнение $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ показывает, что составляющая $B_z(z, t)$ не зависит от $z$. Независимость $B_z(z, t)$ от $t$ следует из закона индукции Фарадея

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \mathbf{E}. \tag{84}$$

Таким образом, $B_z$ можно также положить равным нулю без потери общности. Предположение, что $B_z$ и $E_z$ равны нулю, эквивалентно тому, что мы не рассматриваем статические поля, которые не влияют на переменное поле.

Таким образом, *электромагнитные плоские волны являются поперечными волнами*, т. е. у этих волн векторы электрических и магнитных полей перпендикулярны направлению распространения $\hat{\mathbf{z}}$.

*Связь $E_x$ и $B_y$.* У нас остались поля $E_x$, $E_y$, $B_x$ и $B_y$, а также $x$- и $y$-компоненты уравнений (83) и (84). Для $x$-компоненты уравнения (83) и $y$-компоненты уравнения (84) имеем

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}. \tag{85}$$

Аналогично, $y$-компонента уравнения (83) и $x$-компонента уравнения (84) дадут

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z}. \tag{86}$$

В соответствии с уравнениями (85) составляющие $E_x$ и $B_y$ не являются независимыми. Они «связаны» двумя дифференциальными



уравнениями в частных производных первого порядка (85). Если $E_x$ — известная функция $z$ и $t$, то $B_y$ полностью определено (с точностью до константы). Аналогичная связь существует между $E_y$ и $B_x$ [уравнения (86)]. Если $E_y$ известно, то $B_x$ можно определить; если $E_y$ равно нулю, то $B_x$ равно нулю (или постоянно).

*Линейная и эллиптическая поляризация.* Поля $E_x$ и $E_y$ не связаны уравнениями Максвелла. Они независимы. Это значит, что можно создать электромагнитную плоскую волну с составляющей $E_x$, отличной от нуля, и составляющей $E_y$, равной нулю для всех $z$ и $t$. В этом случае говорят, что волны *линейно поляризованы* по оси $\hat{\mathbf{x}}$. В случае линейно-поляризованных волн электрическое поле $E_x$ и магнитное поле $B_y$ — единственные ненулевые (или непостоянные) составляющие. Аналогично, можно иметь электромагнитные волны, линейно-поляризованные по $\hat{\mathbf{y}}$, тогда ненулевыми компонентами будут $E_y$ и $B_x$. Возможна также и любая комбинация $E_x$ и $E_y$ (для данной частоты) с произвольной относительной фазой. В этом случае говорят об *эллиптической поляризации*. Мы будем изучать поляризацию в главе 8.

Легко заметить, что уравнения (86) также связывают $E_y$ и $B_x$, как уравнения (85) связывают $E_x$ и *минус* $B_y$. Наличие минуса связано вот с чем. Если вы имеете линейно-поляризованные волны с $E_x$ и $B_y$ положительными, то, повернув оси координат на 90°, чтобы совместить новую ось $y$ с электрическим полем, вы обнаружите, что проекция магнитного поля на новую ось $x$ будет отрицательной величиной. (Задача 7.34.) Поэтому уравнения (86) физически эквивалентны уравнениям (85), и мы ничего не потеряем, если ограничимся рассмотрением уравнений (85).

Будем считать, что мы имеем дело с линейно-поляризованной волной, которой соответствуют отличные от нуля значения $E_x$ и $B_y$ [уравнения (85)]. Мы начнем с рассмотрения гармонической бегущей волны, распространяющейся в направлении $+z$, и затем перенесем полученный результат на волны, распространяющиеся в противоположном направлении $-z$. Суперпозиция этих волн с произвольными амплитудами и фазовыми константами даст наиболее общее решение (для данной частоты) и как частный случай будет включать стоячие волны.

*Бегущая гармоническая волна.* Пусть $E_x$ определяется уравнением

$$E_x = A\cos(\omega t - kz). \tag{87}$$

Используя уравнения (85) и соотношение $\omega = ck$, имеем

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\omega}{c}A\sin(\omega t - kz) = \frac{\partial E_x}{\partial z}, \tag{88}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -c\frac{\partial E_x}{\partial z} = -ckA\sin(\omega t - kz) = \frac{\partial E_x}{\partial t}. \tag{89}$$

В соответствии с уравнениями (88) и (89) величина $B_y$ зависит от $z$ и $t$, так же, как и величина $E_x$. Таким образом, в бегущей

гармонической плоской волне, распространяющейся в направлении $+z$, компоненты поля $B_y$ и $E_x$ равны с точностью до констант, которые мы положили равными нулю.

Для гармонической бегущей волны, распространяющейся в направлении $-z$, $B_y$ равно $-E_x$, что легко можно получить, заменив $k$ на $-k$ в приведенных выше уравнениях. Напишем уравнения, справедливые для обоих направлений распространения бегущей волны:

$$\text{Бегущая волна:} \quad \begin{cases} |\mathbf{E}(z, t)| = |\mathbf{B}(z, t)|, \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{v}}. \end{cases} \tag{90}$$

*Стоячая гармоническая волна.* Предположим, что составляющая $E_x$ равна

$$E_x(z, t) = A \cos \omega t \cos kz. \tag{91}$$

Покажите (задача 7.36), что в этом случае

$$B_y(z, t) = A \sin \omega t \sin kz = E_x\left(z - \frac{1}{4}\lambda,\ t - \frac{1}{4}T\right). \tag{92}$$

Из уравнений (91) и (92) следует, что в электромагнитной стоячей плоской волне в вакууме **E** и **B** перпендикулярны друг другу и $\hat{\mathbf{z}}$, имеют одинаковую амплитуду и сдвинуты на 90° по фазе как в пространстве, так и во времени. (Аналогично ведут себя давление и скорость в стоячей звуковой волне или поперечное натяжение и скорость для стоячей волны в струне.)

*Поток энергии в плоской волне.* Плотность энергии электромагнитного поля в вакууме равна

$$\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \tag{93}$$

(Это выражение дано в томе II, стр. 116 и 258, для статических полей, но можно показать, что оно справедливо в общем случае.) Нас интересует энергия любой линейной суперпозиции бегущих и стоячих плоских волн. В частности, нас интересует поток энергии. Найдем выражение для энергии в бесконечно малом элементе объема с площадью $A$, перпендикулярной оси $z$, и бесконечно малой толщиной $\Delta z$ вдоль этой оси. (Затем мы найдем, как меняется эта энергия со временем.) Энергия $W(z, t)$ в элементе объема равна плотности энергии, умноженной на объем $A\,\Delta z$:

$$W(z, t) = \frac{A\,\Delta z}{8\pi}(E_x^2 + B_y^2). \tag{94}$$

Дифференцируя $W(z, t)$ по времени, получим

$$\frac{\partial W(z, t)}{\partial t} = \frac{A\,\Delta z}{4\pi}\left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial t}\right). \tag{95}$$



Чтобы исключить $\partial E_x/\partial t$ и $\partial B_y/\partial t$, используем уравнения Максвелла (85):

$$\frac{\partial W(z, t)}{\partial t} = -\frac{Ac\,\Delta z}{4\pi}\left(E_x \frac{\partial B_y}{\partial z} + B_y \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = -\frac{Ac\,\Delta z}{4\pi}\frac{\partial (E_x B_y)}{\partial z} = -\frac{Ac\,\Delta z}{4\pi}\left[\frac{(E_x B_y)_{z+\Delta z} - (E_x B_y)_z}{\Delta z}\right]. \tag{96}$$

Последнее преобразование в уравнении (96) эквивалентно вычислению частной производной произведения $E_x B_y$ по $z$ (для фиксированного времени), и мы находим, что скорость изменения энергии в объеме $A\,\Delta z$ равна

$$\frac{1}{A}\frac{\partial W(z, t)}{\partial t} = \frac{c}{4\pi}E_x(z, t)\,B_y(z, t) - \frac{c}{4\pi}E_x(z + \Delta z, t)\,B_y(z + \Delta z, t) = S_z(z, t) - S_z(z + \Delta z, t), \tag{97}$$

где

$$S_z(z, t) \equiv \frac{c}{4\pi}E_x(z, t)\,B_y(z, t) = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_z. \tag{98}$$

Таким образом, скорость изменения энергии в элементе объема $A\,\Delta z$ равна значению $AS_z(z, t)$, вычисленному в точке $z$, минус значение этой величины в точке $z + \Delta z$. Поэтому величина $S_z(z, t)$ должна соответствовать мгновенному значению потока энергии через единичную площадь в направлении $+z$. Увеличение энергии в элементе объема определяется разностью величин втекающего (слева) и вытекающего (справа) потоков; $z$-компонента $S_z(z, t)$ *вектора потока* **S** определяется как поток энергии в направлении $+z$ через единичную площадь (в *эрг·см*$^{-2}$*·сек*$^{-1}$) с координатами $z$, $t$. (В нашей задаче это единственное направление потока энергии, так как ось $z$ совпадает с направлением распространения волны.)

*Вектор Пойнтинга.* В общем случае вектор потока энергии имеет вид

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B}.} \tag{99}$$

Он не зависит от выбора координат. Вектор потока энергии называется *вектором Пойнтинга.*

*Плотность энергии и ее поток в бегущей волне.* Для линейно-поляризованной бегущей волны, распространяющейся в направлении $+z$, можно положить $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}E_x$ и $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}}B_y$, причем $B_y = E_x$ для всех $z$, $t$. Таким образом, мы имеем ($E$ измерено в ед. СГСЭ$_v$/*см*)

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz), \quad B_y = E_0 \cos(\omega t - kz), \tag{100}$$

$$\text{Плотность энергии} = \frac{1}{8\pi}(E_x^2 + B_y^2) = \frac{1}{4\pi}E_0^2 \cos^2(\omega t - kz), \tag{101}$$

$$\text{Поток энергии} = S_z = \frac{c}{4\pi}E_x B_y = \frac{c}{4\pi}E_0^2 \cos^2(\omega t - kz). \tag{102}$$

Заметим, что поток энергии $S_z$ (в *эрг·см$^{-2}$·сек$^{-1}$*) для бегущей волны равен плотности энергии (в *эрг/см$^3$*), умноженной на скорость света (в *см/сек*).

Средний во времени поток энергии (при фиксированном $z$) равен среднему в пространстве потоку энергии (при фиксированном $t$). Обе эти величины не зависят ни от $z$, ни от $t$ и получаются из уравнения (102) заменой $\cos^2(\omega t - kz)$ средним значением $^1/_2$.

*Плотность энергии и ее поток в стоячей волне.* Для стоячей волны имеем

$$E_x = E_0 \cos \omega t \cos kz, \quad B_y = E_0 \sin \omega t \sin kz. \tag{103}$$

Максимумы для плотности электрической энергии и плотности магнитной энергии сдвинуты во времени на $^1/_4$ периода и в пространстве на $^1/_4$ длины волны. Покажите сами (задача 7.36), что в любой области длиной $^1/_4\lambda$ полная энергия постоянна. Энергия электрического поля совершает гармонические колебания относительно среднего значения с частотой $2\omega$, достигая предельных значений — нуля и двойного среднего значения. То же происходит с энергией магнитного поля. Таким образом, энергия колеблется от чисто электрической, имеющей максимум плотности в одном месте, до чисто магнитной с максимумом плотности энергии, смещенным на $^1/_4\lambda$. Это напоминает поведение гармонического осциллятора (колебательного контура). Полная энергия осциллятора постоянна, но колеблется, переходя из чисто потенциальной энергии в одном положении массы в чисто кинетическую энергию в другом положении массы. Как потенциальная, так и кинетическая энергии гармонически колеблются относительно их среднего значения с частотой $2\omega$. Двойка появляется потому, что потенциальная энергия дважды (за период) положительна и дважды достигает максимального значения (то же справедливо и для кинетической энергии). Электрическое поле $E_x$ в стоячей волне аналогично смещению массы гармонического осциллятора от положения равновесия, в то время как магнитное поле $B_y$ аналогично скорости этой массы.

*Поток импульса в бегущей волне; давление электромагнитного излучения.* Когда электромагнитное излучение поглощается без отражения веществом, последнему передается энергия $W$, а также импульс (вдоль направления распространения). Мы покажем, что величина передаваемого импульса равна $W/c$. Если пучок отражается на 180° от зеркала (без какого-либо поглощения), то зеркалу передается удвоенное значение импульса, равное $2W/c$. Таким образом, излучение оказывает давление на предметы, которые поглощают или отражают его. Это давление называется *давлением излучения*. Бегущей электромагнитной плоской волне с энергией $W$ соответствует импульс $\mathbf{P}$, равный

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{W}{c}\hat{\mathbf{z}},} \tag{104}$$

где $\hat{\mathbf{z}}$ совпадает с направлением распространения.



Уравнение (104) легко получить, если принять, что свет в бегущей волне состоит из частиц, называемых фотонами. Фотоны подобны частицам, но их масса покоя равна нулю. Релятивистская частица с массой покоя $M$ и импульсом $P$ имеет энергию $W$, равную

$$W = [(cP)^2 + (Mc^2)^2]^{1/2}. \tag{105}$$

Положив массу $M$ равной нулю, получим уравнение (104).

Этот краткий вывод может ввести в заблуждение. Известно, что электромагнитное излучение квантовано в том смысле, что оно переносит энергию порциями, величина которых равна $\hbar\omega$. Однако это еще ничего не говорит о давлении излучения, т. е. об уравнении (104). Поэтому мы приведем чисто классический вывод уравнения (104), не связанный с корпускулярным представлением о свете. (В томе IV вы познакомитесь с квантовыми идеями о свете.)

Рассмотрим частицу с зарядом $q$, на которую действует бегущая плоская волна. Будем считать, что заряд $q$ положителен, и предположим, что частица приходит в движение в момент $t = 0$. Сила $\mathbf{F}$, действующая на частицу, — это сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}. \tag{106}$$

Сначала (например, в течение первых нескольких колебаний) величина скорости $\mathbf{v}$ мала. Поэтому движение заряда в основном определяется вектором $\mathbf{E}$. Таким образом, $\mathbf{v}$ направлено по $\mathbf{E}$ и изменяет направление вместе с изменением направления $\mathbf{E}$. Но всякий раз при изменении направления $\mathbf{E}$ меняет направление $\mathbf{B}$. Поэтому вектор $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ всегда имеет один и тот же знак. Сила, действующая на заряд $q$ благодаря $\mathbf{B}$, всегда совпадает с направлением распространения, определяемым вектором $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Таким образом, заряд совершает движение, являющееся суперпозицией поперечных колебаний с частотой поля, плюс движение с медленно возрастающей скоростью вдоль направления распространения поля. Покажем теперь, что средняя по времени скорость, с которой заряд приобретает импульс вдоль $z$, равна произведению $1/c$ на среднюю по времени скорость, с которой заряд поглощает энергию из бегущей волны. (Заряд не «удерживает» поглощенную им энергию. Если заряд связан с веществом, то он постоянно преобразует полученную энергию в тепло благодаря наличию сил сопротивления, действующих на заряд при его движении. Если заряд находится в свободном пространстве, то энергия, поглощенная им, испускается во всех направлениях. Величина энергии, излученной в направлении падения бегущей волны, пренебрежимо мала, так что обратно в бегущую волну возвращается ничтожная часть поглощенной энергии.)

Теперь рассмотрим вывод. Имеем обычную бегущую волну $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}E_x$, $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}}B_y$ и $B_y = E_x$. Скорость $\mathbf{v}$ заряженной частицы равна $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}}\dot{x} + \hat{\mathbf{y}}\dot{y} + \hat{\mathbf{z}}\dot{z}$. Подставляя эти значения поля и скорости в уравнение (106) и имея в виду, что $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = 0$ и $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}}$,

мы получаем

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}} q E_x + \frac{q}{c} \dot{x} B_y \hat{\mathbf{z}} - \frac{q}{c} \dot{z} B_y \hat{\mathbf{x}}. \tag{107}$$

Далее, усредним уравнение (107) за один цикл. Первый член $\hat{\mathbf{x}} q E_x$ при таком усреднении даст нуль. То же справедливо и для последнего члена $\dot{z} B_y$, поскольку мы предполагаем, что приращение скорости вдоль $z$ в течение одного цикла пренебрежимо мало, т. е. считаем скорость $z$ постоянной в течение одного цикла, а среднее по времени за один цикл от поля $B_y$ дает нуль. Среднее от оставшегося члена $\frac{q}{c} \dot{x} B_y \hat{\mathbf{z}}$ не будет равно нулю, так как поперечная скорость $\dot{x}$ колеблется с такой же частотой, что и $B_y$. Вспоминая, что сила равна скорости изменения импульса, мы получаем для усредненных по времени значений (обозначаемых скобками $\langle\ \rangle$)

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right\rangle = \hat{\mathbf{z}} \frac{q}{c} \langle \dot{x} B_y \rangle. \tag{108}$$

Теперь рассмотрим работу, которую бегущая волна совершает над зарядом $q$. Мгновенное значение этой работы, совершаемой за единицу времени, равно

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot \left( q\mathbf{E} + q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + 0 = q\dot{x} E_x.$$

Беря среднее за один цикл, имеем

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = q \langle \dot{x} E_x \rangle. \tag{109}$$

Сравнивая уравнения (108) и (109) и имея в виду, что $B_y = E_x$ (для бегущей волны), получаем

$$\left\langle \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right\rangle = \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{c} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle. \tag{110}$$

Итак, за интервал времени, в течение которого электрону передается от бегущей волны энергия $W$, он также приобретает импульс, равный $\hat{\mathbf{z}}(W/c)$. Нельзя передать энергию $W$ и не передать при этом импульс $\hat{\mathbf{z}}(W/c)$. Это равносильно утверждению, что излучение обладает импульсом, определяемым из уравнения (104). В задачах 7.13, 7.14 и 7.15 рассматривается давление излучения от Солнца.

*Момент импульса в бегущей плоской волне.* Покажем, что бегущая плоская волна может передавать заряду $q$ не только энергию или импульс, но и момент импульса. Для этого нужно показать, что заряд участвует в круговом движении. Очевидно, это невозможно в случае линейно-поляризованного поля. Круговое движение заряда может происходить в поле с «круговой поляризацией». Рассмотрим бегущую волну, распространяющуюся в направлении $+\hat{\mathbf{z}}$. Пусть вектор электрического поля $\mathbf{E}$ имеет постоянную величину и вращается (при фиксированном $z$) с угловой скоростью $\omega$ вокруг оси $z$, образуя с ней правый винт. Таким образом, $E_x$ и $E_y$ — гармонические функции времени (при фиксированном $z$) и $E_x$ опережает $E_y$ по фазе на 90°. Магнитное поле $\mathbf{B}$ (как всегда в бегущей волне) $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}$. Так как электрическое поле ускоряет электрон в своем направлении (а магнитное искривляет его траекторию), мы можем предположить, что в установившемся состоянии заряд $q$ совершает движение по окружности с угловой скоростью $\omega$. (Заряд также медленно движется в направлении $+z$ благодаря воздействию на него давления излучения. Однако этим движением мы можем пренебречь.) На рис. 7.7 показана конфигурация полей, положение заряда $\mathbf{r}$ и скорость заряда $\mathbf{v}$. Заметим, что $\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}$ имеет ту же величину, что и $\mathbf{v}$. Взаимное расположение векторов $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}$ указано на рис. 7.7.

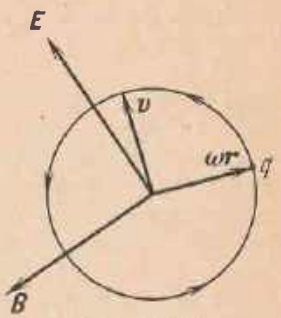


Рис. 7.7. Свет, поляризованный по кругу, вызывает движение заряда $q$ по круговой траектории.
Ось z выходит из плоскости рисунка.

Момент вращения $\boldsymbol{\tau}$, действующий на заряд $q$, равен $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Умножая на $\omega$, получим

$$\omega\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{r} \times q\mathbf{E} + \boldsymbol{\omega}\mathbf{r} \times \frac{q}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{111}$$

Найдем среднее за один цикл. Из рис. 7.7 мы видим, что вектор $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ направлен вдоль $\mathbf{z}$, поэтому вектор $\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ направлен вдоль $-\mathbf{v}$. Так как среднее за один цикл от каждой компоненты $\mathbf{v}$ дает нуль, то магнитное поле не внесет никакого вклада в среднюю во времени величину момента вращения. Из рис. 7.7 мы также видим, что $\boldsymbol{\omega}\mathbf{r} \times \mathbf{E}$ направлен вдоль $\hat{\mathbf{z}}$ и имеет ту же величину, что и $\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$. Поэтому можем записать

$$\boldsymbol{\omega}\mathbf{r} \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \tag{112}$$

Таким образом, среднее значение (за один цикл) момента вращения, действующего на заряд $q$, равно

$$\langle \boldsymbol{\tau} \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{J}}{dt} \right\rangle = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{\omega} \langle q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{\omega} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle. \tag{113}$$

Мы учли тот факт, что момент вращения представляет собой скорость изменения момента импульса $\mathbf{J}$ и что $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ представляет собой скорость, с которой совершается работа над зарядом $q$. В соответствии с уравнением (113) заряд $q$, поглощающий энергию $W$ от поляризованной по кругу бегущей волны, в которой вращение поля происходит вокруг оси $+\hat{\mathbf{z}}$, поглощает также и момент импульса $\mathbf{J}$, равный

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{z}} \frac{W}{\omega}.$$

Введя единичный вектор $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ для направления вращения, мы можем представить наш результат в виде

$$\boxed{\mathbf{J} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \frac{W}{\omega},} \tag{114}$$

т. е. поляризованная по кругу плоская бегущая волна переносит момент импульса, определяемый уравнением (114), где $\tilde{\omega}$ либо совпадает, либо противоположно направлению распространения.

В главе 8 будет показано, что линейно-поляризованная бегущая плоская волна с амплитудой $A$ может быть представлена суперпозицией двух поляризованных по кругу бегущих плоских волн, каждая с амплитудой $A/2$, но с противоположным направлением вращения. Поэтому в сумме для такой суперпозиции момент импульса отсутствует.

Как вы узнаете в томе IV, электромагнитные плоские бегущие волны переносят энергию порциями, или квантами, равными $\Delta W = \hbar\omega$. В соответствии с уравнением (114) такая волна при поглощении должна передавать квантованное значение момента импульса $\Delta J = \hbar$. Важно понимать, что уравнение (114) справедливо только для плоских бегущих волн. Поэтому оно справедливо на достаточно больших расстояниях от излучающего точечного источника.

Оказывается, что если поляризованный по кругу и образующий правый винт с направлением распространения свет проходит через прозрачную «полуволновую задерживающую пластинку» (пластинку, обеспечивающую задержку в полдлины волны), то направление винта изменится на обратное, т. е. изменится направление вращения поля. При этом пластинке будет передан момент импульса *в два раза* больше того, который следует из (114). Подробно этот вопрос рассмотрен в задаче 8.19.

*Электромагнитные волны в однородной среде.* Мы использовали уравнения Максвелла для изучения электромагнитных плоских волн в вакууме. В Д. 9 мы рассмотрим электромагнитные волны в однородной среде, которая не является вакуумом. Мы получим, что в такой среде

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu, \tag{115}$$

где $\varepsilon$ — диэлектрическая постоянная и $\mu$ — магнитная проницаемость. Этот результат аналогичен тому, который мы получили в п. 4.3 для электромагнитных волн в передающей линии из параллельных пластин [уравнение (4.66)].

## 7.5. Излучение точечного заряда

В этом пункте мы будем рассматривать электрические и магнитные поля в *сферической бегущей волне*, образованной колеблющимся точечным зарядом. Полученные результаты помогут нам понять свойства электромагнитного излучения, испускаемого атомами, радиостанциями, звездами, и ответить на вопрос о причине голубого цвета неба.

*Уравнения Максвелла в присутствии источников.* В этом случае мы должны воспользоваться уравнениями Максвелла с членами,



соответствующими наличию источников:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{116}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{117}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \tag{118}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \tag{119}$$

Выше мы работали с этими четырьмя уравнениями в случае вакуума (когда плотности заряда $\rho$ и тока $\mathbf{J}$ равнялись нулю). Мы нашли (в п. 7.4), что в этих условиях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ подчиняются классическому волновому уравнению для недиспергирующих волн, распространяющихся со скоростью $c$. Далее, мы нашли соотношение между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ для больших расстояний от источника, полагая, что при достаточном удалении волны можно считать плоскими. Чтобы найти, как излучение зависит от движения источника, нужно рассмотреть уравнения Максвелла с членами, определяющими наличие источника. В уравнениях Максвелла имеются два источника. Один из них — это плотность заряда $\rho$ и второй — плотность тока $\mathbf{J}$. Эти источники зависят друг от друга, и связь между ними выражается законом сохранения заряда:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0. \tag{120}$$

Уравнение (120) легко проверить, если воспользоваться уравнениями (116) и (119) и тем фактом, что $\nabla\cdot\nabla\times = 0$ [см. том II, уравнение (4.9)]. Рассматривая движение точечного заряда $q$, мы автоматически пользуемся фактом сохранения заряда и поэтому можем не иметь дела с током $\mathbf{J}$ в явной форме, а сконцентрировать наше внимание на уравнении (116) с источником в виде заряда.

*Закон Гаусса и сохранение потока* $\mathbf{E}$. Уравнение (116) эквивалентно закону Гаусса (см. том II, пп. 1.10 и 2.10). Для заряда, находящегося в покое, закон Гаусса или (116) дают обычное поле, обратно пропорциональное квадрату расстояния (том II, п. 1.11):

$$\mathbf{E} = q\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \tag{121}$$

Здесь $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ — вектор, соединяющий точку наблюдения с зарядом. Для движущегося заряда мы можем использовать понятие силовых линий и *закон сохранения потока* $\mathbf{E}$ (что эквивалентно закону сохранения заряда). (См. том II, пп. 5.3 и 5.4.)

*Движение заряда.* Используем закон Гаусса, чтобы найти поле, излучаемое положительным точечным зарядом $q$, совершающим следующее движение: заряд находится в покое в начале инерционной системы координат в интервале времени от $t = -\infty$ до $t = 0$; в момент $t = 0$ он начинает двигаться в направлении $+\mathbf{x}$ с постоянным ускорением $a$, и по истечении короткого интервала времени $\Delta t$ ускорение прекращается и заряд движется с постоянной скоростью

$v = a\,\Delta t$. До момента $t = 0$ электрическое поле в инерциальной системе определяется уравнением (121); магнитное поле всюду равно нулю; силовые линии **E** направлены по радиусам от той точки, где находится заряд. Неожиданное ускорение в момент $t = 0$ создает перегибы или изломы («kinks») в силовых линиях поля **E** и приводит к появлению магнитного поля **B**. Эти поля распространяются от источника со скоростью $c$. (В этих утверждениях уже использованы уравнения Максвелла!) Мы хотим найти поля на большом расстоянии от источника; поэтому достаточно найти только **E**. (Используя наши результаты для плоских волн, мы сможем, зная **E**, найти **B**.)

Рассмотрим время $t$, которое значительно больше, чем $\Delta t$. В точки пространства, расстояние $r$ которых до начального положения заряда больше, чем $ct$, «новость» (информация) о том, что заряд получил ускорение, еще не прибыла. Точки, для которых $r$ меньше $c(t - \Delta t)$, получат информацию о перемене состояния заряда, т. е. до них дойдут «перегибы» в силовых линиях, вызванные неожиданным ускорением заряда. Электрическое поле в этих точках будет определяться электрическим полем заряда, движущегося с постоянной скоростью $v$. Это поле направлено от мгновенного положения заряда $q$. Электрическое поле в фиксированной точке наблюдения, находящейся на расстоянии $r'$ от мгновенного положения заряда, движущегося со скоростью $v$, выведено в томе II, п. 5.6. В точке наблюдения это поле направлено вдоль линии, соединяющей точку мгновенного положения заряда с точкой наблюдения, и его величина равна

$$E = \frac{q}{r'^2}\,\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}, \tag{122}$$

где $\beta = v/c$ и $\theta$ — угол между направлением скорости **v** и направлением на точку наблюдения из точки мгновенного положения заряда. Нас будет интересовать случай, когда $v$ мало по сравнению с $c$. (Этому соответствует, например, испускание видимого света атомами; в этих случаях $v/c$ порядка 1/137.) Тогда с достаточной степенью точности мы можем положить в уравнении (122) $\beta = 0$ *).

Таким образом, для заряда, движущегося с постоянной скоростью $v \ll c$, электрическое поле в удаленной точке наблюдения равно

$$\mathbf{E}' = q\,\frac{\hat{\mathbf{r}}'}{r'^2}, \tag{123}$$

где $\mathbf{r}' = r'\,\hat{\mathbf{r}}'$ — радиус-вектор, проведенный от мгновенного положения заряда до точки наблюдения. Это очень простой результат.

Нас интересует электрическое поле в перегибах, распространяющееся со скоростью света. Чтобы найти это поле, используем закон Гаусса для данного момента времени, соединив поле перед перегибом [это поле определится по уравнению (121)] с полем после перегиба

*) Общий случай произвольного $v$ ($v \leqslant c$) рассмотрен в статье: J. R. Tessman, J. T. Finnell, Jr., Am. J. Phys. **35**, 523 (1967).



[оно определится по уравнению (123)] таким образом, чтобы поток **E** (поверхностный интеграл от **E**) сохранялся. (См. том II, п. 5.7.)

Рассмотрим время $t$, много большее, чем время $\Delta t$ ускорения. Можно пренебречь расстоянием $\frac{1}{2}a(\Delta t)^2$, которое заряд проходит за время ускорения $\Delta t$, по сравнению с много большим расстоянием $vt$, которое он проходит с постоянной скоростью. Мы рассматриваем точку наблюдения, для которой вектор **r**, проведенный из первоначального положения заряда, составляет угол $\theta$ с направлением скорости **v**. Время $t$ выбрано так, что перегиб начинает проходить через точку наблюдения в момент $t$. Таким образом, $r = ct$. Теперь рассмотрим вектор $\mathbf{r}'$, определяющий «хвост» или задний фронт перегиба. Так как $v \ll c$, то расстояние $vt$, которое прошел заряд, очень мало по сравнению с $r = ct$. Поэтому можно считать, что направление $\mathbf{r}'$ почти параллельно направлению **r**. Тогда расстояние $r'$ равно

$$r' = r - vt\cos\theta = r\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right) \approx r,$$

так как $v/c \ll 1$. (124)

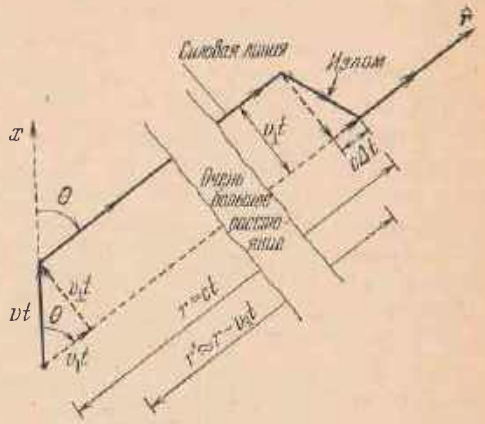



Рис. 7.8. Излучение ускоренного точечного заряда. Излом силовых линий поля **E** распространяется со скоростью $c$. Рисунок сделан для случая $t \gg \Delta t$ и $v(=a\,\Delta t) \ll c$. Составляющие скорости **v**, параллельные и перпендикулярные направлению $\hat{\mathbf{r}}$ от $q$ до точки наблюдения, обозначены $v_\perp$ и $v_\parallel$ соответственно.

Рассматриваемая геометрия показана на рис. 7.8.

Обозначим через $E_\perp$ и $E_\parallel$ компоненты электрического поля **E** в пространстве, занятом перегибом, соответственно перпендикулярную и параллельную направлению распространения $\hat{\mathbf{r}}$. Сохранение потока **E** подразумевает непрерывность силовых линий. Поэтому отношение компоненты $E_\perp$ к компоненте $E_\parallel$ получается из простого рассмотрения рис. 7.8. Прямоугольный треугольник с гипотенузой, соответствующей полю в перегибе, катеты которого равны $E_\perp$ к $E_\parallel$, подобен прямоугольному треугольнику с катетами длиной $v_\perp t$ и $c\,\Delta t$. Таким образом, из рис. 7.8 имеем

$$\frac{E_\perp}{E_\parallel} = \frac{v_\perp t}{c\,\Delta t} \tag{125}$$

или, так как $v_\perp$ равно $a_\perp\,\Delta t$ и $t = r/c$,

$$\frac{E_\perp}{E_\parallel} = \frac{(a_\perp\,\Delta t)\,(r/c)}{c\,\Delta t} = a_\perp\,\frac{r}{c^2}, \tag{126}$$

где $a_\perp$ — величина поперечной компоненты ускорения $a$.

Нам нужно определить $E_\parallel$ — параллельную компоненту **E** в перегибе. Мы найдем ее, применяя закон Гаусса к малому объему, подобному «коробочке» на рис. 7.9. Внутри объема зарядов нет, поэтому входящий в него электрический поток должен равняться выходящему потоку. Мы выбрали объем таким образом, что входящий поток равен $E_\parallel$, умноженному на площадь входной поверхности «коробочки», а выходящий поток равен (радиальному) полю сразу за перегибом, умноженному на равную площадь. Из рис. 7.9 можно заключить, что $E_\parallel$ и $E_r$ равны. Однако $E_r$ определяется уравнением (121). Таким образом, имеем

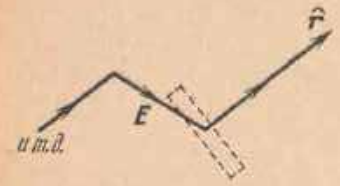



Рис. 7.9. Электрическое поле **E** в месте излома силовых линий. Штриховой линией показана воображаемая поверхность, используемая для применения закона Гаусса.

$$E_\parallel = E_r = \frac{q}{r^2}. \qquad (127)$$

Если бы «коробочка» была расположена сзади перегиба, то мы получили бы, что $E_\parallel$ должно равняться $E'_r$, определяемому из уравнения (123). Но $E'_r$ равно $E_r$, так как $r'$ и $r$ практически равны в соответствии с уравнением (124). Таким образом, получим уравнение (127). Уравнение (125) также может быть получено из рассмотрения «коробочки». Наш упрощенный метод, который заключается в рассмотрении направления **E** в перегибе, эквивалентен, как легко показать (задача 7.16), рассмотрению такого элементарного объема.

*Поле излучения.* Из уравнений (126) и (127) можно найти величину поперечного поля в перегибе:

$$E_\perp = \left(a_\perp \frac{r}{c^2}\right) E_\parallel = a_\perp \frac{r}{c^2}\frac{q}{r^2} = \frac{qa_\perp}{rc^2}. \qquad (128)$$

Учтем в этом выражении для поля его направление. Вектор $\mathbf{E}_\perp$ (см. рис. 7.8) в точке **r** в момент $t$ направлен вдоль отрицательного направления $\mathbf{a}_\perp$ в момент $t'$, где $t' = t - (r/c)$. Будем называть $\mathbf{E}_\perp$ *полем излучения* $\mathbf{E}_{изл}$:

$$\boxed{\mathbf{E}_{изл}(\mathbf{r}, t) = -\frac{q\mathbf{a}_\perp(t')}{rc^2}, \quad t' = t - \frac{r}{c}.} \qquad (129)$$

Заметим, что поскольку радиальная компонента **E** в перегибе такая же, как и радиальное поле перед перегибом и после перегиба, то она не несет никакой информации; это поле не излучается и не является частью бегущей волны. Если у нас есть детектор, который реагирует только на радиальную составляющую, то по ней он не определит наличие перегиба (т. е. он не обнаружит движения заряда). Вот почему в поле излучения мы включили только поперечную составляющую. Такого результата можно было ожидать по аналогии с результатом, полученным в п. 7.4 для продольных компонент **E** и **B** в плоской волне. Как вы помните, эти компоненты оказались постоянными в пространстве и времени и поэтому не включались в волну. (В настоящем примере излучения точечного заряда можно ожидать, что поля в ограниченной области на расстоянии **r** от заряда будут подобны полям в плоской волне, поперечным к $\hat{\mathbf{r}}$.) Мы возьмем на себя смелость предположить, что к нашему случаю можно отнести и другие результаты, полученные для бегущих плоских волн, а именно то, что **B** и **E** взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения $\hat{\mathbf{r}}$ и что величины **B** и **E** равны в пространстве и во времени.

*Обобщение для произвольного (нерелятивистского) движения точечного заряда.* Предположим, что мы имеем точечный заряд $q$, который совершает некоторое сложное трехмерное движение. Мы будем называть это движение произвольным, однако оно должно удовлетворять условию $v \ll c$. Далее, мы предполагаем для простоты, что заряд $q$ совершает перемещение в некоторой окрестности своего начального положения. Так, например, зарядом $q$ может быть один из электронов в удаленной радиоантенне или в удаленном атоме. Мы считаем, что между понятиями «окрестность» и «удаленный» существуют следующие соотношения. Вектор смещения **r** от мгновенного положения заряда $q$ до фиксированной точки наблюдения должен быть практически постоянен по величине и направлению для всех возможных положений заряда в «окрестности». Таким образом, «удаленный» атом может находиться на расстоянии $10^{-8}$ *см* от точки наблюдения, так как «окрестность», занимаемая атомом, имеет радиус порядка $10^{-8}$ *см*. Для десятиметровой антенны «удаленная» точка наблюдения в смысле, определенном выше, находится, например, на расстоянии 10 000 *м*.

Что представляет собой поле излучения в удаленной точке, вызванное «произвольно» движущимся зарядом? Уравнение (129) было выведено для специального случая простого движения, состоящего из ускорения в течение короткого интервала времени $\Delta t$ и последующего движения с постоянной скоростью. Мы нашли, что результирующее поле излучения в точке наблюдения в момент времени $t$ полностью определяется поперечной составляющей ускорения $\mathbf{a}_\perp(t')$ в более ранний момент времени $t' = t - (r/c)$. В случае произвольного движения, при котором $\mathbf{a}(t')$ все время и непрерывно меняет свою величину, мы можем считать ускорение $\mathbf{a}(t')$ постоянным по величине и направлению в течение достаточно малого интервала времени $\Delta t'$. Поэтому можно считать, что ускорение $\mathbf{a}(t')$, действующее в течение интервала времени $\Delta t'$, создает в точке наблюдения поле, которое определяется выражением (129) и которое проходит через точку наблюдения за интервал $\Delta t$. Теперь мы столкнулись с некоторыми трудностями. Ранний момент времени $t'$, в который

возникает ускорение, определяющее поле, равен

$$t' = t - \frac{r'}{c}. \qquad (130)$$

Излучение, испущенное зарядом $q$ в течение интервала $\Delta t'$, проходит точку наблюдения за интервал $\Delta t$, равный

$$\Delta t = \Delta\left(t' + \frac{r'}{c}\right) = \Delta t' + \frac{\Delta r'}{c}, \qquad (131)$$

где $\Delta r'$ — изменение расстояния между положением заряда и точкой наблюдений за время $\Delta t'$. Очевидно, что в общем случае $\Delta t$ не равно $\Delta t'$. Поэтому в данный момент времени $t$ в точке наблюдения будет «наложение» вкладов в поле излучения, испущенных в различные «ранние» моменты $t'$.

*Как избежать «наложения».* Мы не будем рассматривать общий случай. Заметим, что $\Delta r'$ равно продольной компоненте скорости, умноженной на $\Delta t'$. Поэтому для $v \ll c$ с хорошей степенью точности мы можем пренебречь $\Delta r'$ в уравнении (131):

$$\Delta t = \Delta t' + \frac{\Delta r'}{c} = \Delta t' + \frac{v_{\parallel}\,\Delta t'}{c} \approx \Delta t' \quad \text{для} \quad \frac{v_{\parallel}}{c} \ll 1. \qquad (132)$$

Таким образом, для $v \ll c$ будет пренебрежимо малое наложение интервалов $\Delta t$ и $\Delta t'$. В этом случае существует однозначная связь между обнаруженным излучением в момент $t$ и поперечным ускорением заряда *в более ранний момент времени* $t'$; для всех $t$ излучаемое поле $\mathbf{E}_{\text{изл}}(\mathbf{r}, t)$ будет определяться уравнением (129).

*Если известно* $\mathbf{E}$, *то известно и* $\mathbf{B}$. Теперь будем считать, что уравнение (129) справедливо для удаленной точки наблюдения, когда $\mathbf{r}$ практически постоянно. Также предположим, что $\mathbf{B}_{\text{изл}}$ определяется из соотношения, справедливого для плоской волны. Таким образом, имеем (опуская индекс «изл»)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \qquad (133)$$

*Энергия, излучаемая точечным зарядом.* Для удаленной точки наблюдения вектор потока энергии $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ равен

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]^2\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{c}{4\pi}\left[\frac{-q\mathbf{a}_{\perp}(t')}{rc^2}\right]^2 \hat{\mathbf{r}} = \frac{q^2}{c^3}\,[\mathbf{a}_{\perp}(t')]^2\,\frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}, \qquad (134)$$

где $S$ измеряется в единицах *эрг·см*$^{-2}$*·сек*$^{-1}$. Поток энергии в *эрг* $\times$ $\times$*см*$^{-2}$, проходящий через бесконечно малую площадку $dA$, расположенную в точке наблюдения (и ориентированную перпендикулярно $\mathbf{r}$), равен произведению вектора потока $\mathbf{S}$ на площадь $dA$. Обозначим этот поток энергии через $dP$ ($P$ — это мощность в *эрг·сек*$^{-1}$, а $dP$ указывает на то, что мы рассматриваем бесконечно малую мощность, проходящую через $dA$):

$$dP(\mathbf{r}, t) = |\mathbf{S}(r, t)|\,dA = \frac{q^2}{c^3}\,\mathbf{a}_{\perp}^2(t')\,\frac{dA}{4\pi r^2}. \qquad (135)$$



Обозначим через $\theta(t')$ угол между мгновенным значением ускорения $\mathbf{a}(t')$ в «ранний» момент времени $t'$ и постоянным направлением $\mathbf{r}$ из окрестности заряда $q$ на точку наблюдения. Тогда, в соответствии с рис. 7.8, имеем

$$\mathbf{a}_{\perp}^2(t') = \mathbf{a}^2(t')\sin^2\theta(t'). \qquad (136)$$

Теперь выражение (135) можно переписать так:

$$dP(\mathbf{r}, t) = \frac{q^2}{c^3}\,\mathbf{a}^2(t')\sin^2\theta(t')\,\frac{dA}{4\pi r^2}. \qquad (137)$$

*Полная мгновенная мощность, излучаемая во всех направлениях.* Будем считать $t'$ и $r$ фиксированными и проинтегрируем $dP$ по всем направлениям $\hat{\mathbf{r}}$ (т. е. по поверхности сферы радиуса $r$). Если бы в выражение для $dP$ не входил член $\sin^2\theta(t')$, мы могли бы совершить интегрирование простой заменой бесконечно малой площади $dA$ полной площадью $4\pi r^2$. Однако в выражение для $dP$ входит $\sin^2\theta(t')$ и мы должны при интегрировании учесть изменение $\sin^2\theta(t')$ на сфере. Таким образом, имеем

$$P(t) = \frac{q^2}{c^3}\,\mathbf{a}^2(t')\,\overline{\sin^2\theta(t')}, \qquad (138)$$

где

$$t' = t - \frac{r}{c},$$

$$\overline{\sin^2\theta(t')} \equiv \int \sin^2\theta(t')\,\frac{dA}{4\pi r^2}. \qquad (139)$$

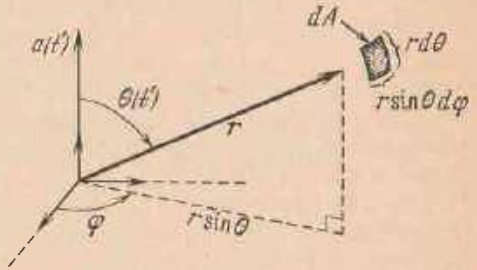



Рис. 7.10. Сферические полярные координаты. Бесконечно малая площадь $dA$ в конце радиуса-вектора $\hat{\mathbf{r}}$, ориентированная перпендикулярно $\hat{\mathbf{r}}$, равна $r^2 d\varphi \sin\theta\, d\theta$.

Для вычисления этого интеграла введем *сферические полярные координаты* (рис. 7.10). Бесконечно малая площадь $dA$ представляет собой площадь маленького прямоугольника со сторонами $r\,d\theta$ и $r\sin\theta\,d\varphi$. Таким образом, имеем

$$\frac{dA}{r^2} = \frac{(r\,d\theta)\,(r\sin\theta\,d\varphi)}{r^2} = d\theta\sin\theta\,d\varphi. \qquad (140)$$

Легко показать (см. задачу 7.39), что

$$\overline{\sin^2\theta(t')} = \frac{2}{3}. \qquad (141)$$

Приведем короткий вывод этого равенства. Вектор $\mathbf{r}$ имеет компоненту $z = r\cos\theta$ вдоль полярной оси. При усреднении $z^2$ по всем направлениям $\theta$ ($r$ неизменно) мы должны получить такой же результат, что и при усреднении $x^2$ и $y^2$. Но для каждой точки на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Поэтому

$$r^2 = \overline{r^2} = \overline{x^2 + y^2 + z^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2} = 3\overline{z^2} = 3r^2\,\overline{\cos^2\theta},$$

тогда

$$\overline{\cos^2\theta} = \frac{r^2}{3r^2} = \frac{1}{3}, \quad \overline{\sin^2\theta} = \overline{1 - \cos^2\theta} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \qquad (142)$$

*Знаменитая формула для излучаемой мощности.* Вычислив $\overline{\sin^2\theta(t')}$, подставим полученное значение в уравнение (138). Получим

$$\boxed{P(t) = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\,\mathbf{a}^2(t'), \quad t' = t - \frac{r}{c}.} \qquad (143)$$

В соответствии с уравнением (143) излучаемая мощность, проходящая через поверхность сферы радиуса $r_1$ в момент $t_1$, имеет то же значение, что и мощность, проходящая через поверхность сферы радиуса $r_2$ в момент $t_2$, который соответствует тому же «раннему» времени $t'$, что и в первом случае. Это означает, что справедлив закон сохранения энергии и что энергия переносится со скоростью света. Полученный результат является следствием того, что излучаемое поле обратно пропорционально первой степени $r$. Поэтому падающий на поверхность поток энергии $|\mathbf{S}|$ обратно пропорционален $r^2$. Однако энергия распределяется по поверхности сферы, пропорциональной $r^2$. Эти два множителя, $r^{-2}$ и $r^2$, сокращаются, и мы получаем, что полный поток энергии в единицу времени через поверхность сферы постоянен и не зависит от радиуса сферы при условии, что распространение вдоль радиуса происходит со скоростью света.

*Излучение и поле в «ближней зоне».* Оказывается, что точное решение для временной зависимости электрического и магнитного полей движущегося заряда наряду с полями «излучения», пропорциональными $r^{-1}$, содержит поля, изменяющиеся пропорционально $r^{-2}$ и $r^{-3}$. На достаточно малых расстояниях последние преобладают. Иногда их называют полями «ближней зоны». Если мы находимся в «ближней зоне» радиоантенны или атома, то пренебречь этими полями нельзя. На достаточно больших расстояниях $r$ они становятся пренебрежимо малыми по сравнению с полем, пропорциональным $r^{-1}$, т. е. на достаточно больших расстояниях они не дают вклада в поток энергии. Однако в «ближней зоне» их вклад в вектор потока энергии $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ существен. Вклад в $\mathbf{S}$, создаваемый полями «ближней зоны», дает поток энергии, который часть времени распространяется от источника, а часть времени — к источнику, т. е. примерно так же, как в стоячей волне. Таким образом, колеблющийся точечный заряд образует не чистую сферическую бегущую волну, а комбинацию как бегущих, так и стоячих волн, причем стоячие волны преобладают на малых расстояниях, а бегущие — на больших. На детектор, находящийся на большом расстоянии, будут действовать только бегущие волны, в то время как на близко



расположенный детектор действуют как стоячие, так и бегущие волны.

*Определение телесного угла.* Пусть $dA$ — бесконечно малая площадка, расположенная в точке наблюдения $\mathbf{r}$ и ориентированная перпендикулярно $\mathbf{r}$. *Дифференциал телесного угла* $d\Omega$, под которым площадка $dA$ видна из начала координат, равен

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2}. \qquad (144)$$

Телесный угол измеряется в безразмерных единицах, называемых *стерадианами* (*стер*). Рассмотрим сферу радиуса $r$ с центром в начале координат. Поверхность этой сферы состоит из очень большого числа очень малых площадок $dA$, каждая из которых ориентирована перпендикулярно радиусу-вектору, проведенному из начала координат. Поэтому каждому элементу поверхности сферы соответствует свой телесный угол. Полный телесный угол, стягиваемый сферой, определяется как сумма (интеграл) всех элементарных телесных углов, стягиваемых всеми элементами поверхности сферы, т. е.

$$\Omega = \int d\Omega = \int \frac{dA}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \ \textit{стер}. \qquad (145)$$

Приведем другой вывод равенства (145). В соответствии с (140) дифференциал телесного угла $d\Omega$ в сферических полярных координатах равен

$$d\Omega = d\varphi \sin\theta\, d\theta \qquad (146)$$

при положительных $d\varphi$ и $d\theta$ или

$$d\Omega = d\varphi\, d(\cos\theta) \qquad (147)$$

при положительных $d\varphi$ и $d(\cos\theta)$. Угол $\varphi$ изменяется от 0 до $2\pi$, а угол $\theta$ — от нуля до $\pi$. Соответственно пределы изменения $\cos\theta$ равны $-1$ и $+1$. Полный телесный угол, стягиваемый любой замкнутой поверхностью, окружающей начало координат, равен

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) = (2\pi)\cdot 2 = 4\pi \ \textit{стер}. \qquad (148)$$

*Мощность, излучаемая в бесконечно малом телесном угле* $d\Omega$. Мы можем использовать определение телесного угла и переписать уравнение (137) в более простой форме:

$$dP(\mathbf{r}, t) = \frac{q^2}{c^3}\,\mathbf{a}^2(t')\sin^2\theta(t')\,\frac{d\Omega}{4\pi}. \qquad (149)$$

*Излучение электрического диполя.* Если движение заряда представляет собой гармоническое движение вдоль фиксированного направления $\hat{\mathbf{x}}$, то возникающее при этом излучение называется излучением электрического диполя. В этом случае имеем

$$x(t') = x_0\cos\omega t', \quad \mathbf{a}(t') = \hat{\mathbf{x}}\ddot{x}(t') = -\omega^2\hat{\mathbf{x}}x(t'). \qquad (150)$$

Мощность, излучаемая в телесном угле $d\Omega$, усредненная за один цикл колебаний, равна

$$dP(\mathbf{r}) = \frac{q^2}{c^3}\langle \mathbf{a}^2(t')\rangle \sin^2\theta \frac{d\Omega}{4\pi} = \\ = \frac{q^2}{c^3}\omega^4\langle x^2(t')\rangle \sin^2\theta \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (151)$$

Полное значение усредненной по времени за цикл колебаний мощности, излучаемой во всех направлениях, получается интегрированием по телесному углу. Поэтому мы просто заменим в уравнении (151) $d\Omega$ на $4\pi$ и $\sin^2\theta$ на его среднее значение $^2/_3$. Получим

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\omega^4\langle x^2(t')\rangle. \quad (152)$$

*Естественная ширина линии, испускаемой атомом.* Мы можем использовать уравнение (152) для получения простой классической оценки времени жизни свободно высвечивающегося возбужденного атома, излучение которого соответствует излучению электрического диполя. Нужно отметить, что результат, который мы получим, совпадет с экспериментально наблюденными значениями, хотя мы и не используем в своих оценках квантовую теорию.

Рассмотрим простую классическую модель атома. Пусть атом состоит из электрона с зарядом $q = -e$ и массой $m$, который связан с тяжелым ядром «пружиной с коэффициентом жесткости $m\omega_0^2$». Если в момент времени $t = 0$ атому сообщается энергия возбуждения, он начинает колебаться, совершая слабо затухающее гармоническое движение с частотой $\omega_0$. (Мы пренебрегаем незначительным изменением частоты вследствие затухания, т. е. пользуемся величиной $\omega_0^2$ вместо $\omega_1^2 = \omega_0^2 - {}^1/_4\Gamma^2$.) Энергия атома равна

$$E(t) = E_0 e^{-t/\tau}. \quad (153)$$

Величина, $1/\tau$, обратная времени жизни, равна относительному уменьшению энергии в единицу времени:

$$\frac{1}{E}\left[-\frac{dE}{dt}\right] = \frac{1}{\tau}. \quad (154)$$

Энергия $E(t)$ равна

$$E(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2(t) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t). \quad (155)$$

Мы можем пренебречь изменением $E(t)$ в течение одного цикла и заменить мгновенные величины в правой части уравнения (155) на средние во времени значения:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2\langle x^2(t)\rangle + \frac{1}{2}m\langle \dot{x}^2(t)\rangle = \frac{1}{2}m\omega_0^2\langle x^2\rangle + \frac{1}{2}m\omega_0^2\langle x^2\rangle,$$

т. е.

$$E(t) = m\omega_0^2\langle x^2\rangle. \quad (156)$$

Теперь предположим, что причиной затухания являются потери энергии на электромагнитное излучение, которое представляет собой излучение электрического диполя. Излучаемая мощность определяется выражением (152):

$$-\frac{dE}{dt} = P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\omega_0^4\langle x^2\rangle. \quad (157)$$

Комбинируя уравнения (154), (156) и (157), мы получим *естественную ширину* (по частоте) линии для света, испускаемого атомом:

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} = \frac{P}{E} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\omega_0^2}{m}. \quad (158)$$

Чтобы получить это выражение, мы использовали тот факт, что для затухающего осциллятора ширина полосы частот на уровне половины максимальной мощности равна величине, обратной среднему времени жизни. Уравнение (158) применимо к любому излучающему диполю, совершающему затухающие колебания, если затухание возникает из-за потерь на излучение. Положим, что атом испускает видимый свет с длиной волны $\lambda = 5000\ \text{Å} = 5\cdot 10^{-5}\ см$, тогда $\nu_0 = c/\lambda_0 = 3\cdot 10^{10}/5\cdot 10^{-5} = 6\cdot 10^{14}\ гц$. Взяв для $e$ и $m$ значения $e = 4{,}8\cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ$_q$ и $m = 0{,}91\cdot 10^{-27}\ г$, мы получаем

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{c^3}{e^2}\frac{m}{\omega_0^2} = \left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{(3\cdot 10^{10})^3(0{,}91\cdot 10^{-27})}{(4{,}8\cdot 10^{-10})^2(2\pi)^2(6\cdot 10^{14})^2} \approx 4{,}5\cdot 10^{-8}\ сек. \quad (159)$$

Важно помнить, что для свободно высвечивающегося атома, испускающего видимый свет, $\tau \sim 10^{-8}\ сек$.

Рассмотрим еще один вопрос, ответ на который можно получить, зная излучение диполя.

*Почему небо синее?* Нас интересует зависимость интенсивности рассеянного отдельным атомом света от частоты. Оказывается, что синий свет рассеивается атомом гораздо сильнее красного. (Красный цвет Солнца на закате объясняется тем, что, когда свет проходит через большую толщу воздуха, синий цвет сильно поглощается и остается красный.) Вы можете проделать опыт, демонстрирующий этот эффект. Возьмите стеклянный шар или банку с водой и лампу. Добавьте в воду несколько капель молока и перемешайте. Направьте пучок света от лампы через воду так, чтобы видеть пучок либо в рассеянном на молекулах молока свете (наблюдение под углом), либо глядя прямо на пучок через воду. Обратите внимание на синюю окраску рассеянного света (при наблюдении под углом) и на красноватый оттенок при наблюдении источника света по прямой линии через банку. Добавляя капли молока в воду, вы будете наблюдать эффект постепенного сгущения «тумана».

Рассмотрим электрон в «классической молекуле молока», находящийся в установившемся состоянии колебаний под действием электрического поля бегущей электромагнитной волны, созданной источником света. Если пучок света от диполя направлен вдоль оси $\hat{\mathbf{z}}$, то электрическое поле в бегущей волне имеет только $x$- и $y$-компоненты. Будем рассматривать только $x$-компоненту электрического

поля ($y$-компонента даст аналогичный результат). Далее, будем рассматривать данный «цвет», т. е. определенную фурье-компоненту белого света (т. е. одну частоту). (Заметим, что в белом свете, кроме электромагнитного излучения с частотами видимого света, присутствуют и частоты, которые мы не можем обнаружить глазом.) Электрическое поле $E_x(t)$ в месте нахождения молекулы молока равно

$$E_x = E_0 \cos \omega t. \tag{160}$$

Предположим, что связь электрона с ядром в молекуле молока определяется «пружиной с коэффициентом жесткости $m\omega_0^2$». Пренебрежем затуханием, т. е. будем считать, что частота внешнего воздействия $\omega$ далека от резонансной частоты $\omega_0$. Уравнение движения электрона имеет вид

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + qE_x. \tag{161}$$

В установившемся состоянии $x(t)$ является гармоническим колебанием с частотой $\omega$. Поэтому $\ddot{x}(t)$ равно $-\omega^2 x(t)$. Тогда уравнение (161) дает

$$-m\omega^2 x(t) = -m\omega_0^2 x(t) + qE_x,$$

$$x(t) = \frac{qE_x(t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{162}$$

Излучение $x(t)$, происходящее при гармоническом колебании заряда, представляет собой излучение диполя. Поэтому полная мощность излучения определяется равенством (152):

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\omega^4 \langle x^2 \rangle = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\omega^4 \left[\frac{-e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right]^2 \langle E_x^2(t) \rangle. \tag{163}$$

При изучении показателя преломления стекла, состоящего из «классических молекул стекла» (п. 4.3), мы нашли, что у такой молекулы собственная частота колебаний $\omega_0$ велика по сравнению с частотами $\omega$ видимого света. Поэтому в уравнении (163) можно считать $\omega_0 \gg \omega$ (т. е. в знаменателе можем пренебречь единицей по сравнению с $\omega_0^2/\omega^2$). Тогда интенсивность рассеянного света будет пропорциональна четвертой степени частоты внешнего воздействия или обратно пропорциональна четвертой степени длины волны:

$$P \propto \omega^4 \propto \frac{1}{\lambda^4}. \tag{164}$$

*Закон синего неба.* Выражение (164) называется «рэлеевским законом синего неба». Отношение длины волны красного света ($\lambda = 6500$ Å) к длине волны синего света ($\lambda = 4500$ Å) равно $65/45 = 1{,}44$. Четвертая степень этого отношения равна 4,3. Таким образом, согласно (164) интенсивность рассеиваемого синего света примерно в четыре раза больше, чем интенсивность рассеиваемого красного света. Таково объяснение синего цвета неба.

*Полное поперечное сечение рассеяния.* Рассмотрим мысленный опыт: неподвижный бильярдный шар радиусом $R$ лежит на пути широкого однородного пучка стальных шариков, движущихся



вдоль $\hat{z}$ со скоростью $v$. Шарики, сталкивающиеся с шаром, упруго рассеиваются и выбывают из пучка. При таких столкновениях энергия, переносимая стальными шариками в направлении $\hat{z}$, рассеивается по другим направлениям. Полное число стальных шариков, рассеянных в единицу времени, равно произведению потока шариков (т. е. числа шариков на 1 *см*$^2$ сечения пучка за 1 *сек*) на *полное поперечное сечение* $\sigma = \pi R^2$ бильярдного шара:

$$\text{Число стальных шариков, рассеянных в 1 } сек = \sigma \times (\text{поток стальных шариков}). \tag{165}$$

Мы предполагаем, что рассеяние упругое, поэтому энергия рассеянного шарика равна энергии падающего. Умножив обе части (165) на энергию одного шарика, получим:

$$\text{Энергия, рассеянная в 1 } сек = \sigma \times (\text{падающий поток энергии}). \tag{166}$$

Выражение (166) можно распространить на случай упругого рассеяния света «классической молекулой» вещества, воспользовавшись им как определением полного поперечного сечения такой молекулы для этого процесса. С другой стороны, энергия, рассеянная в единицу времени, равна мощности, излучаемой электроном, находящимся под внешним воздействием, а падающий на электрон поток энергии представляет собой поток энергии электромагнитного излучения $S_z$. По аналогии с равенством (166) напишем следующее определение:

$$P = \sigma_{\text{рас}} \cdot \frac{c}{4\pi} \langle E_x^2(t) \rangle. \tag{167}$$

Сравнивая выражения (167) и (163), получим

$$\sigma_{\text{рас}} = \frac{4\pi}{c}\frac{P}{\langle E_x^2 \rangle} = \frac{8}{3}\pi \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \tag{168}$$

Уравнение (168) является более точным выражением результата (164), заключающегося в том, что для $\omega_0 \gg \omega$ рассеиваемая интенсивность пропорциональна $\omega^4$. Уравнение (168) дает частотную зависимость *полного поперечного сечения упругого рассеяния света атомом* (для классической модели). Величина $e^2/mc^2$ имеет размерность длины. (Так и должно быть, ибо $\sigma_{\text{рас}}$ имеет размерность площади, а отношение частот в (168) безразмерно.) По историческим причинам эта величина называется *классическим радиусом электрона* $r_0$ или *лоренцевским радиусом электрона*:

$$r_0 \equiv \frac{e^2}{mc^2} = \frac{(4{,}8 \cdot 10^{-10})^2}{(0{,}91 \cdot 10^{-27})(3 \cdot 10^{10})^2} = 2{,}82 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \tag{169}$$

*Классическое томсоновское поперечное сечение рассеяния.* Если «коэффициент жесткости» для упругой связи электрона с ядром равен нулю ($m\omega_0^2 = 0$), то электрон является свободным и $\omega_0 = 0$. В этом случае поперечное сечение упругого рассеяния света можно

получить из уравнения (168), положив $\omega_0 = 0$. Это сечение называется *классическим* или *томсоновским поперечным сечением рассеяния*:

$$\sigma_T = \frac{8}{3}\pi r_0^2 = \frac{8}{3}(3{,}14)(2{,}82\cdot 10^{-13})^2 = 0{,}67\cdot 10^{-24}\ см^2. \quad (170)$$

Сечение порядка $10^{-24}$ $см^2$ может показаться небольшим. Однако в некоторых областях физики (ядерная физика, например) такое сечение кажется столь же большим, как ворота амбара. Поэтому оно получило название *барн**):

$$1\ барн = 10^{-24}\ см^2. \quad (171)$$

Поперечное сечение ядер обычно имеет порядок нескольких миллибарн (сокращенно *мбарн*). Величину томсоновского поперечного сечения [уравнение (170)] очень легко запомнить: она равна двум третям барна.

### Задачи и домашние опыты

**7.1.** Докажите равенство (34) из п. 7.2. Оно служит основой представления волн в волноводе как суперпозиции «наклонных бегущих волн». Равенство показывает также, что трехмерные бегущие гармонические волны образуют «полный набор» функций для описания трехмерных волн. Конечно, трехмерные стоячие волны также образуют «полный набор».

**7.2.** а) Покажите, что для стекла с показателем преломления $n = 1{,}52$ критический угол полного внутреннего отражения равен 41,2°.

б) Чему равен критический угол полного внутреннего отражения для воды с показателем преломления 1,33? Будет ли водяная призма, имеющая форму равнобедренного треугольника (см. рис. 7.3), менять направление светового луча на обратное без потерь (имеется в виду преломление в воздух)? Вначале предположите, что вода непосредственно соприкасается с воздухом, т. е. преломление луча света происходит на границе вода — воздух. Затем рассмотрите случай, когда грани призмы, заполненной водой, образованы предметными стеклами микроскопа.

**7.3.** Опыт. *Водяная призма обратного хода.* Сделайте водяную призму с помощью предметных стекол микроскопа, замазки или ленты скотча. Направьте луч света от фонаря на поверхность воды в призме и проверьте результаты, полученные в задаче 7.2.б.

**7.4.** Покажите, что стеклянная призма обратного хода (рис. 7.3) посылает луч света назад в направлении, противоположном падающему лучу, не только при нормальном падении.

**7.5.** Вычислите среднюю глубину проникновения (т. е. величину $\delta = \varkappa^{-1}$) видимого света с длиной волны 5500 Å в стеклянной призме обратного хода (рис. 7.3). (Мы имеем в виду проникновение в направлении, нормальном к задней поверхности стекло — воздух.) Считайте, что пучок падает нормально к поверхности, как показано на рисунке. Показатель преломления стекла равен 1,52.

Ответ. $\delta = 2{,}2\cdot 10^{-5}$ *см*.

**7.6.** *Свет в вакууме.* Для света или микроволн в волноводе мы нашли, что если частота меньше граничной, то $z$-направление (вдоль волновода) «реактивно». Два других направления не будут реактивны. Возможно ли, в принципе, с помощью некоторых ухищрений сконструировать «волновод общего типа», в котором волны будут реактивны во всех трех направлениях $x$, $y$ и $z$?

**7.7.** *Волоконная оптика.* Луч света можно «пустить» по волноводам, сделанным из стеклянных волокон. Луч света остается в волокне, если падает на поверхность стекло — воздух под углом, большим критического. Если диаметр волокна очень мал, то волокно становится волноводом, в котором частота света меньше граничной. Предположим, что волокно имеет прямоугольное сечение. Оцените минимальную длину одной стороны прямоугольника, при которой волокно будет диспергирующей средой, т. е. по нему будут распространяться бегущие волны видимого света.

Ответ. Длина стороны $> 1{,}7\cdot 10^{-5}$ *см* для $\lambda = 5000$ Å.

**7.8.** *Критический угол при отражении от ионосферы.* Пусть слева от плоскости $z = 0$ (рис. 7.4) находится вакуум, а справа — плазма. Мы, таким образом, имеем идеализированную модель однородной ионосферы с резкой границей. Покажите, что для каждого угла падения $\theta_1$ имеется граничная частота $\omega_{гр}$, зависящая от $\theta_1$ (т. е. найдите зависимость $\omega_{гр}$ от $\theta_1$), и при нормальном падении эта частота равна частоте колебаний плазмы $\omega_p$. Покажите, что для любой частоты $\omega$, большей частоты колебаний плазмы $\omega_p$, существует критический угол полного отражения; при углах, больших критического, волны в ионосфере экспоненциальны. В качестве примера возьмите частоту колебаний плазмы $\nu_p = 25$ *Мгц* и найдите критический угол для микроволн с частотой $\nu = 100$ *Мгц*.

Ответ. Для фиксированного $\theta_1$, $\omega_{гр} = \omega_p/\cos\theta_1$. Для фиксированной частоты $\omega$, большей $\omega_p$, $\cos\theta_{гр} = \omega_p/\omega$.

**7.9.** Опыт. *Каким видят надводный мир рыбы?* Этот опыт можно сделать либо в тихом пруду, либо в плавательном бассейне. В бассейне вы должны быть одним из первых, чтобы иметь гладкую поверхность воды. Наденьте маску для подводного плавания, нырните, перевернитесь на спину и посмотрите вверх. Попытайтесь предсказать, что вы увидите.

**7.10.** *Зависимость фазовой скорости волн в воде от глубины.* Предположим, что вы наполнили водой прямоугольный аквариум (или выкрашенную изнутри картонную коробку, или что-либо подобное) длиной (по $x$) 25 *см* и возбуждаете самую низкую синусоидальную моду (рис. 7.5).

а) Чему равна фазовая скорость (в *см/сек*) волн в глубокой воде? (Напомним, что фазовую скорость можно определить и для стоячих волн.)

б) Постройте график зависимости фазовой скорости (в *см/сек*) от глубины воды $h$ (в *см*) для данной моды и данного аквариума, используя точное дисперсионное соотношение (72) из п. 7.3 для волн малой амплитуды. Покажите на графике «глубоководный предел». На том же графике постройте зависимость фазовой скорости от глубины для волн в мелкой воде, рисуя эту зависимость так, как если бы она была справедлива для всех $h$, независимо от длины волны. В результате ваш точный график покажет «переход» между фазовыми скоростями для волн в глубокой и мелкой воде.

**7.11.** Опыт. *Закон дисперсии для волн в воде.* Возьмите прямоугольный сосуд, размер которого по оси $x$ лежит в пределах 20—60 *см*. Высота сосуда должна быть не меньше $^2/_3$ длины (чтобы можно было достичь глубоководного предела). Лучше всего использовать аквариум. Самым дешевым сосудом может быть картонная коробка (например, коробка из-под ботинок, шляпы или из-под продуктов), внутренняя поверхность которой покрыта водостойким клеем или краской. Однако в этом случае вследствие изгибания картонных стенок существует затухание, которое уменьшает время жизни мод. Поэтому для опыта лучше использовать стеклянный (или другой жесткий) сосуд. Аквариум удобен также и потому, что через его прозрачные стенки можно наблюдать за колебаниями воды.

а) *Самая низкая мода.* Этот случай показан на рис. 7.5. Вычислите величины $\lambda$ и $\delta$ этой моды. Постройте теоретический график зависимости фазовой скорости $v_\phi = \lambda\nu$ (для этой моды и для данного сосуда) от глубины воды $h$ (см. задачу 7.10). (Используйте точный закон дисперсии (72) из п. 7.3.) Теперь при некотором произвольном уровне $h$ воды в сосуде добавьте немного кофейной гущи, чтобы можно было наблюдать смещение по всей толще воды. Толкая (не очень сильно) сосуд вперед и назад, возбудите самую низкую моду и измерьте частоту колебаний. (Для этой цели можно использовать обычные часы.) Получите экспериментальное значение скорости $v_\phi$ и отложите его на теоретическом графике для фазовой скорости. Повторите опыт для различных значений $h$. Вы должны иметь, по крайней мере, одну «мелководную» и одну «глубоководную» экспериментальные точки и одну точку в переходной области, где $h \approx \delta$.

---

*) Амбар, сарай — на английском языке barn.

б) *Следующая более высокая мода.* В картонном аквариуме можно возбудить моду с пучностью в центре аквариума (координата $x=0$, рис. 7.5) и длиной волны, равной длине аквариума. Как возбудить такую моду? Если стенки аквариума твердые, ее возбудить нельзя (во всяком случае это нелегко сделать). Почему? В этом случае следующая легко возбуждаемая мода имеет длину волны $\lambda=2/3L$ и узел в точке $x=0$ (рис. 7.5). Вычислите $\delta$ для данного аквариума и этой моды. Вычислите ожидаемую частоту. Теперь попробуйте потрясти аквариум с такой частотой и возбудить эту моду. Измерьте частоту свободных колебаний для этой моды.

в) *Неустановившиеся биения.* Для этого опыта нужен метроном. Если его нет, воспользуйтесь маятником, гиря которого в одном из крайних положений ударяет по листку бумаги. Теперь плавно качайте аквариум в такт с метрономом. Измеряйте небольшими порциями длину маятника (или частоту метронома) так, чтобы пройти через резонансную частоту для второй моды в случае б). Вы будете наблюдать неустановившиеся биения, происходящие с частотой, лежащей между частотой вынуждающей силы и собственной частотой колебаний. Вы убедитесь в этом, достигнув резонансной частоты. (В этом опыте вы сможете также наблюдать много явлений, необъяснимых в рамках теории малых колебаний.) Постарайтесь *оценить* ширину резонанса $\Delta\omega$. Это можно сделать, грубо измерив среднее время затухания моды и воспользовавшись знаменитым соотношением между полосой частот и временем затухания:

$$\Delta\nu\,\Delta t \approx 1.$$

**7.12.** Выведите классическое волновое уравнение для **B**, как предлагается в пояснении к уравнению (79б), п.7.4.

**7.13.** *Давление излучения от Солнца.* Солнечная постоянная (вне земной атмосферы) равна 1,94 *кал* на 1 *см*$^2$ в 1 *мин* [или $1{,}35\cdot10^6$ *эрг/(см*$^2\cdot$*сек)*]. Вычислите (в *дин/см*$^2$) давление излучения на Земле (при нормальном падении) в двух случаях — а) и б). Сравните результат с давлением атмосферы на уровне моря.

а) Земля «черная» и поглощает весь свет.

б) Земля — идеальное зеркало, которое отражает весь свет.

Ответ. а) Около $5\cdot10^{-11}$ *атм* (1 *атм*$\approx10^6$ *дин/см*$^2$).

**7.14.** *Давление излучения.* (Предварительно решите задачу 7.13.) Давление излучения Солнца на Землю приводит к появлению эффективной отталкивающей силы между Солнцем и Землей.

а) Покажите, что эта сила удовлетворяет «закону обратного квадрата расстояния». Так, если бы расстояние от Земли до Солнца было в два раза больше, то сила вследствие давления излучения стала бы в четыре раза меньше. Такая зависимость от расстояния характерна и для *гравитационной силы.*

б) Вспомните закон Кеплера. Покажите, что для круговых орбит он может быть записан в виде $\omega^2R^3=MG$, где $\omega$ — угловая частота обращения планеты вокруг Солнца, $R$ — расстояние от Солнца до планеты, $M$ — масса Солнца и $G$ — гравитационная постоянная.

в) Покажите, что для сферического черного предмета с плотностью массы $\rho$ и радиусом $r$, движущегося по круговой орбите вокруг Солнца, закон Кеплера имеет вид $\omega^2R^3=MG-[P/(4\pi c)]\,[3/(4\rho r)]$, где $P$ — полная электромагнитная выходная мощность Солнца.

г) Зная солнечную постоянную (задача 7.13) и расстояние от Земли до Солнца (149 млн. *км*), вычислите $P$ (в *эрг/сек*).

д) Рассмотрим «пылинку» с плотностью массы 1 *г/см*$^3$, движущуюся по круговой орбите вокруг Солнца. Для какого значения радиуса $r$ сила, возникающая от давления излучения, равна силе гравитационного притяжения? Что случится с такими (и с более мелкими) «пылинками»?

е) Рассмотрим «комету», состоящую из небольших сферических частиц пыли или льда или еще каких-либо частиц, имеющих одинаковую плотность и диаметр. Будет ли такая «комета» менять свою форму, проходя мимо Солнца? (Мы имеем в виду не круговые, а эллиптические орбиты.)

ж) Известно, что длинный хвост у кометы возникает в основном вследствие давления излучения Солнца. Рассмотрим комету (облако пылевых частиц), движущуюся по круговой равновесной орбите. Комета имеет угловую частоту (частоту обращения вокруг Солнца), одинаковую для всех частиц, однако радиусы равновесных орбит не одинаковы для всех частиц. Комета простирается от $R_1$ до $R_2$, где $R_1$ — ближайший радиус, а $R_2$ — самый далекий. Предположим, что вы можете измерить $R_1$ и $R_2$ (например, наблюдая за кометой в телескоп). Покажите, как можно использовать эту и другую легко добываемую информацию для определения распределения частиц с различными радиусами $r$ в комете. Считаем, что все частицы «черные» и имеют плотность воды. Конечно, все это еще не доказывает, что давление излучения дает больший вклад в силу, действующую на частицы пыли и хвосты комет, чем, например, «солнечный ветер», состоящий из протонов, испущенных Солнцем.

**7.15.** *Плавание в солнечных лучах.* Вы хотите изобрести солнечный парус, который мог бы «парить» в космосе, где гравитационная сила притяжения к Солнцу точно уравновешивалась бы давлением солнечного излучения. Предположим, что парус сделан из алюминизированного пластика. Пусть средняя плотность вещества паруса равна 2,0. (Плотность алюминия 2,7 *г/см*$^3$; плотность пластика около 1.) Парус не несет никакой полезной нагрузки — он должен поддерживать лишь свой собственный вес. Далее считаем, что солнечный свет полностью отражается от паруса. Покажите, что для того, чтобы парус «парил», оставаясь в покое (в инерциальной системе координат), его толщина $d$ должна быть равна

$$\rho d=\frac{2P/4\pi c}{MG}$$

(все обозначения из задачи 7.14). Покажите (задача 7.14), что $P=3{,}8\cdot10^{33}$ *эрг/сек*. Покажите (используйте закон Кеплера для Земли; радиус обращения вокруг Солнца $R=149$ млн. *км*, и $\nu$ равно одной единице за год), что $MG=1{,}3\cdot10^{26}$ *см*$^3$*/сек*$^2$. Покажите, что для $\rho=2$ необходимая толщина $d$ должна равняться $10^{-4}$ *см*, т. е. 1 *мкм*, что в 10 или даже в 100 раз меньше величины, которую хотелось бы иметь. Хотелось бы также, чтобы парус мог нести какую-либо полезную нагрузку. По-видимому, чтобы не упасть на Солнце, парус должен двигаться по орбите вокруг Солнца. Покажите, что результат этой задачи дает размеры «блестящей кубической частицы пыли» плотностью 2,0, которая будет «парить» над Солнцем, если одной стороной она ориентирована по направлению к Солнцу.

**7.16.** *Излучение от точечного источника.* Используйте интегрирование по поверхности «коробочки» для получения уравнения (125), п. 7.5, которое имеет вид

$$E_\perp/E_{\parallel}=v_\perp t/c\,\Delta t.$$

См. рассуждения, следующие за уравнением (127), п. 7.5.

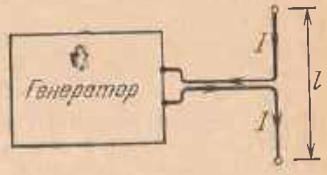


Рис. к задаче 7.17.

**7.17.** *Электрическое дипольное излучение, образованное радиоантенной.* Рассмотрим радиопередатчик и антенну, показанные на рисунке. Будем считать, что ток $I$ постоянен по всей длине $l$ антенны. Провода, идущие от генератора к антенне, находятся очень близко друг к другу или же скручены, так что излучением от подводящих проводов по сравнению с излучением антенны можно пренебречь. Маленькие шарики на концах антенны служат емкостью для накопления зарядов от тока $I$. Эти шарики могут и отсутствовать—заряд накапливается на концах проводников, что приводит к нарушению однородности тока,— однако мы можем этим пренебречь. *Длина антенны $l$ очень мала по сравнению с длиной волны $\lambda$ электромагнитного излучения.*

а) Покажите, что в удаленной точке поле излучения равно

$$\mathbf{E}_{\text{изл}}(\mathbf{r},\,t)=-\frac{l\dot{\mathbf{I}}_\perp(t')}{rc^2},\qquad t'=t-\frac{r}{c}.$$

Здесь $\mathbf{I}$ — вектор тока в антенне, а $\mathbf{I}_\perp$—проекция $\mathbf{I}$ на направление, перпендикулярное направлению радиуса $\mathbf{r}$, проведенного от антенны к точке наблюдения. [Указание. Чтобы получить эту формулу, рассмотрите «эквивалентный

точечный заряд $q$, движущийся с эквивалентной скоростью $v(t')$», поле излучения которого равно полю от тока I.]

б) Покажите, что для волнового числа $k$ характеристический импеданс (т. е. активная нагрузка, которую «чувствует» генератор) равен $Z=(kl)^2\cdot 20$ *ом*. (Мы воспользовались равенством $c^{-1}$ ед. СГСЭ $=30$ *ом*.)

**7.18.** Опыт. *Рассеяние света молекулами молока.* Налейте в стеклянный сосуд воду и направьте сбоку на сосуд луч света от карманного фонаря. Посмотрите на свет, рассеянный под углом 90°, и на фонарь через сосуд с водой. Размешайте в воде несколько капель молока и продолжайте смотреть, постепенно добавляя молоко. Обратите внимание на голубой оттенок рассеянного света и на желтоватый или красноватый оттенок проходящего света. Объясните это явление. Если добавить в воду слишком много молока, то голубой оттенок рассеянного света исчезнет. Рассеянный свет будет выглядеть беловатым, как туман или смог. Однако «закат» будет становиться все более и более красным. Объясните это. В конце концов вода в сосуде станет настолько мутной, что вы не сможете увидеть через нее лампочку фонаря, рассеянный свет станет белым, и вы перестанете видеть пучок света. «Воздух» превратился в «белое облако». Объясните это. Посмотрите на рассеянный свет через поляроид. (Мы объясним это явление в главе 8.)

**7.19.** *Излучение от тонкого заряженного слоя.* Предположим, что в плоскости $xy$ ($z=0$) находится очень тонкий слой положительных зарядов с однородной плотностью $\sigma$. Все заряды колеблются вдоль направления оси $x$ с одинаковой амплитудой и частотой.

а) Используя теорему Гаусса, покажите, что для положительных $z$ поле $E_z(z,\ t)=2\pi\sigma$ независимо от того, колеблются или покоятся заряды. (Этот случай соответствует растянутой пружине в приближении «пружины», когда $z$-компонента натяжения постоянна, независимо от совершаемого движения.)

б) Сделав чертеж силовых линий, покажите, что поле излучения удовлетворяет соотношению

$$\frac{E_x(z,\ t)}{E_z(z,\ t)}=-\frac{\dot{x}(t')}{c},$$

где $\dot{x}(t')$ — *скорость* каждого заряда в момент времени $t'=t-(z/c)$, $t$ — текущее время. Таким образом, поле излучения для положительных $z$ равно

$$E_x(z,\ t)=-2\pi\sigma\frac{\dot{x}(t')}{c}.$$

(Вместо чертежа вы можете использовать соображения, связанные с теоремой Гаусса для замкнутого объема.) Заметьте, что в противоположность излучению от одного точечного заряда, когда поле излучения пропорционально запаздывающему ускорению, здесь оно пропорционально (запаздывающей) скорости. Дайте качественное объяснение тому, «что произошло». (Указание. Рассмотрите вклады от отдельных точечных зарядов, распределенных по плоскости.)

**7.20.** *Излучение от тонкого заряженного слоя.* Получите результат задачи 7.19, сложив (проинтегрировав) вклады от всех точечных зарядов в плоскости. Чтобы получить сходящийся интеграл, предположите, что слой имеет не нулевую, а конечную толщину $d$ (гораздо меньшую длины волны $\lambda$). Естественно предположить, что слой поглощает или рассеивает излучение. Пусть длина проникновения амплитуды равна $\varkappa$. Покажите, что экспоненциальный коэффициент ослабления (э. к. о.) равен

$$\text{э.к.о.}=e^{-\alpha r},\quad \alpha\equiv\frac{\varkappa d}{z},$$

где $r$ — расстояние от точечного заряда до точки наблюдения, находящейся на расстоянии $z$ от слоя, в точке с координатами $x=y=0$. Рассмотрите фазу $\varphi=kr-kz$ ($k$—волновое число). Обратите внимание на то, что $\varphi=0$ для точечного заряда с координатами $x=y=z=0$; таким образом, это — ближайший заряд к точке наблюдения, расположенной на оси $z$. Покажите, что если $x(t')$ определяется вещественной частью выражения

$$x(t')=x_0e^{i\omega t'},$$



то вклад в $E_x$ от заряженного плоского кольца радиусом $\rho$ и шириной $d\rho$ может быть записан в виде

$$dE_x=2\pi kx_0e^{i(\omega t-kz)}e^{-i\varphi}e^{-\beta\varphi}\,d\varphi,$$

где

$$\beta\equiv\frac{\alpha}{k}=\frac{\varkappa d}{kz}.$$

Мы пренебрегаем необходимостью пользоваться проекцией ускорения. (Для малых $\varphi$ коэффициент, возникающий из-за проекции, близок к 1 и медленно уменьшается с увеличением $\varphi$. Мы предполагаем, что он может быть учтен нашим коэффициентом ослабления $e^{-\beta\varphi}$. Этот «трюк» возможен, потому что в пределе мы можем взять $\beta=0$ и найти ответ, не зависящий от $\beta$. Величина $e^{-\beta\varphi}$ называется *коэффициентом сходимости*. Он необходим для получения конечного результата, однако, какое именно значение $\beta$ используется, не так уж важно, поскольку $\beta$ мало по сравнению с единицей.) Покажите, что $E_x$ равно вещественной части интеграла от $dE_x$ от $\varphi=0$ до $\varphi=\infty$. Покажите, что

$$\int_0^\infty e^{-i\varphi}e^{-\beta\varphi}\,d\varphi=\frac{1}{i+\beta}\approx -i\quad\text{для}\quad\beta\ll 1.$$

Наконец, рассмотрите вещественную часть и покажите, что вы получили тот же результат, что и в задаче 7.19. Таким образом, теперь можно объяснить физическую природу «*90-градусного фазового сдвига*», в результате которого *суммарное* поле отстает на 90° по сравнению с вкладом от ближайшего заряда с координатами $x=-y=z=0$. *«Средний» заряд находится как бы на $\frac{1}{4}$ длины волны дальше от точки наблюдения, чем самый близкий заряд с координатами $x=y=z=0$.*

**7.21.** *Приближенное выражение для показателя преломления.* Рассмотрим плоскую волну, падающую на тонкий заряженный слой. Заряды находятся в плоскости $xy$ ($z=0$). Толщина плоскости равна $\Delta z$. Плотность зарядов равна $N$ (число зарядов в 1 *см*$^3$). Величина заряда $q$, его масса $m$, и он связан упругой силой, причем коэффициент жесткости равен $m\omega_0^2$. На каждый заряд действует, во-первых, эта упругая сила и, во-вторых, сила от падающей на заряженный слой плоской волны. Мы пренебрегаем вкладами в результирующую силу других зарядов (т. е. пренебрегаем поляризацией среды). Пусть электрическое поле (в $z=0$) равно вещественной части $E_0\exp i\omega t$. Найдите поле, излучаемое слоем зарядов. Образуйте суперпозицию этого и первичного полей. Покажите, что суммарное поле в $z=0$ (с учетом сделанных предположений) определяется реальной частью выражения

$$E_{\text{сум}}=E_0e^{i\omega t}\left\{1-\frac{i\omega 2\pi Nq^2\,\Delta z}{mc\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right\}.$$

Покажите, что если толщина слоя зарядов $\Delta z$, а показатель преломления $n$, то поле на выходной плоскости слоя будет сдвинуто по фазе относительно поля на входной плоскости на величину, соответствующую времени задержки $t_0$, т. е. вместо поля $E_0\exp i\omega t$ на выходе слоя ($z=0$) будет поле $E_0\exp[i\omega(t-t_0)]$, где

$$\omega t_0=\frac{\Delta z}{\lambda}2\pi(n-1)=k\,\Delta z\,(n-1).$$

Покажите, что для $\omega t_0\ll 1$ это дает

$$n-1=\frac{2\pi Nq^2}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}.$$

Покажите, что этот же результат более точно был выведен в п. 4.3 (для $n$, близких к единице).

**7.22.** *Момент импульса поляризованной по кругу плоской бегущей волны.* Выведем знаменитое соотношение $J=W/\omega$. Положим, что плоская волна образуется слоем зарядов, в котором все заряды движутся по одинаковым окружностям. Предположим, что каждый заряд движется без трения по окружности трубки радиуса $r$. По мере потери энергии скорость движения зарядов уменьшается. Таким обра-

зом, вследствие потерь на излучение уменьшается их угловая скорость $\omega$, их энергия и их момент импульса. (Пусть всегда справедливо неравенство $v \ll c$.) Покажите, что потеря момента импульса у зарядов, движущихся по кругу, равна $\omega^{-1}$, умноженной на потерю энергии. (Что и требуется доказать.)

**7.23.** Чему равны средний во времени поток энергии, плотность энергии и импульс на единицу объема в однородном монохроматическом световом пучке интенсивностью в 100 *вт/см²*?

**7.24.** Электрон совершает гармоническое движение с амплитудой $10^{-8}$ *см* и частотой $10^{14}$ *гц*. Чему равна средняя излучаемая мощность?

Ответ. Приблизительно $\frac{1}{3} \cdot 10^{-10}$ *эрг/сек*.

**7.25.** Когда вещество может поглощать световую энергию, не поглощая импульс? Может ли оно поглощать импульс, если поглощение энергии пренебрежимо мало? Возможно ли поглощение момента импульса при пренебрежимо малом поглощении энергии?

**7.26.** Вообразим, что у нас есть сверхпроводящий генератор и антенна, испускающая микроволновое излучение с длиной волны 100 *см*. В момент $t=0$ мы убираем источник питания, и потери энергии через излучение больше не восполняются. В цепи нигде нет обычных сопротивлений. Найдите среднее время затухания гармонических колебаний электронов в антенне. Используйте результаты задачи 7.17.

Ответ. Пусть $L$ — индуктивность $LC$-цепи осциллятора, т. е. цепи, которая определяет частоту колебаний. Пусть $l$ — длина антенны ($l \ll \lambda$); тогда

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3} \frac{l^2}{L} \frac{\omega^2}{c^3}.$$

Этот результат можно сравнить с выражением для величины, обратной времени затухания колебаний заряда $e$ с массой $m$:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m} \frac{\omega^2}{c^3}.$$

**7.27.** Радиостанция мощностью в 50 *вт*, удаленная от нас на 15 *км*, излучает вертикально поляризованные радиоволны. Чему равно максимальное мгновенное значение напряжения, воздействующего на электрон в приемной радиоантенне, если она ориентирована вертикально и ее длина равна 20 *см*? Отражением от земли, зданий и т. д. можно пренебречь.

**7.28.** *Источник света Смита — Парселла.* Узкий пучок электронов с кинетической энергией 300 *кэв* распространяется параллельно (т. е. при угле падения, близком к 90°) поверхности металлической дифракционной решетки. Расстояние между соседними царапинами решетки $d=1{,}67$ *мкм*. Пучок распространяется перпендикулярно царапинам. Наведенный на поверхности решетки заряд, который движется за электронным пучком, претерпевает неожиданное отклонение всякий раз, когда встречает на своем пути царапину. (Наведенный заряд движется по поверхности решетки.) Таким образом, когда электрон проходит мимо царапины на пластине, то царапина служит источником излучения. Предположим, что положение наблюдателя определяется углом $\theta$ относительно электронного пучка; при $\theta=0$ наблюдатель смотрит в направлении пучка.

а) Покажите, что наблюдатель регистрирует импульсы излучения, приходящие с периодом $T=(d/v)-d(\cos\theta)/c$; покажите, что длина волны равна $d(\beta^{-1}-\cos\theta)$.

б) Считаете ли вы, что при данном угле $\theta$ будет наблюдаться только эта длина волны? (Подумайте о фурье-анализе излучаемых с периодом $T$ импульсов.)

в) Сделайте численный расчет для электронов с энергией 300 *кэв* и угла наблюдения $\theta=15°$. Какие цвета вы ожидаете увидеть?

г) Будет ли свет поляризован?

В журнале «Phys. Rev.»[92, 1069 (1953)] вы можете ознакомиться с красивым опытом Смита и Парселла (автором II тома Е. К. Ф.)

**7.29.** *Форма стоячих волн в воде.* В тексте мы полагали (интуитивно), что если вертикальное смещение в стоячей волне зависит от $x$, как $\sin kx$, то горизонтальное смещение должно определяться зависимостью $\cos kx$.



а) Получим этот результат алгебраически. Положим

$$\psi_y = \cos\omega t \sin kx\, f(y),$$
$$\psi_x = \cos\omega t\, [\cos kx\, g(y) + \sin kx\, h(y)].$$

Покажите, что $h(y)$ должно равняться нулю.

б) Покажите, что результаты, полученные для движения капли воды в стоячей волне, соответствуют гармоническому движению вперед и назад вдоль прямой линии.

**7.30.** Предположим, что распространяющиеся в океане бегущие волны имеют амплитуду 3 *м* и длину волны 10 *м*. На каком расстоянии от поверхности воды вы должны плыть, чтобы амплитуда вашего движения была равна 15 *см*?

Ответ. Около 5 *м*.

**7.31.** *Форма бегущих волн в воде.* Предположим, что $\psi_y$ имеет вид

$$\psi_y = A \cos(\omega t - kx) f(y),$$

где $f(y)$ — неизвестная функция координаты $y$. Далее, предположим, что вода несжимаема и не имеет пузырьков. Покажите, что $\psi_y$ и $\psi_z$ определяются уравнениями (75) и (76) из п.7.3.

**7.32.** Закон дисперсии для волн в воде [уравнение (72), п.7.3] был получен при рассмотрении стоячих волн. Как выглядит закон дисперсии для бегущих волн?

**7.33.** *Закон дисперсии для волн поверхностного натяжения.* Поверхность воды ведет себя как растянутая мембрана. В равновесии натяжение по оси $x$ определяется коэффициентом поверхностного натяжения $T=72$ *дин/см*, умноженным на длину $L$ вдоль «неинтересного» $z$-направления (см. рис. 7.5 и 7.6). Если поверхность выпуклая, то вследствие поверхностного натяжения возникает давление, направленное вниз. Покажите, что для синусоидальной волны давление, направленное вниз, равно

$$p = Tk^2\psi_y.$$

Покажите, что вес воды создает постоянное давление (давление при равновесии) и дополнительное давление

$$p = \rho g \psi_y.$$

Покажите, что вклад поверхностного натяжения в величину возвращающей силы, отнесенной к единице массы и единице смещения (т. е. в величину $\omega^2$), может быть получен из гравитационной возвращающей силы заменой $\rho g$ на $Tk^2$. Этим вы докажете, что в общем случае закон дисперсии имеет вид

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{T}{\rho} k^3\right) \left[\frac{1-e^{-2kh}}{1+e^{-2kh}}\right].$$

**7.34.** *Плоские электромагнитные волны.* Покажите, что для электромагнитных плоских волн в вакууме уравнения Максвелла, которые связывают $E_y$ и $B_x$, «эквивалентны» уравнениям Максвелла, связывающим $E_x$ и $B_y$, в том смысле, что один набор уравнений может быть получен из другого путем простого поворота системы координат относительно оси $z$ (т. е. оси распространения) на 90°. Покажите на чертеже ориентацию векторов **E**, **B** и осей $x$, $y$.

**7.35.** *Стоячие электромагнитные волны в вакууме.* Покажите, что если $E_x(z, t)$ — стоячая волна вида $E_x = A \cos\omega t \cos kz$, то $B_y(z, t)$ имеет форму стоячей волны $A \sin\omega t \sin kx$.

**7.36.** *Выражения для энергии электромагнитных стоячих волн.* Предположим, что форма стоячих волн определяется уравнениями задачи 7.35. Найдите плотности электрической и магнитной энергий, а также вектор Пойнтинга как функции пространства и времени. Рассмотрите область длиной в $^1/_4\lambda$, простирающуюся от узла до пучности $E_x$. Постройте график $E_x$ и $B_y$ относительно $z$ для этой области в моменты времени $t=0$, $T/8$ и $T/4$. Для этой же области и этих же времен постройте график плотности электрической и магнитной энергий, а также график плотности полной энергии. Определите направление и величину вектора Пойнтинга $S_z$ для этих моментов времени.

**7.37.** *Связанные линейные дифференциальные уравнения первого порядка для волн в струне.* Рассмотрим непрерывную однородную струну с линейной плотностью $\rho_0$ и равновесным натяжением $T_0$. В такой струне могут распространяться недиспергирующие волны со скоростью $v=\sqrt{T_0/\rho_0}$. Введем следующие функции $F_1(z, t)$ и $F_2(z, t)$:

$$F_1(z, t) \equiv -\frac{T_0}{v}\frac{\partial \psi_x}{\partial z}, \quad F_2(z, t) \equiv \rho_0 \frac{\partial \psi_x}{\partial t}.$$

Таким образом, $F_1$ равно произведению $1/v$ на поперечную возвращающую силу, приложенную к струне справа от $z$ со стороны струны слева от $z$, и $F_2$ равно поперечному импульсу, приходящемуся на единицу длины. Покажите, что $F_1$ и $F_2$ удовлетворяют связанным уравнениям первого порядка

$$\frac{1}{v}\frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{1}{v}\frac{\partial F_2}{\partial t} = -\frac{\partial F_1}{\partial z}.$$

Покажите, что одно из этих уравнений «тривиально», т. е. представляет собой тождество. Покажите, что второе уравнение эквивалентно второму закону Ньютона. Обратите внимание на то, что эти уравнения похожи по форме на два уравнения Максвелла, связывающие $E_x$ и $B_y$, если $E_x$ заменить на $F_1$, а $B_y$ на $F_2$. Аналогично, одно из этих двух уравнений Максвелла может рассматриваться как «тривиальное тождество», если известна специальная теория относительности.

**7.38.** Найдите такие волновые величины $F_1(z, t)$ и $F_2(z, t)$ для продольных волн в струне с грузами, чтобы они удовлетворяли связанным уравнениям первого порядка такого же вида, как в задаче 7.37. Сделайте то же для звуковых волн и для электромагнитных волн в передающей линии. (В последнем случае связанные уравнения не будут просто похожи по форме на уравнения Максвелла. Это будут уравнения Максвелла, записанные через ток и напряжение вместо полей $E_x$ и $B_y$.)

**7.39.** Покажите (прямым интегрированием), что значение $\sin^2\theta$, усредненное по всем направлениям, равно $^2/_3$. Здесь $\theta$ — угол между данным направлением и фиксированной «полярной» осью. При интегрировании используйте сферические полярные координаты.

**7.40.** *Миражи на автостраде.* Управляя автомобилем в жаркий летний день, можно наблюдать, как далеко впереди появляются водоемы, отражающие небо, или фары приближающейся машины. Когда вы подъедете ближе, отражения неожиданно пропадут, как только угол отражения (измеренный от поверхности шоссе) станет больше некоторого критического угла. Эти отражения, или «миражи», связаны с *полным внутренним отражением* света, падающего из холодного воздуха (более плотная среда) в более теплый воздух около поверхности шоссе. Более теплый воздух имеет меньшую плотность и меньший показатель преломления. (Напомним, что разность $n^2-1$ пропорциональна плотности воздуха.) Предположим, что температура воздуха у покрытия автострады на величину $\Delta T$ больше температуры на расстоянии нескольких дюймов от покрытия. Допустим, что температура изменяется скачком. Пусть температура холодного воздуха равна 300 °K, а скачок температуры $\Delta T$ около покрытия равен 10 °C. Показатель преломления воздуха $n=1{,}0003$. Пусть $\varphi$ — критический угол при полном внутреннем отражении, измеренный от покрытия, т. е. $\varphi$ равно 90° минус угол падения, измеренный относительно нормали к покрытию. Считая $n-1 \ll 1$, получите формулу $\varphi \approx [2(n-1)\Delta T/T]^{1/2}$ для $\varphi \ll 1$. Если ваши глаза находятся на 120 *см* выше мостовой, то на каком расстоянии вам покажется ближайший край «водоема с водой»?

**7.41.** *Волновод.* Внутренние размеры прямоугольного волновода равны $5\times 10$ *см*$^2$.

а) Какова самая низкая частота (в *Мгц*) электромагнитной волны, которая будет распространяться в волноводе без ослабления?

б) Покажите на графике направление и изменение электрического поля в этой волне в разных точках волновода.

в) Найдите фазовую и групповую скорости (выраженные в долях $c$) для волны с частотой, равной $^5/_4$ самой низкой частоты волны, распространяющейся без ослабления.



г) Найдите среднюю глубину проникновения для волны с частотой, равной $^4/_5$ самой низкой частоты волны, распространяющейся без ослабления.

**7.42.** *Коэффициент отражения для электрического поля.* Погонная индуктивность в передающей линии аналогична погонной массе для растянутой пружины, а обратная погонная емкость аналогична натяжению струны. Известно, что $C=\varepsilon C_{\text{вак}}$ и $L=\mu L_{\text{вак}}$ и что фазовая скорость в вакууме равна $c$.

а) По аналогии с пружиной покажите, что показатель преломления $n$ равен $(\varepsilon\mu)^{1/2}$ и что характеристический импеданс $Z$ равен произведению его значения в передающей вакуумной линии на $(\mu/\varepsilon)^{1/2}$. Покажите, что коэффициент отражения для электрического поля при переходе из вакуума в среду равен $R=[1-(n/\mu)]/[1+(n/\mu)]$. Он совпадает с коэффициентом отражения для электрического поля в плоской волне, нормально падающей из вакуума на поверхность среды.

б) Теперь выполните с помощью уравнений Максвелла более строгое вычисление коэффициента отражения. Используя уравнения Максвелла и интегрирование по контуру, покажите, что тангенциальное электрическое поле непрерывно на границе при условии, что производная $\partial\mathbf{B}/\partial t$ на границе не бесконечна.

Полагая, что падающая электромагнитная волна линейно поляризована (электрическое поле направлено по $x$), покажите, что $E_{x(\text{пад})}+E_{x(\text{отр})}=E_{x(\text{прош})}$.

в) Воспользуйтесь уравнениями Максвелла для среды, приведенными в Д.9. Рассмотрим поле $\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}$. Это поле, по определению $\mu$, равно $\mathbf{B}/\mu$ и называется полем $\mathbf{H}$. Покажите, что тангенциальная компонента $H$ непрерывна при условии, что частная производная от $\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ по времени конечна. Затем покажите, что для волны, падающей из вакуума, $B_{y(\text{пад})}+B_{y(\text{отр})}=(1/\mu)B_{y(\text{прош})}$. Теперь воспользуйтесь тем, что $B_y$ в среде равно произведению показателя преломления $n$ на $E_x$, и соотношением между $B_y$ и $E_x$ в падающей и отраженной волнах для получения коэффициента отражения $R=E_{x(\text{отр})}/E_{x(\text{пад})}$. Покажите, что

$$R=[1-(n/\mu)]/[1+(n/\mu)].$$

ГЛАВА 8

# ПОЛЯРИЗАЦИЯ

## 8.1. Введение

В главе 7 было показано, что направления электрического и магнитного полей в электромагнитной плоской волне перпендикулярны направлению распространения $\hat{\mathbf{z}}$ (и друг другу). Оси $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ перпендикулярны $\hat{\mathbf{z}}$, а поперечное поле волны всегда можно разложить на две независимые составляющие, параллельные этим осям. Амплитуды и фазы составляющих в общем случае будут различны. *Состояние поляризации* гармонической бегущей волны определяется соотношением амплитуд и фаз независимых составляющих $E_x$ и $E_y$.

Взаимодействие электромагнитной волны с веществом зависит от ее состояния поляризации. Например, если мы найдем вещество, в котором заряженные частицы могут свободно смещаться в направлении оси $\hat{\mathbf{x}}$ и неподвижны в направлении $\hat{\mathbf{y}}$, то в таком веществе компонента $E_x$ падающей волны будет совершать работу над заряженной частицей, а компонента $E_y$ работу не совершит. Энергия электромагнитного излучения, связанная с $E_x$, уменьшится (часть ее превратится в кинетическую энергию заряженных частиц и, в конечном счете, из-за столкновений между частицами — в тепло), в то время как амплитуда $E_y$ от прохождения волны через вещество не изменится. Существуют вещества, которые могут менять разность фаз компонент $E_x$ и $E_y$ (но не вызывают заметного затухания этих компонент). В результате таких *асимметричных* (относительно $E_x$- и $E_y$-компонент) *взаимодействий* состояние поляризации электромагнитного излучения изменяется. Этот факт имеет много важных последствий. Зная, как вещество взаимодействует с излучением, мы можем определить состояние поляризации излучения, и, наоборот, наблюдая, как вещество меняет состояние поляризации, мы получаем возможность судить о его свойствах. Например, направление магнитного поля в «нашем» спиральном плече Галактики стало известно благодаря изучению зависимости поляризации радиоволн внегалактических источников от направления на источники и от длины волны излучения *).

*) См. G. L. Berge, G. A. Seielstad, Scientific American, p. 46 (June 1965).



Очевидно, что понятие поляризации применимо только к тем волнам, которые имеют по крайней мере два независимых направления поляризации. Рассмотрим, например, звуковую волну, распространяющуюся в воздухе вдоль $\hat{\mathbf{z}}$. Если для такой волны известны частота, амплитуда и фаза, то волна определена. Мы знаем, что в звуковой волне смещение происходит вдоль направления распространения волны, т. е. что звуковые волны продольны. В этом случае нет необходимости говорить о продольно-поляризованной волне. Понятие *поляризации* мы «прибережем» для более сложного случая, когда имеются по крайней мере два независимых направления поляризации. У звуковых волн в *твердом теле* или у волн в «пружине» *) имеются три возможных состояния поляризации — одно продольное и два поперечных. В этом случае можно говорить о волнах с продольной поляризацией или о двух волнах с различной поперечной поляризацией. В общем случае волна может быть суперпозицией всех трех состояний поляризации.

## 8.2. Описание состояний поляризации

Волны представляют собой физические величины, отклонения которых от положения равновесия меняются в зависимости от координат и времени. Отклонение от положения равновесия (смещение) может быть описано вектором $\boldsymbol{\psi}(x, y, z, t)$. Мы обычно рассматривали плоские волны, для которых функция $\boldsymbol{\psi}$ зависит от $z$ и $t$: $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(z, t)$, причем направление распространения совпадало с направлением оси $z$. (Мы имеем в виду как стоячие, так и бегущие волны.) Как правило, наиболее интересными физическими свойствами обладают производные смещения $\partial\boldsymbol{\psi}(z, t)/\partial t$ и $\partial\boldsymbol{\psi}(z, t)/\partial z$. Мы убедились в этом на примере волн в струне и звуковых волн, для которых смещение $\boldsymbol{\psi}(z, t)$ имеет смысл смещения частиц среды от положения равновесия.

В общем случае вектор смещения в плоской волне, распространяющейся вдоль $\hat{\mathbf{z}}$, может быть записан в виде

$$\boldsymbol{\psi}(z, t) = \hat{\mathbf{x}}\psi_x(z, t) + \hat{\mathbf{y}}\psi_y(z, t) + \hat{\mathbf{z}}\psi_z(z, t). \qquad (1)$$

Для поперечных волн в струне вектор $\boldsymbol{\psi}$ имеет только $x$- и $y$-компоненты. В этом случае волна называется *поперечно-поляризованной*. (В струне могут также распространяться продольные волны, обусловленные изменением натяжения и продольной скорости частиц струны.) Для звуковых волн в воздухе смещение $\boldsymbol{\psi}$ совпадает с направлением $\hat{\mathbf{z}}$. Такие волны называют продольными, но обычно к ним не применяют термин продольно-поляризованных волн. (Мы знаем, что в трубе можно создать и поперечные звуковые волны. Эти поперечные волны могут рассматриваться как продольные волны, которые не бегут вдоль трубы, а отражаются от одного конца трубы к другому. В этом случае волна распространяется вдоль

*) См. сноску на стр. 24.

трубы, но смещения молекул воздуха имеют как поперечные, так и продольные компоненты.) В случае электромагнитных волн (п. 7.5) смещение $\psi$ поперечно направлению $\hat{\mathbf{z}}$. Действительно, для плоских волн в вакууме векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ всегда перпендикулярны $\hat{\mathbf{z}}$. (В волноводе или в какой-либо полости у векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ могут быть и продольные компоненты.)

*Поляризация поперечных волн.* Рассмотрим поперечную волну следующего вида:

$$\psi(z,\ t) = \hat{\mathbf{x}}\psi_x(z,\ t) + \hat{\mathbf{y}}\psi_y(z,\ t). \tag{2}$$

Изучая поперечные волны, мы будем иметь в виду два примера: поперечные волны в натянутой струне или «пружине» и плоские электромагнитные волны в вакууме. Для волн в струне вектор $\psi(z,\ t)$ дает мгновенное значение поперечного смещения струны от положения равновесия. Величинами, представляющими физический интерес, в этом случае являются поперечная скорость $\partial\psi/\partial t$ и поперечная сила $-T_0\partial\psi/\partial z$ в струне, действующая со стороны струны слева от точки $z$ на область справа от $z$. Если известно смещение $\psi(z,\ t)$, то обе эти величины тоже известны. Для электромагнитных плоских волн вектор $\psi(z,\ t)$ имеет смысл поперечного электрического поля $\mathbf{E}(z,\ t)$. Другой представляющей интерес физической величиной является поперечное магнитное поле $\mathbf{B}(z,\ t)$, которое мы знаем, если известно поле $\mathbf{E}(z,\ t)$. Мы всегда можем представить поле $\mathbf{E}(z,\ t)$ в виде суперпозиции бегущих волн, распространяющихся в направлениях $+z$ и $-z$. Пусть $\mathbf{E}^+$ и $\mathbf{E}^-$ определяет вклад в $\mathbf{E}$ от бегущих волн, распространяющихся в направлении $+z$ и $-z$:

$$\mathbf{E}(z,\ t) = \mathbf{E}^+(z,\ t) + \mathbf{E}^-(z,\ t). \tag{3}$$

В п. 7.4 было показано, что магнитное поле $\mathbf{B}^+$, соответствующее бегущей волне $\mathbf{E}^+$, равно $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}^+$, а магнитное поле $\mathbf{B}^-$, соответствующее волне противоположного направления распространения $\mathbf{E}^-$, равно $-\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}^-$. Таким образом, для магнитного поля имеем

$$\mathbf{B}(z,\ t) = \hat{\mathbf{z}} \times [\mathbf{E}^+(z,\ t) - \mathbf{E}^-(z,\ t)]. \tag{4}$$

Уравнение (4) напоминает нам, что, зная $\mathbf{E}$, мы «автоматически» (а точнее, из уравнений Максвелла) получаем поле $\mathbf{B}$.

*Эффективный точечный заряд.* Другой наглядный пример поляризованных колебаний — это волны, испускаемые гармонически колеблющимся точечным зарядом, достаточно удаленным от точки наблюдения. В этом случае электромагнитную волну в окрестности точки наблюдения можно в достаточно хорошем приближении считать плоской волной. Пусть мгновенное поперечное смещение заряда $q$, колеблющегося относительно начала координат, задано следующим образом:

$$\psi(t) = \hat{\mathbf{x}}x(t) + \hat{\mathbf{y}}y(t) = \hat{\mathbf{x}}x_0\cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{\mathbf{y}}y_0\cos(\omega t + \varphi_2). \tag{5}$$



Тогда электрическое поле, излучаемое зарядом (п. 7.5), равно

$$\mathbf{E}(z,\ t) = -\frac{qa_\perp(t')}{rc^2} = -\frac{q\ddot{\psi}(t')}{zc^2}.$$

Имея в виду, что $\ddot{\psi} = -\omega^2\psi$, получим

$$\mathbf{E}(z,\ t) = \frac{q\omega^2\psi(t')}{zc^2} = \frac{q\omega^2\psi(t - z/c)}{zc^2}. \tag{6}$$

Таким образом, для плоских электромагнитных бегущих волн величина $\psi(z,\ t)$ определяет (с точностью до известного множителя $q\omega^2/zc^2$) электрическое поле $\mathbf{E}(z,\ t)$; но она же равна смещению положительного заряда $q$ в более ранний момент времени $t' = t - z/c$. Если поле $\mathbf{E}(z,\ t)$ создано не колебаниями точечного заряда $q$, а каким-нибудь другим способом, то мы все-таки можем искусственно ввести такой заряд, определив его по формуле (6), и считать, что наблюдаемое поле $\mathbf{E}(z,\ t)$ вызвано этим эффективным зарядом.

*Линейная поляризация.* Если в поперечных волнах (например, в электромагнитных плоских волнах или в поперечных волнах в струне) смещение направлено вдоль прямой линии, перпендикулярной $\hat{\mathbf{z}}$, то такие волны называются *линейно-поляризованными*. Можно задать только два независимых поперечных направления колебаний, например колебания вдоль оси $\hat{\mathbf{x}}$ и вдоль оси $\hat{\mathbf{y}}$. Рассмотрим колебания в фиксированной точке $z$. В этом случае для нас не имеет значения, будет ли волна стоячей, бегущей или представляет собой суперпозицию этих волн. Колебания, соответствующие линейно-поляризованной плоской волне, могут иметь вид

$$\psi(t) = \hat{\mathbf{x}}A_1\cos\omega t \tag{7}$$

или

$$\psi(t) = \hat{\mathbf{y}}A_2\cos\omega t. \tag{8}$$

В выражениях (7) и (8) мы опустили координату $z$, а фазовую постоянную приняли равной нулю. В более общем случае линейно-поляризованное колебание может происходить по направлению, не совпадающему ни с $\hat{\mathbf{x}}$, ни с $\hat{\mathbf{y}}$. В этом случае оно будет представлено суперпозицией двух независимых линейно-поляризованных колебаний [формулы (7) и (8)] с *одинаковой фазой* (или сдвинутых по фазе на $\pi$):

$$\psi(t) = \hat{\mathbf{x}}A_1\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}_2A_2\cos\omega t \tag{9}$$

или

$$\psi(t) = (\hat{\mathbf{x}}A_1 + \hat{\mathbf{y}}A_2)\cos\omega t. \tag{10}$$

Величина и направление вектора $\hat{\mathbf{x}}\,A_1 + \hat{\mathbf{y}}\,A_2$ не зависят от времени. Поэтому уравнение (10) представляет собой колебание вдоль фиксированного направления с амплитудой колебаний $A$, равной

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}. \tag{11}$$

Вектор $\psi(t)$ одну половину периода направлен по вектору $+\hat{\mathbf{e}}$ и другую половину периода по вектору $-\hat{\mathbf{e}}$. Через $\hat{\mathbf{e}}$ мы обозначаем единичный вектор:

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{A_1}{A}\hat{\mathbf{x}} + \frac{A_2}{A}\hat{\mathbf{y}}. \qquad (12)$$

Чтобы показать, что $\hat{\mathbf{e}}$ — единичный вектор, рассмотрим скалярное произведение

$$\hat{\mathbf{e}}\cdot\hat{\mathbf{e}} = \frac{(A_1\hat{\mathbf{x}} + A_2\hat{\mathbf{y}})^2}{A^2} = \frac{A_1^2\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}} + A_2^2\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}} + 2A_1A_2\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}}{A^2} = \frac{A_1^2 + A_2^2}{A^2} = 1. \qquad (13)$$

На рис. 8.1 показано смещение $\psi(t)$ для линейно-поляризованной волны (при фиксированном $z$).

*Линейно-поляризованная стоячая волна.* Предположим, что мы хотим найти выражение для линейно-поляризованной «чистой» стоячей волны, имеющей, например, узел смещения $\psi$ при $z = 0$. Для этого выражение для линейно-поляризованного смещения при фиксированном $z$ [уравнение (10)] следует помножить на $\sin kz$:

$$\psi(z,\ t) = (\hat{\mathbf{x}}A_1 + \hat{\mathbf{y}}A_2)\sin kz\cos\omega t. \qquad (14)$$

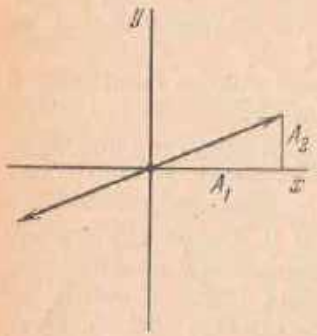



Рис. 8.1. Линейная поляризация.

Смещение $\psi(t)$ для данного $z$ [см. уравнения (9) и (10)] гармонически осциллирует вдоль линии, обозначенной двумя стрелками.

*Линейно-поляризованная бегущая волна.* Чтобы найти выражение для линейно-поляризованной «чистой» бегущей волны, распространяющейся, например, в направлении $+z$, заменим в выражении (10) $\omega t$ на $\omega t - kz$. Получим

$$\psi(z,\ t) = (\hat{\mathbf{x}}A_1 + \hat{\mathbf{y}}A_2)\cos(\omega t - kz). \qquad (15)$$

*Круговая поляризация.* Если смещение в поперечной волне представляет собой движение по кругу (при фиксированном $z$), то говорят, что волна поляризована по кругу или имеет круговую поляризацию. Рассмотрим фиксированное значение $z$. Пока мы еще не определили направление распространения и даже не знаем, является ли волна бегущей или стоячей. Направим большой палец правой руки вдоль $+\hat{\mathbf{z}}$, тогда согнутые остальные пальцы зададут определенное направление вращения. Если круговое движение совпадает с этим направлением вращения, то мы говорим, что колебания имеют круговую поляризацию по $+\hat{\mathbf{z}}$. (Аналогично с помощью того же правила правой руки определяется круговая поляризация по $-\hat{\mathbf{z}}$.) Колебание с круговой поляризацией по $+\hat{\mathbf{z}}$ может быть представлено суперпозицией линейно-поляризованных колебаний по осям $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$, причем амплитуды этих колебаний равны. Выберем, как обычно, правую систему координат, так что $\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$. В этом случае у колебания с круговой поляризацией по $+z$ составляющая



по оси $\hat{\mathbf{x}}$ опережает составляющую по $\hat{\mathbf{y}}$ на 90°:

$$\psi(t) = \hat{\mathbf{x}}A\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}A\cos(\omega t - \pi/2) = \hat{\mathbf{x}}A\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}A\sin\omega t. \qquad (16)$$

Аналогично, для колебания с круговой поляризацией по $-\hat{\mathbf{z}}$ составляющая по оси $\hat{\mathbf{x}}$ отстает от составляющей по $\hat{\mathbf{y}}$ на 90°:

$$\psi(t) = \hat{\mathbf{x}}A\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}A\cos(\omega t + \pi/2) = \hat{\mathbf{x}}A\cos\omega t - \hat{\mathbf{y}}A\sin\omega t. \qquad (17)$$

При рассмотрении плоских электромагнитных волн (п. 7.4) мы выяснили, что поляризованные по кругу плоские волны несут момент импульса $\mathbf{J} = \pm(W/\omega)\hat{\mathbf{z}}$, где $W$ — энергия, а $\omega$ — угловая частота. Знак момента определяется направлением вращения полей. Так, момент импульса направлен по $+\hat{\mathbf{z}}$ для волны с круговой поляризацией по $+\hat{\mathbf{z}}$. То же справедливо и для направления $-\hat{\mathbf{z}}$. Волны с круговой поляризацией в струне и «пружине» также переносят момент импульса. На рис. 8.2 показано смещение $\psi(t)$ для колебания, поляризованного по кругу (при фиксированном $z$).

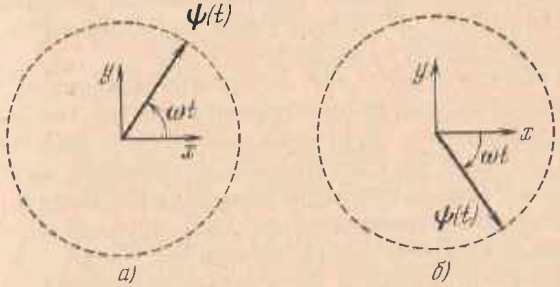



Рис. 8.2. Круговая поляризация.

*а)* Круговая поляризация. Момент импульса направлен по оси $+\hat{\mathbf{z}}$. Ось $\hat{\mathbf{z}}$ фиксирована в пространстве и не зависит от направления распространения волн. *б)* Круговая поляризация. Момент импульса направлен по $-\hat{\mathbf{z}}$.

*Стоячая волна, поляризованная по кругу.* Стоячая волна с круговой поляризацией по $+\hat{\mathbf{z}}$ (момент импульса также направлен по $+\hat{\mathbf{z}}$) получается умножением соответствующего колебания, поляризованного по кругу для фиксированного $z$ [такое колебание задается выражением (16)], на синусоидальную функцию от $z$. Таким образом, для стоячей волны, с круговой поляризацией по $+\hat{\mathbf{z}}$ и узлом в точке $z = 0$, имеем

$$\psi(z,\ t) = [\hat{\mathbf{x}}\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}\cos(\omega t - \pi/2)]\,A\sin kz. \qquad (18)$$

*Бегущая волна, поляризованная по кругу.* Бегущая волна с круговой поляризацией по $+\hat{\mathbf{z}}$ (момент импульса также направлен по $+\hat{\mathbf{z}}$) получается заменой в уравнении (16) $\omega t$ на $\omega t - kz$ (если волна распространяется вдоль $+\hat{\mathbf{z}}$):

$$\psi(z,\ t) = A\{\hat{\mathbf{x}}\cos[\omega t - kz] + \hat{\mathbf{y}}\cos[(\omega t - \pi/2) - kz]\}. \qquad (19)$$

Если волна распространяется по направлению вдоль $-\hat{\mathbf{z}}$, то $\omega t$ нужно заменить на $\omega t + kz$. Если момент импульса волны направлен по $-\hat{\mathbf{z}}$, то для получения выражения бегущей волны с круговой поляризацией по $-\hat{\mathbf{z}}$ нужно использовать уравнение (17), заменив $\omega t$ на $\omega t - kz$ или $\omega t + kz$ в зависимости от направления распространения.

*Спиральность бегущих волн, поляризованных по кругу.* Рассмотрим бегущую, поляризованную по кругу волну, распространяющуюся в направлении $+\hat{\mathbf{z}}$. Предположим, что момент импульса также направлен по $+\hat{\mathbf{z}}$, поэтому направление вращения полей (для электромагнитных волн) или смещений (для волн в «пружине») выражается правилом правой руки, т. е. происходит по $+\hat{\mathbf{z}}$.

Волну с таким состоянием поляризации можно условиться называть волной с правой спиральностью. Мы будем называть это условие *условием момента импульса*. В соответствии с ним бегущая волна, поляризованная по кругу, имеет правую спиральность, если ее момент импульса совпадает с направлением распространения, и левую спиральность, если направление распространения волны противоположно моменту импульса.

В оптике обычно используют другое определение, которое можно назвать условием винта: свет, имеющий правую спиральность, называют поляризованным по кругу влево (или имеющим левую поляризацию), а свет с левой спиральностью называют поляризованным по кругу вправо (или имеющим правую поляризацию).

Мы рассмотрим оптическое определение поляризации на примере поляризованных по кругу волн в «пружине». Предположим, что один конец «пружины» приводится вами в быстрое вращение по часовой стрелке. Поляризованный по кругу волновой пакет будет распространяться по «пружине» от вас. Вращение происходит по часовой стрелке, и момент импульса направлен по направлению распространения волны. Теперь остановим движение, сделав мгновенный снимок, и рассмотрим мгновенную форму (конфигурацию) «пружины». Нас интересует, соответствует эта форма правому или левому винту. Мы видим, что мгновенная конфигурация, зарегистрированная снимком, соответствует левому винту! (Этот результат можно представить следующим образом. Предположим, вы вращаете один конец пружины по часовой стрелке, вызывая в нем бегущую, поляризованную по кругу волну. Рассмотрим конфигурацию «пружины» вблизи руки, совершающей движение по часовой стрелке. Вы увидите, что в фиксированный момент времени угловое положение немного удаленной от руки части «пружины» соответствует угловому положению руки в немного более ранний момент времени: «пружина» отстает от мгновенного положения руки. Это отставание тем больше, чем дальше отстоит от руки рассматриваемая часть «пружины». Охватив взглядом всю «пружину», вы увидите, что она имеет форму левого винта.) Таким образом, условие момента импульса и условие винта дают разные спиральности. Условие момента импульса легче



понять, а оптическое условие легче запомнить, зная, что представляет собой винт.

Полезно приобрести опыт создания в «пружине» волн с различной поперечной поляризацией. Чтобы получить стоячую волну, закрепите один конец «пружины» и трясите другой. Чтобы смоделировать «свободный» конец, привяжите один конец «пружины» к 10-метровой струне, второй конец которой закреплен. Легко возбудить стоячие волны с линейной или круговой поляризацией. Бегущие гармонические волны возбудить труднее, поскольку не так просто создать для «пружины» согласованную нагрузку. Однако вдоль «пружины» легко послать волновой пакет и наблюдать за его отражением от закрепленного или свободного конца.

*Свойства поперечно-поляризованных колебаний.* Экспериментируя с «пружиной» или изучая приведенные выше уравнения, можно проверить следующие свойства поперечно-поляризованных колебаний (ими обладают также и плоские электромагнитные волны).

1. В линейно-поляризованной волне при фиксированном $z$ смещение дважды за период проходит через нуль. В стоячей волне смещение всех движущихся элементов проходит через нуль одновременно. В бегущей волне все элементы совершают одинаковое движение, но с фазовым сдвигом, определяемым временем распространения волны.

2. В поляризованной по кругу стоячей или бегущей волне абсолютная величина смещения при фиксированном $z$ постоянна.

Если сделать мгновенный снимок «пружины», в которой распространяется бегущая, поляризованная по кругу волна, то форма «пружины» на фотографии будет напоминать форму штопора. Если в «пружине» имеет место стоячая волна, поляризованная по кругу, то мгновенный снимок этой «пружины» нельзя отличить от мгновенного снимка «пружины» с линейно-поляризованной стоячей или бегущей волной. Однако следующий мгновенный снимок, рассматриваемый вместе с первым, покажет, какой из трех случаев имеет место.

3. В результате отражения на конце «пружины», по которой распространяется волновой пакет с круговой поляризацией по $+\hat{\mathbf{z}}$ (направление фиксировано в пространстве), возникнет отраженная волна с круговой поляризацией по тому же направлению. Это справедливо как для свободного, так и для закрепленного конца (или для любой другой нагрузки на конце). Таким образом, при отражении направление вращения относительно фиксированного в пространстве направления $\hat{\mathbf{z}}$ остается прежним. Это следует из закона сохранения момента импульса: на закрепленном или свободном конце «пружины» не может возникнуть момент скручивания (сам по себе), и поэтому при отражении момент импульса относительно фиксированного направления $+\hat{\mathbf{z}}$ сохраняется. Конечно, спиральность отраженной волны меняется на противоположную, так как после отражения меняется направление распространения. Электромагнитное излучение ведет себя так же, как «пружина». Под этим мы подразумеваем, что направление вращения относительно фиксированного направления $\mathbf{z}$ поляризованного по кругу света или микроволн (или любого другого электромагнитного излучения) не меняется при отражении на 180°, но спиральность, т. е. направление вращения относительно направления распространения, меняется на обратную.

*Общий случай поперечной поляризации; эллиптическая поляризация.* В общем случае для фиксированного $z$ поперечно-поляризованное колебание имеет вид

$$\psi(t) = \hat{\mathbf{x}} A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{\mathbf{y}} A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \qquad (20)$$

Если $\varphi_2$ равно $\varphi_1$ или $\varphi_1 \pm \pi$, то мы имеем линейно-поляризованное колебание. Если $\varphi_2$ равно $\varphi_1 - \pi/2$ и $A_2$ равно $A_1$, то имеем колебание с круговой поляризацией по $+\hat{z}$. Если $\varphi_2$ равно $\varphi_1 + \pi/2$ и $A_2$ равно $A_1$, то имеем колебание с круговой поляризацией по $-\hat{z}$. В общем случае, когда $A_2$ не равно $A_1$ и фазы $\varphi_2$ и $\varphi_1$ произвольны, конец вектора смещения $\psi$ описывает эллипс.

Действительно, обозначим $\psi_x$ и $\psi_y$ через $x$ и $y$, тогда $x$ равно $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, а $y$ равно $A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Разложим каждый из этих косинусов так, чтобы смещение $x$ было некоторой линейной комбинацией $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, а $y$, соответственно, другой линейной комбинацией этих же функций. Теперь разрешим эти два линейных уравнения относительно $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$. Мы найдем две различные линейные комбинации $x$ и $y$, соответствующие $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$. Возведем выражения для $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ в квадрат и сложим. В результате получим выражение (равное единице), состоящее из членов $x^2$, $y^2$ и $xy$. Это так называемое уравнение конического сечения. Если возможные значения $x$ и $y$ ограничены по величине (как в нашем случае), то коническое сечение представляет собой эллипс.

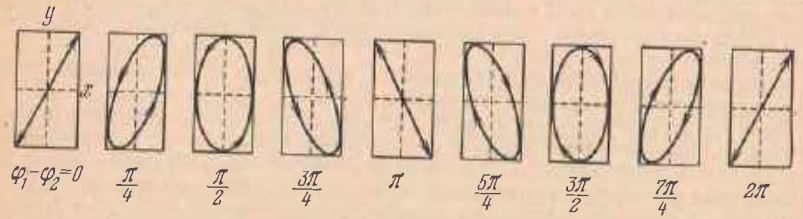



Рис. 8.3. Поляризация в общем случае.
Амплитуда колебаний по оси $y$ в два раза больше амплитуды колебаний по $x$. Колебания по $y$ опережают колебания по $x$ на фазовую постоянную $\varphi_1 - \varphi_2$.

(См. задачу 8.1.) На рис. 8.3 показаны различные случаи поляризации волны в зависимости от величины разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ в уравнении (20). [С помощью прозрачной целлофановой ленты вы можете продемонстрировать влияние разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ на состояние поляризации. См. домашний опыт 8.17.]

*Комплексные обозначения.* Если в суперпозиции волн присутствуют волны с различными фазовыми константами, суперпозицию иногда удобно записать в комплексном виде. В качестве примера рассмотрим бегущую гармоническую волну, распространяющуюся в направлении $+\hat{z}$:

$$\mathbf{E}(z,\ t) = \hat{\mathbf{x}} E_x(z,\ t) + \hat{\mathbf{y}} E_y(z,\ t) = \\ = \hat{\mathbf{x}} E_1 \cos(kz - \omega t - \varphi_1) + \hat{\mathbf{y}} E_2 \cos(kz - \omega t - \varphi_2). \quad (21)$$

Легко видеть, что электрическое поле, определяемое выражением (21), является реальной частью следующей *комплексной волновой функции*:

$$\mathbf{E}_c(z,\ t) = e^{i(kz - \omega t)} (\hat{\mathbf{x}} E_1 e^{-i\varphi_1} + \hat{\mathbf{y}} E_2 e^{-i\varphi_2}). \quad (22)$$



Возможность вынести за скобки член $\exp i(kz - \omega t)$ иногда помогает вычислять выражения, являющиеся суперпозицией различных волн. Если мы хотим применить выражение (22) (или подобную ему волновую функцию в комплексной форме) к конкретному случаю, то в конечном результате расчета мы должны рассматривать реальную часть получаемого выражения. (В уравнениях Максвелла нет $\sqrt{-1}$; из них нельзя получить, например, что электрическое поле равно $\sqrt{-1}$ *в/см*.)

*Комплексные волновые функции и комплексные амплитуды.* Комплексную величину $\mathbf{E}_c$, реальная часть которой представляет электрическое поле $\mathbf{E}$, можно рассматривать как суперпозицию:

$$\mathbf{E}_c(z,\ t) = A_1 \psi_1(z,\ t) + A_2 \psi_2(z,\ t), \quad (23)$$

где

$$\psi_1(z,\ t) = \hat{\mathbf{x}} e^{i(kz - \omega t)}, \\ \psi_2(z,\ t) = \hat{\mathbf{y}} e^{i(kz - \omega t)}, \quad (24)$$

$$A_1 = E_1 e^{-i\varphi_1}, \quad A_2 = E_2 e^{-i\varphi_2}. \quad (25)$$

*Ортонормированные волновые функции.* Волновые функции $\psi_1$ и $\psi_2$ представляют *полный набор ортогональных и нормированных* (сокращенно ортонормированных) *волновых функций*. Прилагательное «полный» означает, что любая гармоническая бегущая волна может быть представлена суперпозицией функций $\psi_1$ и $\psi_2$ с соответствующими постоянными комплексными коэффициентами $A_1$ и $A_2$. Прилагательное «ортонормированный» означает, что имеют место равенства

$$\psi_1^* \cdot \psi_1 = \psi_2^* \cdot \psi_2 = 1, \quad \psi_1^* \cdot \psi_2 = \psi_2^* \cdot \psi_1 = 0, \quad (26)$$

где звездочка соответствует комплексно-сопряженному выражению (т. е. выражению, в котором $i$ заменено на $-i$). Проверим равенства (26):

$$\psi_1^* \cdot \psi_1 = [\hat{\mathbf{x}} e^{-i(kz - \omega t)}] \cdot [\hat{\mathbf{x}} e^{i(kz - \omega t)}] = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 1,$$

$$\psi_1^* \cdot \psi_2 = [\hat{\mathbf{x}} e^{-i(kz - \omega t)}] \cdot [\hat{\mathbf{y}} e^{i(kz - \omega t)}] = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = 0.$$

Найдем выражение для квадрата абсолютной величины комплексного вектора $\mathbf{E}_c$. Помня об условии ортогональности, получаем

$$|\mathbf{E}_c|^2 \equiv (\mathbf{E}_c^*) \cdot (\mathbf{E}_c) = (A_1^* \psi_1^* + A_2^* \psi_2^*) \cdot (A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2) = \\ = |A_1|^2 + |A_2|^2 = E_1^2 + E_2^2. \quad (27)$$

*Комплексное выражение для среднего по времени потока энергии.* Скорость счета у детектора фотонов, помещенного в пучок электромагнитных бегущих волн, пропорциональна среднему по времени потоку энергии в пучке. Более точно: если частота излучения равна $\omega$, то средняя скорость счета $R$ для детектора с площадью сечения $A$ и эффективностью фотокатода $\varepsilon$ будет равна (в единицах *фотоны/сек*)

$$R = \frac{\langle S \rangle}{\hbar \omega} \cdot A \cdot \varepsilon, \quad (28)$$

где средний во времени поток энергии $\langle S \rangle$ [в *эрг/(см²·сек)*] равен

$$\langle S \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}^2 \rangle \quad (29)$$

и

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \langle (\hat{\mathbf{x}}E_x + \hat{\mathbf{y}}E_y)^2 \rangle = \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle = {}^1/_2 E_1^2 + {}^1/_2 E_2^2. \quad (30)$$

В окончательном выражении (30) множитель $^1/_2$ появляется в результате усреднения по времени квадрата амплитуды гармонических колебаний [выражение (21)].

Сравнивая выражения (27) и (30), мы видим, что, работая с комплексной величиной $\mathbf{E}_c$, реальная часть которой равна электрическому полю $\mathbf{E}$, мы получим верное выражение для среднего по времени потока энергии, если для среднего по времени квадрата величины $\mathbf{E}$ возьмем половину квадрата абсолютного значения $\mathbf{E}_c$:

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,\mathbf{E}_c \equiv \text{реальная часть } \mathbf{E}_c, \quad (31)$$

где

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = {}^1/_2 |\mathbf{E}_c|^2, \quad (32)$$

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle, \quad |\mathbf{E}_c|^2 = |E_{xc}|^2 + |E_{yc}|^2. \quad (33)$$

*Различные представления состояния поляризации.* Наиболее общее состояние поляризации может быть представлено суперпозицией волн, линейно-поляризованных по $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$. Естественно, что существует бесконечное число направлений, которые можно выбрать для $\hat{\mathbf{x}}$, и, соответственно, существует бесконечное число представлений состояния с линейной поляризацией. Переходя к комплексным величинам, можно сказать, что существует бесчисленное число полных наборов ортонормированных волновых функций $\psi_1$ и $\psi_2$, которые можно использовать для получения суперпозиции, определяющей $\mathbf{E}_c$. Для примера положим, что единичные векторы $\hat{\mathbf{e}}_1$ и $\hat{\mathbf{e}}_2$ получаются из первоначальных векторов $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ поворотом $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ на некоторый угол $\varphi$ (направление вращения от $\hat{\mathbf{x}}$ к $\hat{\mathbf{y}}$). Легко показать, что в этом случае справедливы соотношения

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{x}}\cos\varphi + \hat{\mathbf{y}}\sin\varphi, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = -\hat{\mathbf{x}}\sin\varphi + \hat{\mathbf{y}}\cos\varphi. \quad (34)$$

Полный набор ортонормированных волновых функций, соответствующий линейно-поляризованным колебаниям по направлениям $\hat{\mathbf{e}}_1$ и $\hat{\mathbf{e}}_2$, имеет вид

$$\psi_1 = \hat{\mathbf{e}}_1 e^{i(kz-\omega t)}, \quad \psi_2 = \hat{\mathbf{e}}_2 e^{i(kz-\omega t)}. \quad (35)$$

Легко показать, что $\psi_1$ и $\psi_2$ удовлетворяют условиям ортонормированности (26).

*Представление произвольно поляризованного колебания суперпозицией колебаний, поляризованных по кругу.* В общем случае поляризация в гармонической бегущей волне может быть представлена как суперпозиция поляризованных компонент с левой и правой спиральностью, обладающих соответствующими амплитудами и начальными фазами. Например, волна, линейно-поляризованная по $\hat{\mathbf{x}}$, может быть представлена двумя эквивалентными выражениями:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}A\cos(kz-\omega t) \quad (36)$$



или

$$\mathbf{E} = \frac{A}{2}\{\hat{\mathbf{x}}\cos[\omega t - kz] + \hat{\mathbf{y}}\cos[(\omega t - \pi/2) - kz]\} + \frac{A}{2}\{\hat{\mathbf{x}}\cos[\omega t - kz] + \hat{\mathbf{y}}\cos[(\omega t + \pi/2) - kz]\}. \quad (37)$$

(Множители при $\hat{\mathbf{y}}$ имеют одинаковую величину, но их фазы различаются на $\pi$; при сложении они дают нуль.)

Выражение (36) представляет $\mathbf{E}$ как колебание с амплитудой $A$, линейно-поляризованное по $\hat{\mathbf{x}}$. Уравнение (37) представляет $\mathbf{E}$ как суперпозицию компонент, поляризованных по кругу. Их моменты импульса направлены по $+\hat{\mathbf{z}}$ и $-\hat{\mathbf{z}}$, и амплитуда каждой компоненты равна $A/2$. Комплексные выражения, соответствующие выражениям (36) и (37), имеют вид

$$\mathbf{E}_c = A\hat{\mathbf{x}}e^{i(kz-\omega t)}, \quad (38)$$

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{x}}e^{i(kz-\omega t)} + \hat{\mathbf{y}}e^{i\{kz-[\omega t-(\pi/2)]\}}] + \frac{1}{2}A[\hat{\mathbf{x}}e^{i(kz-\omega t)} + \hat{\mathbf{y}}e^{i\{kz-[\omega t+(\pi/2)]\}}]. \quad (39)$$

Используем равенства

$$e^{i(\pi/2)} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \quad e^{-i(\pi/2)} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i, \quad (40)$$

чтобы придать выражению (39) более краткий вид:

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{2}A[(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})e^{i(kz-\omega t)}] + \frac{1}{2}A[(\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}})e^{i(kz-\omega t)}]. \quad (41)$$

Теперь мы можем указать еще один полный набор ортонормированных волновых функций, описывающих состояния круговой поляризации:

$$\psi_+ = \left(\frac{\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}\right)e^{i(kz-\omega t)}, \quad \psi_- = \left(\frac{\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}\right)e^{i(kz-\omega t)}. \quad (42)$$

Ортонормированность этих функций, т. е. равенства

$$\psi_+^* \cdot \psi_+ = \psi_-^* \cdot \psi_- = 1, \quad \psi_+^* \cdot \psi_- = \psi_-^* \cdot \psi_+ = 0, \quad (43)$$

легко доказать. В общем случае состояние поляризации в гармонической бегущей волне можно теперь представить в следующем виде:

$$\mathbf{E}_c(z, t) = A_+\psi_+ + A_-\psi_-, \quad (44)$$

где $A_+$ и $A_-$ — комплексные постоянные. Для случая линейной поляризации [равенство (38)] имеем

$$A_+ = A_- = \frac{1}{\sqrt{2}}A. \quad (45)$$

Средняя по времени скорость счета $R$ фотоумножителя, находящегося в пучке бегущих гармонических волн, может быть выражена

через комплексные коэффициенты любого полного набора волновых функций. Таким образом, мы можем выразить $\langle S\rangle$ не только через линейно-поляризованные колебания по направлениям $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ [см. формулы (28) — (33)], но и через колебания, поляризованные по кругу. Имеем

$$R=\frac{\langle S\rangle}{\hbar\omega}A\varepsilon, \tag{46}$$

где $A$ — площадь (не амплитуда!), $\varepsilon$ — эффективность и

$$\langle S\rangle=\frac{c}{4\pi}\langle\mathbf{E}^2\rangle, \tag{47}$$

$$\langle\mathbf{E}\rangle^2=\tfrac{1}{2}|\mathbf{E}_c|^2, \tag{48}$$

$$|\mathbf{E}_c|^2=|A_+\psi_++A_-\psi_-|^2=|A_+|^2+|A_-|^2.$$

Мы редко будем пользоваться комплексными волновыми функциями и познакомились с ними, чтобы облегчить восприятие материала по квантовой физике, изложенного в томе IV.

### 8.3. Образование поляризованных поперечных волн

Рассмотрим несколько способов создания волны с желаемым состоянием поляризации. Если бы мы могли влиять на процесс излучения, то имели бы простейший способ получить нужную поляризацию. Однако чаще всего мы имеем дело с излучением, которое находится вне нашего контроля, например с излучением Солнца, лампы или антенны, и задача в том, чтобы иметь возможность каким-либо способом выделить желаемое состояние поляризации из сложной суперпозиции всевозможных поляризаций. Одним из способов устранения ненужных компонент поляризации является применение поляроида. Другой способ заключается в использовании отражения. В некоторых условиях компоненты с нежелательным состоянием поляризации не отражаются и отраженное излучение обогащено нужным состоянием поляризации.

*Поляризация при излучении.* Возбуждая волну в «пружине», вы создаете нужное состояние поляризации, задавая направление встряхивания. Точно так же поляризация радиоволн или микроволн, испускаемых антенной, зависит от того, как движутся электроны в антенне. Если антенна представляет собой прямой отрезок провода, расположенный перпендикулярно оси $\hat{\mathbf{z}}$, то колебание электронов вдоль провода приводит к колебанию электрических силовых линий в этом же направлении и электрическое поле в электромагнитной волне, распространяющееся вдоль $\hat{\mathbf{z}}$, имеет линейную поляризацию, параллельную антенне. Излучение в других направлениях также линейно поляризовано: вектор электрического поля перпендикулярен направлению распространения излучения антенны и лежит в меридиональной плоскости, образованной этим направлением и антенной (см. п. 7.5). Если имеются две прямые антенны, одна из которых направлена вдоль $\hat{\mathbf{x}}$ и вторая — вдоль $\hat{\mathbf{y}}$, и если они находятся под действием равных токов, фазы которых одинаковы, то излучение, распространяющееся по $\pm\hat{\mathbf{z}}$, будет линейно поляризовано в направлении, составляющем угол в 45° с осями $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$. Если токи в антеннах равны, но ток в $x$-антенне опережает ток в $y$-антенне на 90°, то электромагнитное излучение, испущенное в направлении $\pm\hat{\mathbf{z}}$, будет поляризовано по кругу с моментом импульса, направленным по $+\hat{\mathbf{z}}$. Излучение, испускаемое в направлении $+\hat{\mathbf{z}}$, будет иметь правую спиральность, а в направлении $-\hat{\mathbf{z}}$ — левую. Такое излучение будет неотличимо (на достаточно больших расстояниях от антенны) от излучения эквивалентного точечного заряда, совершающего круговое движение:

$$\psi=A\,[\hat{\mathbf{x}}\cos\omega t+\hat{\mathbf{y}}\sin\omega t]. \tag{49}$$

Здесь амплитуда $A$ кругового движения заряда $q$ связана с поляризованным по кругу электрическим полем излучения равенством (6), п. 8.2. Поляризация излучения, испускаемого нашей системой из двух антенн в любом направлении, будет той же, что и поляризация излучения, возникающего при движении эквивалентного точечного заряда, определяемого выражением (49). В общем случае проекция кругового движения эквивалентного заряда будет движением по эллипсу. Поэтому для произвольного направления, не совпадающего с $+\hat{\mathbf{z}}$, поляризация будет эллиптической. Излучение в направлении, перпендикулярном $\hat{\mathbf{z}}$, имеет линейную поляризацию (это — случай вырождения эллипса). Все эти результаты прямо следуют из законов излучения точечного заряда (п. 7.5) при выполнении двух условий: 1) мы должны находиться достаточно далеко от антенны, чтобы можно было пренебречь полями «ближней зоны», и 2) длина антенны должна быть мала по сравнению с длиной волны. Последнее условие необходимо, чтобы движение всех электронов в антенне можно было заменить движением одного эквивалентного заряда. (Если длина антенны равна, например, нескольким длинам волн, то электроны в разных ее частях дают в излучение вклады с разными фазами. Модель такой антенны должна иметь несколько эквивалентных зарядов. Излучение, которое они создают, называется мультипольным излучением. Напомним, что излучение от одного гармонически колеблющегося заряда называется дипольным излучением.)

*Поляризация при избирательном поглощении.* Предположим, что мы хотим из волны с самым общим состоянием поляризации получить волну с заданным состоянием поляризации. Избавиться от ненужных компонент поляризации можно, заставив их совершать работу над некоторыми «движущимися элементами», в то время как нужная нам компонента такой работы совершать не будет. В качестве примера рассмотрим стоячие волны в «пружине». Направления осей выберем следующим образом: ось $\hat{\mathbf{z}}$ направим вдоль «пружины», $\hat{\mathbf{y}}$ — вертикально и $\hat{\mathbf{x}}$ — горизонтально. Далее,

имеется поршень опущенный в ведро с водой. (Поршень считаем невесомым.) Пусть на поршень при колебаниях «пружины» действует компонента колебаний, направленная по $y$. Если возбуждать в «пружине» стоячую волну, включающую в себя $x$- и $y$-компоненты равной величины, то колебания по $y$ быстро прекратятся, поскольку их энергия будет переходить в работу, совершаемую над поршнем, т. е. в конечном счете в тепло.

*Проволочная ограда.* В случае микроволн селективное поглощение можно осуществить с помощью проволок, расположенных параллельно оси $\hat{\mathbf{y}}$ (рис. 8.4). Предположим, что электромагнитное излучение (микроволны) имеет $x$- и $y$-компоненты. Рассмотрим, какое действие оказывают на них проволочки. Начнем с $y$-компоненты. Электрическое поле в падающем излучении вызывает перемещение электронов вдоль проволочки. Проволока (если она сделана из меди, или серебра, или любого хорошего металлического проводника) представляет для электронов активную нагрузку. Электроны в проводнике под действием электрического поля достигают установившейся скорости за время, меньшее периода микроволн (частота микроволн может, например, равняться 1000 *Мгц*). Поле совершает работу над электронами. Они, во-первых, передают при столкновениях часть своей энергии кристаллической решетке проводника и, во-вторых, излучают энергию. Оказывается, что суперпозиция этого излучения в направлении $+\hat{\mathbf{z}}$ с падающим излучением равна нулю, т. е. излучение электронов уничтожает падающее излучение. В направлении $-\hat{\mathbf{z}}$ излучение, вызванное движением электронов вдоль $\hat{\mathbf{y}}$, дает отраженную волну. (В тепло в проволоках превращается лишь небольшая часть энергии падающего излучения, для которого поле $\mathbf{E}$ направлено вдоль $\hat{\mathbf{y}}$. Бо́льшая часть излучения (энергии) отражается в направлении $-\hat{\mathbf{z}}$.) Таким образом, ограда из проволок исключает $y$-компоненту в прошедшей волне.

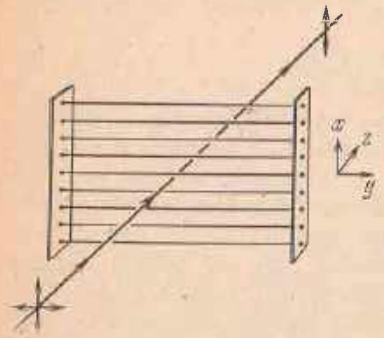


Рис. 8.4. Забор из проволок поглощает микроволны, у которых вектор $\mathbf{E}$ направлен по $\hat{\mathbf{y}}$.

Теперь посмотрим, что происходит вдоль направления $\hat{\mathbf{x}}$. Электроны не могут свободно перемещаться вдоль этого направления, так как их движение ограничено размерами проволоки. Поэтому они не достигают определенной конечной скорости (как это было в случае движения вдоль $\hat{\mathbf{y}}$), а образуют поверхностный заряд вдоль поверхностей проволок, обращенных к осям $+x$ и $-x$. Когда величина поля, образованного поверхностным зарядом, станет достаточной для компенсации внешнего поля (внутри проводника), электроны



перестанут двигаться. Такое состояние достигается за время, меньшее периода колебаний падающей волны. Таким образом, электроны всегда находятся в статическом равновесии и не имеют ни скорости, ни ускорения. Они не испускают и не поглощают энергию. Следовательно, от прохождения через проволочную ограду $x$-компонента излучения не меняется.

Можно возразить, что пространственный заряд будет возникать и *на концах* проводников в направлении $+y$ и $-y$. Однако при достаточной длине проволок результирующее поле в центральной части ограды, от концевых зарядов, можно сделать сколь угодно малым.

Для видимого света ($\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5}$ *см*) не так-то просто сделать решетку из параллельных проводников, расстояние между которыми меньше $\lambda$. Но это все же возможно *).

*Поляроид.* В 1938 г. Ланд изобрел поляроид, который оказывает на излучение то же действие, что и рассматриваемая ограда из проводников. Чтобы изготовить поляроид, нужно вещество, молекулы которого состоят из длинных углеводородных цепей. Это вещество растягивают, так что в результате молекулы выстраиваются вдоль направления растяжения. После растяжения вещество опускают в раствор, содержащий йод. Молекулы йода «прикрепляются» к длинным углеводородным цепям, и возникают свободные электроны, которые могут двигаться вдоль цепей, но не перпендикулярно к ним. В результате получается решетка из «эффективных проводов», направленных вдоль углеводородных цепей. Компонента электрического поля, направленная вдоль «проводов», поглощается, компонента, перпендикулярная «проводам», передается с очень малым затуханием. Таким образом, поляроид поглощает компоненту электрического поля, направленную вдоль «проводов», а компоненту электрического поля, поперечную «проводам», пропускает с очень малым ослаблением.

Из сказанного следует, что в поляроиде существует ось, в направлении которой поглощение излучения практически отсутствует.

Эта ось называется осью *свободного пропускания*. Если электрическое поле $\mathbf{E}$ направлено вдоль этой оси, то электромагнитные волны проходят с очень малым поглощением. Если поле $\mathbf{E}$ перпендикулярно оси свободного пропускания, то свет практически полностью поглощается. Ось свободного пропускания перпендикулярна направлению, в котором растягиваются молекулы углеводорода, т. е. перпендикулярна «проводам».

Если смотреть на белую бумагу через поляроид, то бумага будет выглядеть серой. Это происходит потому, что половина света, отражающегося от бумаги, поглощается поляроидом. Если смотреть на бумагу через кусок чистого целлофана, который пропускает все

*) G. R. Bird, M. Parrish, Jr., J. Opt. Soc. Am. **50**, 886 (1960). Авторы этой статьи испаряли золото (под скользящим углом) на дифракционную решетку из пластика, имевшую 50 000 параллельных царапин на дюйм. Золото, осажденное в царапинах, образовывало решетку из проводящих параллельных проводников.

падающее (от бумаги) излучение, то бумага будет казаться белой *). Определить, является ли полярoид круговым поляризатором, можно так: положите на стол кусочек металла с блестящей поверхностью (можно серебряную монету). На металл положите один из полярoидов и посмотрите на металл через полярoид. Теперь переверните полярoид и посмотрите на металл снова. Если он выглядит так же, то это не круговой полярoид. (Замечательное свойство асимметрии кругового полярoида будет рассмотрено позже.) Возьмите два полярoида, расположите их друг за другом и посмотрите через них на источник света. Вращайте один полярoид относительно другого. Говорят, что полярoиды скрещены, когда свет от источника практически не виден. В этом случае их оси свободного пропускания расположены перпендикулярно друг к другу. Когда эти оси параллельны, свет, прошедший через первый полярoид, проходит и через второй. Пусть свет, испускаемый источником, не поляризован. Это значит, что интенсивность линейно-поляризованных колебаний по $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ одинакова. В идеальном случае, если обе поверхности первого полярoида имеют неотражающее покрытие (т. е. если импедансы согласованы) и если все углеводородные цепочки строго параллельны и толщина полярoида такова, что в нем полностью поглощается нежелаемая компонента, то через полярoид проходит 50% интенсивности падающего света. Однако в действительности на полярoидах нет неотражающего покрытия. Поэтому на каждой поверхности теряется около 4% падающей интенсивности. [Коэффициент преломления вещества, из которого сделан полярoид, примерно такой же, как и у стекла, т. е. близок к 1,5. Поэтому величина отраженной интенсивности от каждой поверхности составляет $[(n-1)/(n+1)]^2 \approx 0{,}04$ падающей интенсивности. При усреднении по видимой полосе длин волн можно пренебречь интерференцией внутри полярoида. С учетом сказанного полные потери составят 8%.] Если цепочки углеводородов выстроены (вытянуты) строго по линии, то других потерь интенсивности не будет. Полярoид, обозначаемый HN-46, пропускает 46% падающего неполяризованного света. Через полярoид HN-32 проходит около 32% начальной интенсивности падающей на полярoид волны или около 64% интенсивности, выделяемой полярoидом компоненты. (Полярoид пропускает меньше $10^{-4}$ интенсивности поглощаемой компоненты поляризации во всей видимой части спектра.) Если ось второго полярoида параллельна оси первого, то через второй полярoид пройдет 64% падающей на него интенсивности, поскольку свет после первого полярoида линейно поляризован вдоль направления, совпадающего с осью свободного пропускания. Таким образом, интенсивность света, прошедшего через два параллельных линейных полярoида HN-32, равна

$$I_{\text{прош}} = I_{\text{пад}} \cdot 0{,}32 \cdot 0{,}64 = 0{,}21 I_{\text{пад}}, \qquad (50)$$

где $I_{\text{пад}}$ — интенсивность падающего неполяризованного света.

*) В приложенном к американскому изданию «оптическом наборе» есть пять серых кусков пластика. Четыре из них — полярoиды типа HN-32, пятый — поляризатор, создающий круговую поляризацию. Его устройство рассмотрено дальше. Для краткости будем называть его «круговой поляризатор». Имея полярoидные фотофильтры (их можно приобрести в фотомагазине, они представляют собой кусок полярoида, зажатый между стеклами и заключенный в оправу), читатель сможет выполнить все опыты, которые автор производит с «оптическим набором», и самостоятельно сделать «круговой поляризатор» (см. домашние опыты 8.10 и 8.11). (*Прим. ред.*)



*Идеальный полярoид. Закон Малюса.* Идеальным поляризатором был бы полярoид HN-50 (такого полярoида не существует, но его удобно рассматривать в качестве примера). Мы пренебрегаем потерей интенсивности при отражении и считаем, что ненужная компонента полностью поглощается, а нужная компонента (с вектором $\mathbf{E}$, параллельным оси пропускания, т. е. перпендикулярным углеводородным цепочкам) полностью проходит. Если линейно-поляризованный свет с амплитудой электрического поля $\mathbf{E}$, распространяющийся в направлении оси $\hat{\mathbf{z}}$, нормально падает на полярoид, и если $\hat{\mathbf{e}}$ — направление оси пропускания идеального полярoида, то через полярoид проходит только компонента $(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{e}})\,\hat{\mathbf{e}}$. Прошедший поток энергии $I_{\text{прош}}$ меньше падающего потока $I_{\text{пад}}$ в $(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{e}})^2/(\mathbf{E}^2)$ раз:

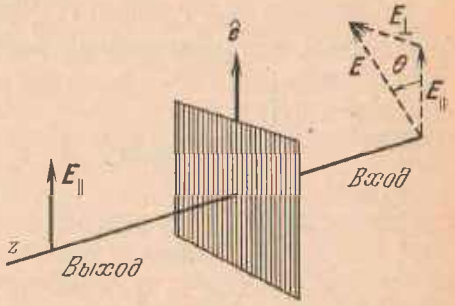



Рис. 8.5. Идеальный поляризатор.
Ось пропускания (для E) направлена по ê. $E_{\parallel}$-составляющая E, параллельная ê, проходит, вторая составляющая $E_{\perp}$ полностью поглощается.

$$I_{\text{прош}} = I_{\text{пад}} \cos^2\theta \equiv I_{\text{пад}} (\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{e}})^2, \qquad (51)$$

где $\hat{\mathbf{E}} \equiv \mathbf{E}/|\mathbf{E}|$ — единичный вектор вдоль направления $\mathbf{E}$. Уравнение (51) часто называют *законом Малюса* (см. рис. 8.5).

Мы знаем, что если два полярoида, оси пропускания которых $\hat{\mathbf{e}}_1$ и $\hat{\mathbf{e}}_2$ взаимно перпендикулярны, расположить друг за другом, то через такую систему свет не пройдет. Однако если между этими полярoидами вставить третий полярoид, направление оси которого не совпадает ни с $\hat{\mathbf{e}}_1$, ни с $\hat{\mathbf{e}}_2$, то поле, прошедшее через эту систему, не будет равно нулю. (См. задачу 8.3.) Вы убедитесь в этом, экспериментируя с полярoидами или с полярoидными фотофильтрами.

*Поляризация при рассеянии.* В солнечный день посмотрите на голубое небо через полярoид. Поднесите его близко к глазу, чтобы видеть через него большую часть неба. Вращая полярoид, вы увидите, как на небе возникают темные полосы. Это значит, что свет, приходящий от неба (солнечное излучение, рассеиваемое молекулами воздуха), поляризован. Измерьте (грубо) угол между линией, соединяющей вашу голову и область неба с наиболее ярко выраженной поляризацией, и линией соединяющей солнце с этой областью.

(Эта область при некоторых положениях поляроида будет наиболее темной.) Вы обнаружите, что указанный угол равен (примерно) 90°. Измерьте направление поляризации. (Ось пропускания поляроида можно найти, рассматривая через него источник с известной поляризацией, например, если смотреть на свет, отраженный от стекла, паркета или пластика, покрывающего пол. Мы покажем, что отраженный свет поляризован в направлении, параллельном плоской отражающей поверхности, т. е. перпендикулярном плоскости падения.)

Объяснение поляризации голубого неба заключается в следующем. Пусть $\hat{\mathbf{z}}$ — направление распространения света от солнца до данной молекулы воздуха (рис. 8.6). Электрическое поле в солнечном излучении не поляризовано. (Чтобы убедиться в этом, вырежьте небольшое отверстие в куске картона. Расположите картон так, чтобы солнечный свет проходил через отверстие и на полу образовалось яркое пятно. Накройте отверстие поляроидом и, вращая его, наблюдайте за изменением интенсивности (яркости) пятна на полу. Не смотрите на солнце!) Электроны в молекуле воздуха ведут себя подобно осциллятору, находящемуся под действием падающего света. Поэтому их колебания представляют суперпозицию движений вдоль осей $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$. Колеблющиеся электроны излучают во всех направлениях, но их излучение неодинаково для разных направлений. Из п. 7.5 мы знаем, что амплитуда и направление поляризации электрического поля, излучаемого отдельным колеблющимся точечным зарядом, зависят от проекции амплитуды движения колеблющегося заряда. Под проекцией амплитуды мы подразумеваем амплитуду той компоненты движения электрона, которая перпендикулярна направлению распространения $\hat{\mathbf{z}}$, т. е. направлению от электрона к наблюдателю. Если вектор $\hat{\mathbf{r}}$ направлен по $\hat{\mathbf{y}}$, то наблюдатель видит только $x$-компоненту движения электрона. Поэтому наблюдаемое им излучение будет полностью линейно-поляризованным по $\hat{\mathbf{x}}$. В этом случае интенсивность излучения равна половине интенсивности излучения в направлении $\hat{\mathbf{z}}$, когда наблюдателю «видны» обе компоненты движения электрона. (В нашем примере трудно смотреть в направлении — $\hat{\mathbf{z}}$, так как мы должны смотреть прямо на солнце. Однако, наблюдая различные участки неба,

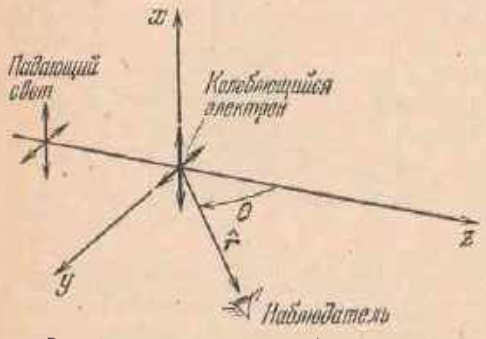



Рис. 8.6. Поляризация при рассеянии.

Ось $\hat{\mathbf{y}}$ лежит в плоскости осей $\hat{\mathbf{z}}$ и $\hat{\mathbf{r}}$. Наблюдатель видит полную проекцию движения электрона на ось $\hat{\mathbf{x}}$ и лишь часть проекции движения на ось $\hat{\mathbf{y}}$, пропорциональную $\cos\theta$. При $\theta = 90°$ рассеянное излучение полностью (на 100%) поляризовано по оси $\hat{\mathbf{x}}$.



можно заметить, что свет от неба вблизи солнца не поляризован. Также не поляризован свет, попавший в ваш глаз после рассеяния на угол, близкий к 180°. Описанный процесс поляризации показан на рис. 8.6.

Интересно, что пчелы реагируют на поляризацию излучения. Информацию о поляризации неба они используют для ориентации *). Некоторые люди тоже могут чувствовать поляризацию, не прибегая к поляроидам; они видят пятна Гайдингера **).

*Деполяризация при многократном рассеянии.* Механизм поляризации луча прожектора, который при рассмотрении со стороны имеет синий оттенок, аналогичен механизму поляризации голубого неба. В тумане луч прожектора выглядит белым и теряет синий оттенок; в этом случае свет не поляризован. Точно так же солнечный свет не поляризуется при отражении от белых облаков, от сахара или от листа белой бумаги. Хотя единичное рассеяние под подходящим углом может дать строго линейно-поляризованный свет, это не означает, что большое число рассеяний улучшит дело. Свет, отраженный от стекла под соответствующим углом, будет полностью линейно поляризован. (Этот случай рассматривается в следующем пункте.) Если теперь из стекла сделать стеклянную пудру, то свет, падающий на слой такой пудры, прежде чем выйти из слоя, будет претерпевать многократное отражение. В результате вы будете наблюдать излучение от электронов, колеблющихся во всех направлениях. Действительно, помимо излучения от источника света, электроны возбуждаются излучением, приходящим из многих других направлений. (Это излучение вызвано отражением в соседних слоях стеклянной пудры.) Наглядный пример деполяризации при многократном рассеянии можно получить, поместив полупрозрачную восковую бумагу (кальку) между двумя скрещенными поляроидами. Восковая бумага почти полностью деполяризует свет, поляризованный первым поляроидом. Многократное рассеяние света восковой бумагой можно продемонстрировать следующим образом. Положите бумагу на страницу книги. При этом вы легко увидите черные буквы. Если бумагу приподнять над страницей на один-два сантиметра, то буквы расплывутся и станут практически неразличимы. Для понимания этого примера можно считать, что от буквы на ваш глаз падает «черный свет», который рассеивается восковой бумагой. Приведем еще один опыт, иллюстрирующий рассеяние света восковой бумагой. Возьмите фонарик и направьте его луч через восковую бумагу на какую-либо поверхность. Постепенно удаляя фонарик от бумаги, наблюдайте за размерами светового пятна, образованного светом, прошедшим через бумагу.

В прозрачном слое стекла или пластика падающий свет не претерпевает многократного рассеяния (вы можете читать через чистое

*) Karl von Frish, Bees, Their Vision, Chemical Sense, and Language (Пчелы, их зрение, чувства и язык), Cornell University Press., Ithaca, N. Y., 1950.

**) М. Миннарт, Свет и цвет в природе, Физматгиз, 1958, стр. 312. Это великолепная книга с множеством простых опытов на свежем воздухе.

стекло независимо от расстояния от стекла до страницы) и не деполяризуется.

*Поляризация при зеркальном отражении. Угол Брюстера.* Посмотрите на отражение какого-либо предмета в обычном стекле или в гладкой поверхности воды. Воспользуйтесь поляроидом для определения поляризации отраженного света. Вы обнаружите, что при углах падения, близких к 56° для стекла и к 53° для воды, отраженный свет полностью линейно поляризован в направлении, параллельном поверхности. Такой угол падения называется углом Брюстера. Вращая поляроид, вы можете полностью погасить отраженный свет при условии, что угол падения света на отражающую поверхность равен углу Брюстера.

Мы знаем, что угол падения и преломления связаны законом Снеллиуса (справедливым для любых углов падения):

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2. \qquad (52)$$

Падающий и отраженный лучи образуют равные углы с нормалью к поверхности (закон зеркального отражения). При угле падения $\theta_1$, для которого $\theta_1 + \theta_2 = 90°$, отраженный луч образует с преломленным (т. е. прошедшим в среду 2) лучом угол в 90°(рис. 8. 7).

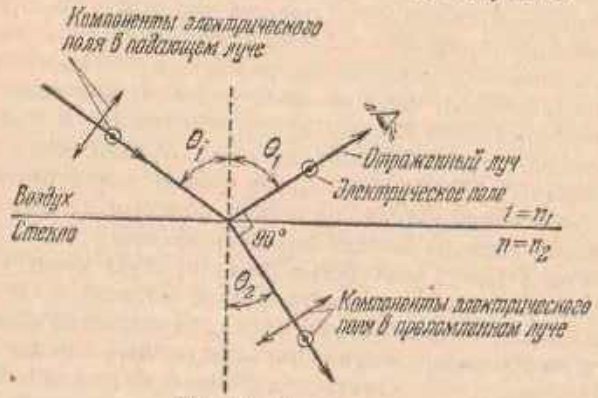



Рис. 8.7. Угол Брюстера.
Показанные углы соответствуют отражению от стекла ($n=1{,}5$). Отраженный свет полностью (на 100%) поляризован перпендикулярно плоскости падения. Это направление показано кружками.

Электроны в стекле находятся под действием преломленной волны. Они колеблются в направлениях, перпендикулярных преломленному лучу. При любом угле падения наблюдатель отраженного света (рис. 8.7), т. е. света, испускаемого электронами стекла, совершающими вынужденные колебания, будет полностью «видеть» лишь ту компоненту движения электронов, которая перпендикулярна плоскости падения (т. е. плоскости рис. 8.7). Действительно, именно эта компонента перпендикулярна отраженному лучу, и наблюдатель «видит» не ее проекцию, а всю компоненту. Но компонента движения электронов, лежащая в плоскости падения, не перпендикулярна отраженному лучу, а, как мы знаем, вклад в отраженное излучение дают лишь компоненты движения, перпендикулярные отраженному лучу. При угле падения Брюстера (см. рис. 8.7) компонента движения электронов, параллельная плоскости чертежа, направлена прямо на наблюдателя, и поэтому ее вклад в излучение в этом направлении равен нулю. Таким образом, отраженный свет полностью поляризован в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа. Из рис. 8.7 мы видим, что это происходит при $\theta_1 + \theta_2 = 90°$. Для этого случая из уравнения (52) имеем [пусть $n_1 = 1$, $n_2 = n$, $\sin\theta_2 = \sin(90° - \theta_1) = \cos\theta_1$]

$$\operatorname{tg}\theta_1 = n, \quad \theta_1 = \text{угол Брюстера}. \qquad (53)$$

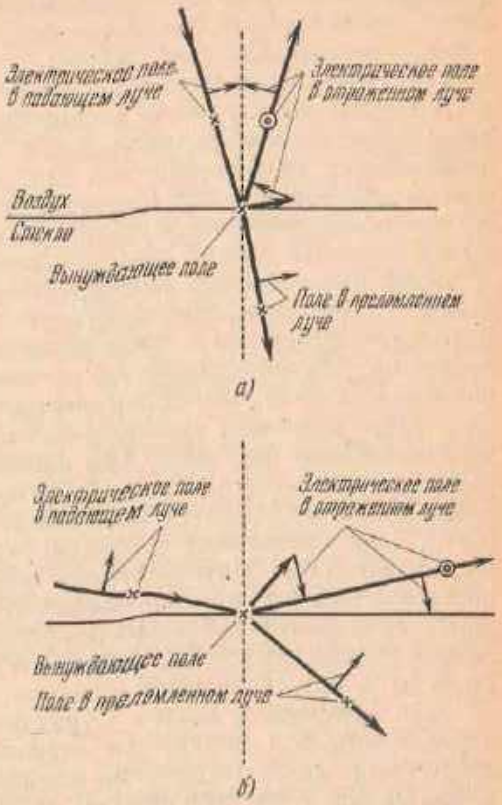



Рис. 8.8. Фазовые соотношения для света, отраженного от стекла. *а*) Угол $\theta_1$ меньше угла Брюстера; *б*) $\theta_1$ больше угла Брюстера. Кружками показана поляризация, перпендикулярная плоскости чертежа. Крест и точка означают, что вектор E направлен от нас или на нас соответственно. Стрелками показано направление E в плоскости рисунка.

*Фазовые соотношения для зеркально отраженного света.* Интересно найти фазовые соотношения между падающим, отраженным и преломленным светом. Они показаны на рис. 8.8. Прошедшая (преломленная) волна всегда имеет ту же фазу, что и падающая. Это можно понять по аналогии с приходящей и проходящей волной в струне. Приходящая волна создает вынуждающую силу и образует проходящую волну. При этом коэффициент пропускания положителен, так как вынуждающая сила, созданная приходящей волной, подобна вынуждающей силе, явившейся источником приходящей волны. (Количественное рассмотрение отражения и прохождения при нормальном падении см. в п. 5.3.) Преломленная волна создана главным образом первичным источником света и лишь частично излучением электронов стекла, происходящим под действием вынуждающей силы. Отраженная волна образована излучением электронов, находящихся под действием преломленной волны. Известно также (п. 5.3), что при нормальном падении коэффициент

отражения для электрического поля (при падении света из воздуха в стекло) отрицателен. Мы знаем также, что электрическое поле в отраженной волне будет суперпозицией вкладов, пропорциональных проекции амплитуды колебания электронов на направление, перпендикулярное лучу, проведенному к наблюдателю отраженного света. Таким образом, мы получим все фазовые соотношения при нормальном падении, если скажем, что при падении света из воздуха в стекло наблюдатель отраженного света «видит» амплитуду, обратную по знаку проекции амплитуды в прошедшей волне (последняя берется на то же направление, т. е. на перпендикуляр к лучу, проведенному к наблюдателю). Это утверждение справедливо не только для нормального падения, но и для всех углов падения. Из него можно получить значение угла Брюстера и фазовые соотношения для всех других углов падения.

*Интенсивность света при зеркальном отражении.* Мы не станем заниматься выводом формул для интенсивности отраженного света*). Используя поляроиды и предметное стекло микроскопа, вы легко проверите, что интенсивность компоненты, линейно-поляризованной в направлении, перпендикулярном плоскости падения, увеличивается при изменении угла падения от 0° (нормальное падение) до 90° (скользящее падение). При нормальном падении от одной поверхности отражается около 4% интенсивности падающего света и около 8% от покровного стекла микроскопа, имеющего две поверхности. При скользящем падении отражается практически 100% падающего света. Интенсивность компоненты, поляризованной в плоскости падения, при отражении от обеих поверхностей предметного стекла составляет около 8% при нормальном падении, уменьшается до нуля при угле Брюстера (56°) и затем постепенно возрастает до 100% при скользящем падении (см. домашний опыт 8.26).

*Окно Брюстера в лазере.* Существование угла Брюстера можно использовать для получения стеклянного окна, пропускающего 100% света. Такое устройство называется *окном Брюстера*. Предположим, что у вас есть прибор, в котором луч света должен проходить через стеклянное окно. При нормальном падении через окно проходит 92% падающей интенсивности (около 4% теряется на каждой поверхности). Во многих случаях с такой потерей интенсивности можно примириться, но в газовом лазере, где отражающие зеркала расположены за окнами, свет будет около 100 раз проходить через окна, и 0,92 в сотой степени составит всего лишь 0,0003. Таким образом, в газовом лазере потеря в 8% на одно прохождение недопустима.

Остроумное решение проблемы можно получить, расположив окно так, чтобы свет падал под углом Брюстера. При этом компонента, поляризация которой перпендикулярна плоскости падения, частично отражается и частично проходит. После большого числа прохождений через окно она почти полностью удаляется из пучка благодаря отражениям. С другой стороны, компонента с поляризацией, параллельной плоскости падения, полностью проходит, так как при угле Брюстера коэффициент отражения для этой компоненты равен нулю. Поэтому даже после многих прохождений окна потери этой компоненты пренебрежимо малы. В конечном итоге половина света пропадает, а вторая половина выходит из лазера полностью линейно-поляризованной. Недорогие газовые лазеры, обычные для учебных физических лабораторий, имеют окна Брюстера. Если у вас есть такой лазер, проверьте с помощью поляроида поляризацию испускаемого света. Действие окна Брюстера показано на рис. 8.9.

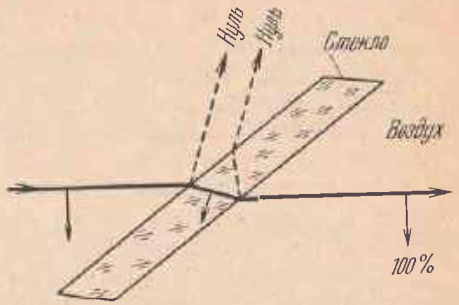


Рис. 8.9. Окно Брюстера.
Рисунок для случая $n=1{,}5$.

*Поляризация радуги.* Поляризация радуги — пример еще более эффектный, чем поляризация голубого неба. Постарайтесь предсказать, является ли поляризация радиальной или тангенциальной (относительно дуги радуги). Если вы не можете дождаться радуги, чтобы проверить свои предсказания, то получите искусственную радугу, воспользовавшись садовым шлангом или пульверизатором *).

## 8.4. Двойное лучепреломление

В п. 8.3 мы научились изменять поляризацию пучка электромагнитных волн с помощью избирательного поглощения или отражения. (Избирательность в данном случае означает, что одна компонента поляризации поглощается или отражается сильнее другой.) Здесь мы покажем, как можно изменять поляризацию излучения, меняя относительную фазу двух компонент.

*Целлофан.* Возьмите два поляроида и ориентируйте их относительно друг друга так, чтобы свет не проходил. Поместите между поляроидами кусок обычного чистого целлофана, который употребляется, например, для обертки пищевых продуктов. Вы увидите, что теперь свет через скрещенные поляроиды проходит. Целлофан совершенно прозрачен и практически не поглощает свет. Чтобы объяснить изменение поляризации света с помощью целлофана,

*) Прекрасный вывод этих формул, называемых формулами Френеля, дан Р. Фейнманом. См. «Фейнмановские лекции по физике», выпуск 7, Москва, «Мир», 1966.

*) Причина возникновения радуги и ее описание приведены в книге М. Минарта «Свет и цвет в природе», Физматгиз, 1958.

следует предположить, что он меняет относительные фазы различных поляризационных компонент проходящего излучения. (Легко показать, что в этом случае не происходит потери интенсивности.)

Поворачивайте кусок целлофана, не меняя положения поляроидов. Вы обнаружите, что существуют два угла, сдвинутых на 90° относительно друг друга, где действие целлофана наибольшее, и два угла с таким же сдвигом в 90°, при которых действие целлофана не сказывается. Таким образом, в целлофане существуют два взаимно перпендикулярных направления, лежащих в плоскости целлофана, которые связаны со свойством образования фазового сдвига различных поляризационных компонент света.

Теперь убедитесь в том, что не всякий прозрачный пластик имеет такое специфическое свойство. Возьмите кусок чистого полиэтилена и поместите его между скрещенными поляроидами. Вы обнаружите, что по сравнению с целлофаном эффект незначителен, т. е. через скрещенные поляроиды проходит очень мало света. Таким образом, мы имеем кусок пластика, у которого нет оптических осей. Попытаемся искусственно создать в таком куске пластика оптическую ось. Растянем наш пластик и поместим его между скрещенными поляроидами так, чтобы направление растяжения составляло угол 45° с осями поляроидов. Эффект в этом случае будет огромен, т. е. система из двух скрещенных поляроидов с растянутым пластиком между ними будет пропускать свет.

Попытаемся объяснить свойства растянутого пластика. До растяжения большие органические молекулы пластика были похожи на сваренные макароны в кастрюле. Под действием сил растяжения молекулы вытянутся вдоль направления силы. Электроны в отдельной, похожей на цепочку, органической молекуле имеют различные «коэффициенты жесткости» для колебаний вдоль углеводородной цепочки и колебаний в двух направлениях, перпендикулярных ее оси. Будем считать, что одно перпендикулярное растягивающей силе направление лежит в плоскости пластика. Тогда колебания электронов по второму направлению, перпендикулярному плоскости пластика, мы можем не учитывать. Электрическая восприимчивость для поля (т. е. наведенная поляризация на единицу объема и на единицу падающего электрического поля) в направлении растяжения будет отличаться от восприимчивости в перпендикулярном направлении. Таким образом, для этих двух направлений диэлектрические постоянные будут различны и поэтому будут различными и коэффициенты преломления.

*Медленная и быстрая оси задерживающей пластинки.* Направление растяжения диэлектрика и перпендикулярное направление (лежащие в плоскости пластинки) называются *оптическими осями*. Из этих двух осей та ось, которой отвечает наибольший коэффициент преломления (для поля **E**, направленного по этой оси), называется *медленной осью*. Больший показатель преломления означает меньшую фазовую скорость. Другая оптическая ось называется *быстрой*. Соответствующие коэффициенты преломления обозначим



через $n_s$ и $n_f$, причем $n_f < n_s$. Слой целлофана или пластика, обладающего такими свойствами, называется *задерживающей пластинкой*.

Рассмотрим действие такой пластинки на бегущую электромагнитную плоскую волну. Разложим падающее на пластинку электрическое поле на две компоненты по взаимно перпендикулярным направлениям $\hat{\mathbf{e}}_s \equiv \hat{\mathbf{x}}$ (медленная ось) и $\hat{\mathbf{e}}_f \equiv \hat{\mathbf{y}}$ (быстрая ось). Будем считать, что пластинка установлена в точке $z = 0$ и толщина ее равна $\Delta z$. Пластинка находится в вакууме. Пусть колебания электрического поля в падающей волне при $z = 0$ определяются реальной частью выражения

$$\mathbf{E}_c = (0,\ t) = e^{i\omega t}\,[\hat{\mathbf{x}}A_s e^{i\varphi_s} + \hat{\mathbf{y}}A_f e^{i\varphi_f}]. \qquad (54)$$

Амплитуды $A_f$ и $A_s$ и фазы $\varphi_f$ и $\varphi_s$ мы получим, разложив электрические поля по двум направлениям $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$. (Так как эти амплитуды и фазовые константы произвольны, то выражение (54) отвечает общему случаю поляризации.) Рассмотрим проходящую волну внутри задерживающей пластинки между $z = 0$ и $\Delta z$. Мы пренебрегаем потерями на отражение (считаем, что отражения нет) на первой поверхности и заменяем $\omega t$ на $\omega t - kz$. Следует иметь в виду, что волновое число $k$ неодинаково для направлений $\hat{\mathbf{e}}_s$ и $\hat{\mathbf{e}}_f$. Учитывая, что $k$ равно $n\omega/c$, т. е. зависит от показателя преломления, получим

$$\mathbf{E}_c\,(z,\ t) = e^{i\omega t}\,[\hat{\mathbf{x}}A_s e^{i\varphi_s} e^{-in_s\omega z/c} + \hat{\mathbf{y}}A_f e^{i\varphi_f} e^{-in_f\omega z/c}]. \qquad (55)$$

*Относительная задержка фазы.* За время прохождения через пластинку фаза каждой компоненты получит задержку относительно фазы, которая существовала бы без пластинки. Для $s$-компоненты эта задержка будет равна $(n_s - 1)\,\omega\,\Delta z/c$, т. е.

Задержка по фазе $E_s$, создаваемая пластинкой

$$\text{относительно вакуума} = (n_s - 1)\,\frac{\omega\,\Delta z}{c}. \qquad (56)$$

Аналогично для $f$-компоненты имеем:

Задержка по фазе $E_f$, создаваемая пластинкой

$$\text{относительно вакуума} = (n_f - 1)\,\frac{\omega\,\Delta z}{c}. \qquad (57)$$

Вычитая из уравнения (56) уравнение (57), находим фазовый сдвиг $E_s$ относительно $E_f$:

Задержка по фазе $E_s$ относительно $E_f$ равна

$$(n_s - n_f)\,\frac{\omega\,\Delta z}{c} = (n_s - n_f)\,2\pi\,\frac{\Delta z}{\lambda_{\text{вак}}}, \qquad (58)$$

где $\lambda_{\text{вак}}$ — длина волны в вакууме.

*Пластинка в четверть длины волны.* Рассмотрим пример, который поможет понять образование и знак сдвига фаз между $\hat{\mathbf{e}}_f$ и $\hat{\mathbf{e}}_s$-компонентами. Предположим, что падающее излучение линейно

поляризовано и направление поляризации составляет угол в 45° с $\hat{\mathbf{e}}_s$ и $\hat{\mathbf{e}}_f$. Тогда $A_s$ и $A_f$ равны и $\varphi_s$ и $\varphi_f$ тоже равны. Предположим, далее, что толщина пластинки такая, что медленная компонента претерпевает задержку по фазе на $\pi/2$ относительно быстрой компоненты. Такая задерживающая пластинка называется *пластинкой в четверть длины волны* *). Волна на выходе из пластинки имеет одинаковые амплитуды для быстрой и медленной компонент, но быстрая компонента опережает медленную компоненту по фазе на 90°. Это значит, что на выходе мы имеем свет, поляризованный по кругу, с направлением вращения от $\hat{\mathbf{e}}_f$ к $\hat{\mathbf{e}}_s$ (рис. 8.10). Уравнение (55) включает в себя этот результат.

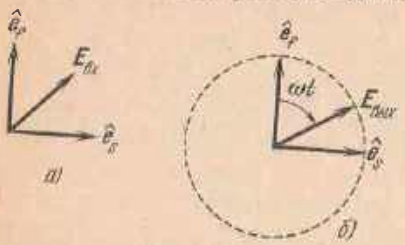



Рис. 8.10. Пластинка в четверть длины волны. Падающий на нее свет линейно поляризован под углом 45° к каждой оптической оси.

*а)* Вход; *б)* выход. Направление распространения перпендикулярно плоскости рисунка.

Чтобы понять действие пластинки на излучение, необходимо помнить, что в пластинке происходит задержка по фазе медленной компоненты. Приведем словесное рассуждение, из которого следует, что направление вращения **E** совпадает с показанным на рис. 8.10. Если компоненты линейно-поляризованного колебания, направленные вдоль $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$, распространяются в вакууме, то при любом заданном $z$ в любое время $t$ колебания вдоль $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ будут иметь то же значение, что колебания у источника света в более ранний момент времени. Эти две компоненты проходят через пластинку, у которой $n_s$ больше чем $n_f$. На выходе пластинки мгновенное значение $E_s$ будет соответствовать более поздней эмиссии, чем $E_f$ (т. е. $E_f$ было испущено раньше). Это объясняется тем, что бегущая волна $E_s$ проходит то же расстояние, что и волна $E_f$, но с меньшей фазовой скоростью. Таким образом, $E_f$ соответствует более раннему времени эмиссии и опережает по фазе $E_s$. Рис. 8.11 иллюстрирует сказанное.

*Свойства задерживающих пластинок.* Ниже приведены свойства задерживающих пластинок, которые нужно хорошо понять.

1. Пластинка толщиной в полволны (она в два раза толще пластинки в четверть волны) оставляет линейно-поляризованный свет линейно-поляризованным, при этом направление поляризации на выходе получается из направления поляризации на входе отражением относительно одной из оптической осей. (Нас почти никогда не интересует, какая это ось, т. е. нам не важна абсолютная фаза и нас не беспокоит изменение знака амплитуды.) Таким образом, пластинка в полдлины волны изменяет знак амплитуды одной из компонент падающей волны.

*) Дальше мы часто будем писать вместо «пластинка в четверть длины волны» просто «пластинка $^1/_4\ \lambda$» и т. п.



2. Свет, поляризованный по кругу, после прохождения через пластинку в полволны остается поляризованным по кругу, но спиральность круговой поляризации меняется (из правой она становится левой, и наоборот).

3. Пластинка в $^1/_4\ \lambda$ превращает линейно-поляризованный свет с направлением поляризации между $\hat{\mathbf{e}}_s$ и $\hat{\mathbf{e}}_f$ в эллиптически-поляризованный свет с направлением вращения от $\hat{\mathbf{e}}_f$ к $\hat{\mathbf{e}}_s$. Если в падающем на пластинку свете направление поляризации составляет угол в 45° с $\hat{\mathbf{e}}_s$ и $\hat{\mathbf{e}}_f$, то на выходе имеем свет, поляризованный по кругу

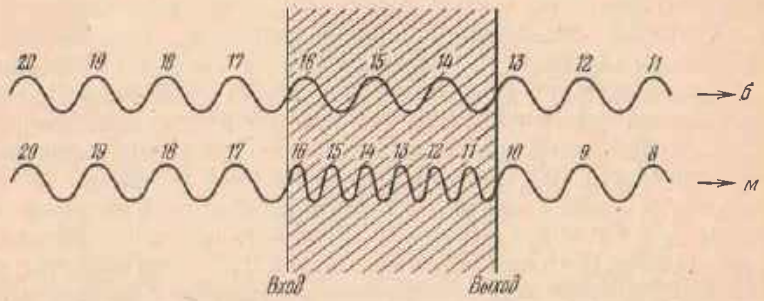



Рис. 8.11. Относительное запаздывание фазы для медленной и быстрой компонент поляризации.

Цифрами указано время эмиссии из источника света. На входе в задерживающую пластинку обе компоненты имеют одно и то же время эмиссии. На выходе медленная компонента, испущенная в десятом цикле колебаний, появляется в то же время, что и быстрая компонента цикла 13. Быстрая компонента опережает медленную на три полных цикла.

(З а м е ч а н и е. Если повернуть направление поляризации линейно-поляризованного света $\mathbf{E}_{вх}$ на рис. 8.10 на 90°, то направление вращения $\mathbf{E}_{вых}$, происходящего с частотой $\omega$, изменится на обратное. Действительно, поворот на 90° означает изменение знака одной из компонент. Помня правило, что вращение происходит от быстрой оси к медленной, мы поймем причину изменения спиральности света на выходе.)

4. Пластинка в $^1/_4\lambda$ превращает свет, поляризованный по кругу, в линейно-поляризованный. Чтобы вывести простое правило, по которому такое преобразование происходит, будем считать, что в падающем излучении вектор $\mathbf{E}_{вх}$ вращается от $\hat{\mathbf{e}}_f$ к $\hat{\mathbf{e}}_s$ (т. е. выберем соответствующим образом знаки $\hat{\mathbf{e}}_f$ и $\hat{\mathbf{e}}_s$). Тогда пластинка в $^1/_4\ \lambda$ превращает свет, поляризованный по кругу, в линейно-поляризованный свет, направление поляризации которого составляет 90° с направлением, которое делит пополам угол между $\hat{\mathbf{e}}_s$ и $\hat{\mathbf{e}}_f$. (В падающем излучении $f$-колебания уже имели опережение по фазе в $^1/_4$ периода. После прохождения пластинки они будут опережать $s$-колебания на $^1/_2$ периода.)

5. Задерживающая пластинка не оказывает никакого влияния на линейно-поляризованный свет, направление поляризации которого совпадает с направлением $\hat{\mathbf{e}}_s$ или $\hat{\mathbf{e}}_f$.

6. Задерживающая пластинка не может поляризовать неполяризованный свет (т. е. свет, приходящий, например, непосредственно от солнца или лампы). Неполяризованный свет будет рассмотрен в п. 8.5. Здесь мы ограничимся довольно неопределенным утверждением, что для неполяризованного света при усреднении по временному интервалу наблюдения имеет место «случайное» соотношение между фазами компонент $x$ и $y$. Относительный фазовый сдвиг, возникающий при прохождении через задерживающую пластинку, не меняет случайного соотношения между $x$- и $y$-компонентами, т. е. если фазы $\varphi_x$ и $\varphi_y$ некоррелированы, то то же можно сказать и о фазах $\varphi_x$ и $\varphi_y + \Delta\varphi$.

7. Круговой поляризатор можно получить, сложив вместе полароидную пластинку и пластинку в $^1/_4\ \lambda$, оптические оси которой составляют угол в 45° с осью пропускания полароида. При этом неполяризованный свет сначала должен проходить через полароид.

8. Круговой полароид, создающий свет с правой спиральностью, будет пропускать 100% (пренебрегаем малыми потерями на отражение) света с такой спиральностью, падающего со стороны пластинки в $^1/_4\ \lambda$. Он будет полностью поглощать свет с левой спиральностью, падающий со стороны пластинки в $^1/_4\ \lambda$. (Эти свойства кругового поляризатора можно понять по аналогии с фильерой для нарезания резьбы и винтом. Будем считать, что фильера «преобразует» цилиндрический, т. е. «неполяризованный», стержень в винт с правой нарезкой. Очевидно, что «правый» винт может проходить через фильеру как в прямом, так и в обратном направлениях, в то время как «левый» винт будет срезаться.) Этот факт имеет интересные следствия. (См. домашний опыт 8.18.)

Мы рассмотрели задерживающие пластинки, полученные односторонним растяжением пластика. (Повторите эти опыты!) Именно этим способом изготовлены пластинки в $^1/_4\ \lambda$ и $^1/_2\ \lambda$, которые имеются в вашем оптическом наборе *). Обычное оконное стекло изотропно и, следовательно, не вызывает двойного лучепреломления (т. е. у него нет оптической оси). Если смотреть через скрещенные полароиды на кусок стекла, находящийся между ними и испытывающий давление, то можно заметить, что в некоторых местах свет будет проходить через такую систему (мы увидим некоторые части стекла). Сильно сжатое небьющееся стекло дает интересный пример двойного лучепреломления. На поверхности предметов из пластика, находящихся под давлением и помещенных между скрещенными полароидами, образуются красивые цветные узоры (мы смотрим на пластик через полароид), которые возникают потому, что сдвиг фаз различен для разных длин волн.

Свойством двойного лучепреломления обладает большинство кристаллов. Если (подобно растянутому пластику) у них есть только одно направление анизотропии, они называются *одноосными* кристаллами. Направление оси анизотропии называется *необыкновенным*

*) См. сноску на стр. 368.



направлением. Другие два направления, перпендикулярные оси анизотропии, называются *обыкновенными* направлениями. Показатели преломления для волны, электрическое поле которой направлено по необыкновенной или по обыкновенной оси, обозначаются через $n_e$ и $n_o$ соответственно. Является ли ось анизотропии быстрой или медленной, зависит от кристаллической структуры. В табл. 8.1 приведены показатели преломления желтого света, испускаемого возбужденным атомом натрия, для некоторых кристаллов ($\lambda = 5890$ Å).

Таблица 8.1

**Некоторые одноосные кристаллы**

| Материал | $n_e$ | $n_o$ | e-ось |
|---|---|---|---|
| Кварц | 1,553 | 1,544 | Медленная |
| Кальцит | 1,486 | 1,658 | Быстрая |
| Лед | 1,307 | 1,306 | Медленная |

*Оптическая активность.* Для наблюдения оптической активности сделайте следующий интересный опыт. Налейте в стеклянную (но не пластмассовую) банку или бокал примерно пятисантиметровый слой фруктового сиропа или концентрированного раствора сахара. Расположите один полароид под банкой, а второй над ней. Источник света поместите снизу и посмотрите на свет через верхний полароид. Вы увидите красивые цветные узоры. Чтобы ограничить интервал длин волн, воспользуйтесь красным или зеленым фильтром. (Интервал длин волн, пропускаемый фильтром, можно определить с помощью дифракционной решетки.) Меняйте толщину слоя раствора. Вы обнаружите, что линейно-поляризованный свет останется линейно-поляризованным, но направление поляризации поворачивается примерно на 10° по часовой стрелке на каждый сантиметр раствора. Это явление называется *оптической активностью*. Попробуем его объяснить.

Линейно-поляризованный свет, образованный первым полароидом, может быть представлен как суперпозиция двух компонент с правой и левой круговой поляризацией, имеющих равные интенсивности (рис. 8.12):

$$\mathbf{E}_c = E_0\hat{\mathbf{x}}e^{i\omega t} = \frac{E_0}{2}\left[\hat{\mathbf{x}}e^{i\omega t} + \hat{\mathbf{y}}e^{i(\omega t - {}^1/_2\pi)}\right] + \frac{E_0}{2}\left[\hat{\mathbf{x}}e^{i\omega t} + \hat{\mathbf{y}}e^{i(\omega t + {}^1/_2\pi)}\right]. \quad (59)$$

Молекулы сахара имеют винтовую структуру. Все молекулы сахара, сделанного, например, из сахарного тростника, имеют одинаковое направление закручивания винта (одинаковую спиральность). Спиральность винта не зависит от того, с какой стороны мы на него смотрим. Поэтому раствор, в котором молекулы сахара ориентированы случайно, имеет спиральность, которая совпадает со

спиральностью одной молекулы. Из-за винтовой структуры молекул раствор сахара имеет различные показатели преломления для света с правой и левой круговой поляризацией.

При распространении через раствор сахара линейно-поляризованной волны (такая волна есть суперпозиция двух волн с левой и правой круговой поляризациями) одна из поляризованных по кругу компонент опережает по фазе другую. Сделав чертеж и немного подумав, вы можете убедиться, что направление поворота плоскости поляризации линейно-поляризованного света (имеется в виду вращение в зависимости от глубины раствора) совпадает с направлением вращения быстрой компоненты (быстрой компоненте соответствует меньший показатель преломления). Подумайте, что произойдет, если через раствор сахара послать в обратном направлении

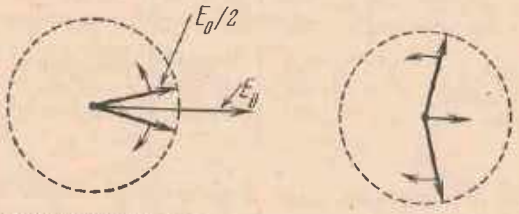



Рис. 8.12. Линейно-поляризованные колебания с амплитудой $E_0$ можно рассматривать как суперпозицию левой и правой круговой поляризации с амплитудами $E_0/2$. Направление линейной поляризации зависит от разности фаз круговых компонент.

свет, отраженный от зеркала после прямого прохождения. Удвоится ли вращение? Или же вращения вообще не будет?

*Первое из великих открытий Пастера.* Луи Пастер обнаружил, что оптически неактивная форма винной кислоты является смесью равного числа молекул винной кислоты, имеющих левую и правую спиральности. Изучая кристаллы винной кислоты под микроскопом, он обнаружил в неактивной (рацемической) смеси кристаллы обеих спиральностей. С помощью маленького пинцета ему удалось разделить кристаллы с правой и левой спиральностью. Водный раствор кристаллов данной спиральности поворачивает плоскость поляризации точно так же, как естественная винная кислота, полученная из винограда. Другая группа выделенных кристаллов вращает плоскость поляризации на тот же угол, но в другом направлении. Последний тип кристаллов винной кислоты никем до Пастера не наблюдался *).

Наблюдаемая у органических молекул живых организмов спиральность определенного знака, несомненно, является ключом к разгадке эволюции жизни на нашей планете. Все молекулы ДНК (основа клетки) имеют свойства правой спирали. Почему? Может ли это быть результатом случайного начального выбора? Может быть,

*) С этим и другими великими экспериментами Пастера, вы можете познакомиться в книге: Rene Dubos, Pasteur and Modern Science, New York, 1960.



когда-то в океане было равное количество примитивных организмов, состоящих из левых и правых ДНК, а затем по каким-то причинам «левые» организмы исчезли? На эти вопросы еще нет ответа *).

*Отражение от металла.* Мы знаем, что свет, отраженный от диэлектрика (стекла, воды), может быть сильно поляризован (для угла Брюстера поляризация достигает 100%). Кажется удивительным, что свет, отраженный от блестящих металлических поверхностей, практически не поляризован. Причина в том, что зеркальная металлическая поверхность почти полностью отражает обе компоненты. Именно поэтому поверхность кажется такой яркой. Она казалась бы темнее, если бы одна компонента поляризации отражалась в меньшей степени, чем другая. (Чтобы убедиться в этом, поместите посеребренное зеркало рядом с куском стекла и смотрите на обе поверхности под углом Брюстера для стекла. Стекло расположите на черном фоне.)

Итак, блестящая поверхность металла не создает поляризованного света из падающего на нее неполяризованного света. Было бы неверно делать из этого факта поспешный вывод, что поверхность металла не оказывает влияния и на поляризованный свет. Кусок целлофана не образует поляризованного света из падающего неполяризованного света, однако он может изменять поляризационное состояние падающего поляризованного света. Таким же свойством обладает блестящая поверхность металла. Вы можете убедиться в этом, проделав несложный опыт, в котором линейно-поляризованный свет превращается после отражения от металла в свет, поляризованный по кругу. (См. домашний опыт 8.28.)

## 8.5. Ширина полосы, время когерентности и поляризация

Здесь будет рассмотрен вопрос о поляризации света, испускаемого атомами. Мы воспользуемся классической моделью электрона, связанного с тяжелым ядром. Электрон колеблется и испускает классические электромагнитные волны; такой атом можно сравнить с небольшой радиоантенной. В классической картине мы пренебрегаем тем, что свет испускается и поглощается порциями (фотонами). Несмотря на пренебрежение «зернистой» структурой света, большинство результатов классической теории находит подтверждение в более сложной квантовой теории. Основное различие между обеими теориями в том, что в классической теории поток энергии в электромагнитной волне считается непрерывным, а в квантовой теории он состоит из отдельных порций — фотонов. Однако уравнения Максвелла (уравнения классической электромагнитной теории) дают правильное описание среднего потока энергии. В классической теории электрическое и магнитное поля электромагнитного

*) Прекрасный обзор значения спиральности для живых организмов и для слабого взаимодействия, приводящего к распаду элементарных частиц дан в книге: M. Gardner, The Ambidextrous Universe, New York, 1964.

излучения являются некоей реальностью, причем квадраты величины поля определяют плотность энергии в волне.

В квантовой теории классическая плотность энергии имеет смысл произведения среднего числа фотонов в единице объема на энергию одного фотона. (Если среднее число фотонов в данном объеме меньше единицы, нужно ввести в рассмотрение вероятность нахождения фотона в данном объеме.) Квантовую теорию вы будете изучать в томе IV. Эти вводные замечания имеют целью напомнить, что результаты классической теории останутся справедливыми и в квантовой теории, если в последней классический поток энергии заменить произведением потока вероятности на энергию фотона.

*Классический атом, испускающий электромагнитное излучение.* Рассмотрим классический атом. Пусть он расположен в начале координат ($x = y = z = 0$). Движение электрона в общем случае может быть суперпозицией колебаний вдоль направлений $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ и $\hat{\mathbf{z}}$. Наблюдатель находится на оси $z$, на большом расстоянии от начала координат.

В этих условиях вклад в наблюдаемое электромагнитное излучение дает лишь движение электрона вдоль осей $x$ и $y$. Пусть в момент $t = 0$ возбуждается колебание электрона. Это возбуждение может произойти, например, в результате столкновения с другим атомом. Электрон колеблется с собственной частотой $\omega_0$, а поляризация испускаемого электроном излучения зависит от отношения амплитуд колебаний по осям $x$ и $y$ и от разности фаз этих колебаний.

Электрон не может колебаться вечно: излучая, он теряет энергию. Обозначим *среднее время жизни* возбужденного атома через $\tau$ (это время, в течение которого излучаемая мощность уменьшится в $e$ раз *)). После того, как пройдет несколько средних времен жизни, электрон потеряет бо́льшую часть своей энергии, и его последующее излучение будет пренебрежимо мало. В течение всего времени, что электрон излучает (оно порядка $\tau$), относительная фаза колебаний по осям $x$ и $y$ остается постоянной. (Мы предполагаем, что колебания по осям $x$ и $y$ происходят с одинаковой частотой $\omega_0$ и что в течение времени высвечивания атом повторно не возбуждается.) Поэтому в течение этого интервала времени поляризация испускаемого излучения остается постоянной.

Через некоторое время атом испытает второе столкновение, при этом опять будут возбуждены колебания электрона, которые представляют собой суперпозицию колебаний вдоль осей $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ и $\hat{\mathbf{z}}$, происходящих с одинаковой собственной частотой $\omega_0$ и с амплитудами и фазовыми постоянными, зависящими от начальных условий. Если наш атом находится в газе, где отсутствует какое бы то ни было выделенное направление, то мы можем считать, что практически нет никакой корреляции между амплитудами и фазами $x$- и $y$-компонент излучения в двух последовательных возбуждениях.

*) Для краткости мы будем называть его также временем высвечивания.



Поэтому поляризации излучения после первого и второго возбуждения никак между собой не связаны.

*Продолжительность состояния поляризации.* Предположим, что одновременно возбуждается много атомов. Пусть все они сосредоточены в небольшой области у начала координат $x = y = z = 0$ и наблюдатель, смотрящий на источник по оси $z$, регистрирует электромагнитные волны, которые являются суперпозицией волн, испущенных отдельными атомами. Будем называть «мгновением» интервал времени, который мал по сравнению со средним временем высвечивания $\tau$, но содержит много периодов колебаний $T = 2\pi/\omega_0$. Далее, пусть наблюдатель описывает излучение, используя понятия амплитуд $E_x$ и $E_y$ и разности фаз между колебаниями по осям $x$ и $y$. В любой момент поле $E_x$ представляет собой суперпозицию полей от колебаний всех атомов, излучающих в соответствующие моменты. То же справедливо и для $E_y$. Все атомы колеблются с одинаковой частотой $\omega_0$, но с различными амплитудами и фазовыми константами. Поэтому результирующее излучение занимает определенный частотный интервал. Несмотря на это, мы можем говорить о доминирующей частоте $\omega_0$ и об амплитуде и фазовой постоянной, которые зависят от амплитуд и фаз всех вкладов. (То же справедливо и для $E_y$.) В течение любого временного интервала, малого по сравнению с $\tau$, все колеблющиеся атомы теряют лишь небольшую часть своей энергии и фазовые постоянные остаются неизменными. Поэтому амплитуда и фазовая постоянная суперпозиции, определяющей $E_x$ (или $E_y$), не изменяются значительно в течение интервала времени, много меньшего $\tau$. *Поляризация электромагнитного излучения в течение такого интервала времени остается постоянной.* В частности, не меняется и разность фаз между $E_x$ и $E_y$. Теперь предположим, что через относительно большой интервал времени, равный многим $\tau$, мы проверяем поляризацию результирующей волны. Атомы, которые излучали (в начале интервала), теперь перестанут излучать, и их излучение будет заменено излучением новых атомов. (Не имеет значения, возбуждены ли новые атомы или снова возбуждены старые.) Движение электронов во вновь возбуждаемых атомах не связано с движением электронов в старых атомах (за исключением того, что для простоты можно считать среднюю энергию возбуждения новых и старых атомов одинаковой). Сложив $x$-компоненты излучения всех атомов, получим $x$-компоненту $E_x$ общей волны. Она должна иметь примерно такую же амплитуду, что и компонента $E_x$, полученная из старого набора возбужденных атомов. Однако фазовая постоянная нового поля $E_x$ никак не связана с фазовой постоянной старого поля $E_x$. То же справедливо и для составляющей поля по оси $y$. Далее, поскольку разность фаз движений по осям $x$ и $y$ нового набора атомов никак не коррелирована с разностью фаз движений по $x$ и $y$ для старого набора, то *«поведение» разности фаз $E_x$ и $E_y$ полностью непредсказуемо и носит характер случайного события, если наш временной интервал* $\gg \tau$.

Мы предполагали, что электрон в атоме свободно колеблется в течение времени высвечивания $\tau$ и что атом неподвижен. В этом случае частотный спектр излучения отдельного атома имеет ширину $\Delta\omega$ порядка $\tau^{-1}$. (Типичное среднее время высвечивания атома, испускающего видимый свет, имеет порядок $10^{-8}$ *сек*. Это соответствует полосе $\Delta\omega$ порядка $10^8$ *рад/сек*.) Атомы в газоразрядной трубке не находятся в покое, а движутся со скоростями порядка $10^5$ *см/сек*. Из-за эффекта Доплера это движение вызывает смещение частоты, знак которого зависит от направления движения атома относительно наблюдателя. Доплеровское смещение создает полосу частот примерно в 100 раз большую, чем естественная ширина, которая имеет порядок $\tau^{-1}$. Следует отметить, что вследствие столкновений между атомами уменьшается длительность каждого возбужденного состояния и это приводит к дополнительному расширению полосы частот.

*Время когерентности*. Учтя все факторы, увеличивающие частотный диапазон монохроматического излучения (естественная ширина линии, доплеровское расширение полосы частот и расширение из-за столкновений), мы в конце концов получим некоторую полосу $\Delta\omega$, которая будет значительно больше, чем $\Delta\omega \approx \tau^{-1}$. Таким образом, интервал времени $\tau'$, в течение которого поляризационное состояние можно считать постоянным, не равен среднему времени высвечивания $\tau$, а значительно меньше его. Назовем этот интервал *временем когерентности* $t_{\text{ког}}$:

$$\boxed{t_{\text{ког}} \approx \frac{1}{\Delta\nu}.} \qquad (60)$$

Уравнение (60) можно понимать следующим образом. Состояние поляризации остается практически неизменным, пока изменение разности фаз $E_x$ и $E_y$ мало по сравнению с $2\pi$. Поэтому время когерентности имеет порядок времени, необходимого для образования разности фаз в $2\pi$ между краями частотного диапазона:

$$\Delta\omega\, t_{\text{ког}} \approx 2\pi. \qquad (61)$$

Это выражение совпадает с выражением (60).

Существование конечной полосы частот $\Delta\omega$ не означает, что поляризация всегда будет изменяться после истечения временного интервала порядка $(\Delta\nu)^{-1}$. Действительно, между излучающими атомами и наблюдателем можно установить поляроид. В этом случае $x$- и $y$-компоненты излучения, регистрируемые наблюдателем, сохраняют постоянную разность фаз, хотя полоса осталась равной $\Delta\nu$. Это происходит потому, что при наличии поляроида $x$- и $y$-компоненты поля не независимы. Можно сказать, что поляроид «исследует» $x$- и $y$-компоненты падающего излучения и в любой момент «отбирает, чтобы пропустить», только те части этих компонент, которые будут возбуждать электроны в поляроиде вдоль оси пропускания, перпендикулярной «проводам». Та часть излучения, которая обладает такой разностью фаз колебаний по $x$ и $y$, что заставляет электроны в поляроиде колебаться вдоль «проводов», будет поглощена.



Приведем другой пример. Предположим, что мы имеем два идентичных газоразрядных источника, дающих свет с одинаковыми доминирующей частотой $\omega_0$, шириной полосы $\Delta\omega$ и средней интенсивностью. С помощью соответствующей стеклянной пластинки или зеркала мы можем добиться того, что оба источника будут казаться наблюдателю наложенными один на другой (т. е. их изображения наложатся). Свет от каждого источника распространяется в направлении $+z$ к наблюдателю. Теперь расположим перед каждым источником поляроид так, чтобы один источник давал излучение, линейно-поляризованное по $\hat{\mathbf{x}}$, и другой — излучение, линейно-поляризованное по $\hat{\mathbf{y}}$. Если наблюдатель будет измерять поляризацию в течение временного интервала меньшего, чем время когерентности $(\Delta\nu)^{-1}$, то он обнаружит определенное состояние поляризации. Если он выполнит новое определение поляризации через время большее, чем $(\Delta\nu)^{-1}$, то он обнаружит, что эти два поляризационных состояния никак друг с другом не связаны. В частности, наблюдатель найдет, что невозможно отличить это излучение от излучения, которое существовало бы с одним источником без поляроида.

*Определение понятия «неполяризованное излучение»*. Теперь мы подготовлены к тому, чтобы понять смысл утверждения, что свет не поляризован. Неполяризованный свет — это свет, две компоненты которого (например, $x$- и $y$-компоненты или компоненты с правой и левой круговой поляризацией) излучаются независимо (их фазы не связаны, например, поляроидом), а амплитуды и разность фаз обеих компонент поляризации измеряются приборами, усредняющими по временному интервалу, который велик по сравнению с временем когерентности $(\Delta\nu)^{-1}$. Не существует света, для которого «неполяризованность» была бы его «внутренним» свойством. Неполяризованный свет можно превратить в полностью поляризованный, если изобрести аппаратуру, которая позволила бы производить измерения за столь короткие интервалы времени, в течение которых разности фаз не меняются.

*Измерение поляризации*. Количественное описание «величины поляризации», под которой подразумевается величина корреляции между фазами и амплитудами, существующая в течение интервала измерения, может быть выполнено следующим образом. Предположим, что мгновенное состояние поляризации определяется параметрами $E_1$, $E_2$ и $\varphi_1$, $\varphi_2$, которые описывают, соответственно, амплитуды и фазы составляющих поля $\mathbf{E}$ по осям $x$ и $y$:

$$\mathbf{E}_c = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}(\hat{\mathbf{x}}E_1 e^{i\varphi_1} + \hat{\mathbf{y}}E_2 e^{i\varphi_2}). \qquad (62)$$

Само поле $\mathbf{E}$ является вещественной частью этого выражения. Мы можем, воспользовавшись интегралом Фурье, представить это выражение как суперпозицию строго гармонических волн, занимаю-

щих небольшой частотный диапазон. С таким же успехом выражение (62) можно рассматривать как почти гармоническую волну с доминирующей частотой $\omega_0$ и с амплитудами и фазами $E_1$, $E_2$, $\varphi_1$ и $\varphi_2$, которые не постоянны, а медленно изменяются со временем (непредсказуемым образом).

Теперь посмотрим, как получить величины $E_1$, $E_2$, $\varphi_1$ и $\varphi_2$, измеряя только интенсивность. (Слово *интенсивность* мы употребляем как синоним выражения «поток энергии».) Эта величина имеет перед многими другими то преимущество, что ее легче всего измерить. Допустим, что у нас есть поляроиды, пластинки в $^1/_4\,\lambda$ и фотоумножитель для измерения потока фотонов (число фотонов, падающих на единицу площади в одну секунду). Средний поток фотонов пропорционален среднему значению классического потока энергии, который в свою очередь пропорционален среднему за период значению квадрата электрического поля. Предположим, что известна площадь фотокатода и эффективность регистрации фотоумножителя. При этих условиях мы можем определить среднее квадратичное значение электрического поля в пучке света, падающего на фотокатод.

*Время измерения.* Назовем *временем измерения* $T$ интервал времени, в течение которого происходит измерение всех интересующих нас констант $E_1$, $E_2$, $\varphi_1$ и $\varphi_2$. Если мы хотим выполнить измерения прежде, чем состояние поляризации заметно изменится, то время $T$ должно быть мало по сравнению с временем когерентности $(\Delta\nu)^{-1}$. Мы должны действовать так, чтобы иметь возможность измерять все параметры одновременно. В этом случае время измерения $T$ будет ограничено главным образом временем разрешения нашего прибора.

Время разрешения обыкновенного фотоумножителя близко к $10^{-9}$ *сек*. С его помощью мы можем определить «мгновенную» поляризацию излучения, если время когерентности больше $10^{-9}$ *сек*, т. е. равно, например, $10^{-8}$ *сек*.

*Измерение четырех констант.* Мы не будем входить в детали нашего воображаемого опыта и объяснять, с помощью каких именно ухищрений его можно выполнить за время $T$ порядка $10^{-8}$ *сек*. Мы просто опишем принципы определения констант $E_1$, $E_2$ и $(\varphi_1 - \varphi_2)$. Следует помнить, что это долгое описание относится к измерениям, которые нужно выполнить в очень короткое время. Будем считать, что частота и направление распространения излучения нам известны и что, кроме калиброванного фотоумножителя, мы имеем идеальный поляроид и пластинку $^1/_4\lambda$. Методика определения постоянных заключается в следующем:

1. Расположим поляроид перед фотоумножителем. Произвольно выберем перпендикулярные оси $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$. Совместим ось пропускания поляроида с осью $\hat{\mathbf{x}}$ и измерим среднюю по времени скорость счета фотонов. Это измерение дает $E_1$:

$$\langle E_x^2\rangle = {}^1/_2 E_1^2. \tag{63}$$



2. Совместим ось пропускания с осью $\hat{\mathbf{y}}$ и измерим скорость счета. Это измерение дает $E_2$:

$$\langle E_y^2\rangle = {}^1/_2 E_2^2. \tag{64}$$

3. Повернем поляроид так, чтобы ось пропускания делила пополам прямой угол между осями $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$. Обозначим это направление $\hat{\mathbf{e}}$. Единичный вектор $\hat{\mathbf{e}}$ равен

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}. \tag{65}$$

Компонента электрического поля, пропускаемая поляроидом, является скалярным произведением $\hat{\mathbf{e}}$ на поле $\mathbf{E}$. Используя комплексное выражение для $\mathbf{E}_c$, получим из уравнений (65) и (62)

$$\hat{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{E}_c(z,\ t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}\left(\frac{E_1}{\sqrt{2}}e^{i\varphi_1} + \frac{E_2}{\sqrt{2}}e^{i\varphi_2}\right). \tag{66}$$

Измеряемый в этом случае поток фотонов определяет следующую величину:

$$\langle(\hat{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{E})^2\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}E_1^2 + \frac{1}{2}E_2^2 + E_1E_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right]. \tag{67}$$

Поскольку мы уже определили $E_1^2$ и $E_2^2$ ($E_1$ и $E_2$ — вещественные положительные числа) из выражений (63) и (64), то выражение (67) позволяет определить $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Чтобы определить разность фаз, надо знать и $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$. (Как правило, нас интересует именно эта разность $\varphi_1 - \varphi_2$.) Используем для этого пластинку в $^1/_4\,\lambda$:

4. Поляроид оставим в старом положении (т. е. угол между осью $\hat{\mathbf{e}}$ и осями $\hat{\mathbf{x}}$ или $\hat{\mathbf{y}}$ равен 45°). Уравнение (66) определит в этом случае прошедшее поле. Теперь впереди поляроида поставим пластинку в $^1/_4\,\lambda$ так, чтобы ее медленная ось была направлена по $\hat{\mathbf{x}}$ или $\hat{\mathbf{y}}$. Для определенности будем считать, что медленная ось направлена по $\hat{\mathbf{y}}$. В этом случае в выражении (62) для $\mathbf{E}_2$ фазу $\varphi_2$ следует заменить на $\varphi_2 - {}^1/_2\,\pi$. (Обе фазы, $\varphi_1$ и $\varphi_2$, получат постоянный сдвиг, которым мы не интересуемся.) Соответственно в уравнении (66) $\varphi_2$ заменится на $\varphi_2 - {}^1/_2\,\pi$. Теперь измерим поток фотонов, прошедший через пластинку в $^1/_2\,\lambda$ и поляроид. Выражение для потока имеет вид, подобный уравнению (67), но $\varphi_2$ заменено на $\varphi_2 - {}^1/_2\,\pi$. Таким образом, имеем

$$\langle(\hat{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{E})^2\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}E_1^2 + \frac{1}{2}E_2^2 - E_1E_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]. \tag{68}$$

Мы полностью определили $E_1$, $E_2$ и $\varphi_1 - \varphi_2$, сделав измерения, представленные выражениями (63), (64), (67) и (68). Это именно те результаты, которые можно получить, если время измерения $T$ мало по сравнению с временем когерентности.

Как мы уже говорили, если пучок света, прежде чем попасть на детектор, проходит через поляризатор (линейный или круговой), то время когерентности поляризации будет больше $(\Delta\nu)^{-1}$. Это

время будет равно бесконечности, если не убирать поляроид. В этом случае вы сможете медленно проделать все описанные выше измерения. Кстати, вместо фотоумножителя в этом случае можно использовать и глаз. Вы должны научиться определять с помощью поляроидов поляризационное состояние источника света неизвестной поляризации. Если источник дает свет с линейной, круговой или эллиптической поляризацией и его время когерентности больше, чем несколько минут, необходимых вам для измерений, то вы можете полностью определить поляризационное состояние с помощью глаза, поляроида и пластинки в $^1/_4\lambda$. (Можно использовать также круговой поляризатор и пластинку в $^1/_2\ \lambda$.)

Описанные нами измерения, необходимые для определения поляризации, являются очень общими, и в большинстве практических случаев они вряд ли необходимы. Так, например, если свет линейно поляризован, то неразумно использовать две декартовы оси $\hat{\mathbf{x}}$; $\hat{\mathbf{y}}$. В этом случае ось $\hat{\mathbf{x}}$ можно совместить с направлением поляризации, и тогда понятие разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ неуместно, так как амплитуда колебаний по $\hat{\mathbf{y}}$ равна нулю. Точно так же, если вы обнаружили, например, что свет имеет правую круговую поляризацию, то неразумно описывать его с помощью понятия о линейной поляризации (использованного в описанном выше общем случае).

*Круговой поляризатор.* Чтобы получить круговой поляризатор, нужно на линейный поляризатор (поляроид) наклеить пластинку в $^1/_4\lambda$. Ось пропускания поляроида должна образовать угол в 45° с оптическими осями пластинки в $^1/_4\lambda$. «Вход» кругового поляризатора находится со стороны поляроида, а «выход» — со стороны пластинки в $^1/_4\lambda$. Если на вход этого устройства направить неполяризованный свет от лампы, то на выходе будем иметь свет с определенной, например *левой*, спиральностью *). Таким образом, поляроид пропускает лишь ту часть излучения, которая создана круговым движением электронов, происходящим *против часовой стрелки*, если смотреть на источник света. Если после кругового поляризатора поставить пластинку в $^1/_2\lambda$, то свет с левой спиральностью превратится в свет с правой спиральностью. Аналогично, если свет с левой спиральностью отразится при нормальном падении от зеркала, он станет светом с правой спиральностью.

Круговой поляризатор можно использовать как анализатор. Он пропустит свет с такой же спиральностью (направлением вращения вектора **E**), какую он сам создает, но поглотит свет с противоположной спиральностью. Понять это можно из следующих рассуждений.

Величина и знак сдвига фазы медленной линейно-поляризованной компоненты относительно быстрой компоненты не зависят от того, в каком направлении (прямом или обратном) проходит свет через пластинку в $^1/_4\lambda$. Когда свет проходит через круговой поляроид

*) Здесь и дальше имеется в виду определение левой и правой круговой поляризации, принятое в оптике (правило винта).



в прямом направлении, то система из линейного поляроида и следующей за ним пластинки в $^1/_4\lambda$ образует свет, поляризованный по кругу, с направлением вращения вектора **E** от оси $\hat{\mathbf{f}}$ к оси $\hat{\mathbf{s}}$. Если этот свет отражается от зеркала, то направление вращения **E** относительно оси, фиксированной в пространстве, остается неизменным (по закону сохранения момента импульса). Когда этот отраженный свет проходит в обратном направлении через пластинку в $^1/_4\lambda$, то между линейными компонентами возникает добавочное отставание по фазе на 90°. Таким образом, свет, распространяющийся в обратном направлении, прошедший через пластинку в $^1/_4\ \lambda$ и падающий на линейный поляроид, будет линейно поляризован в направлении, составляющем 90° с первоначальным направлением вдоль оси пропускания линейного поляроида. Действительно, одна линейная компонента изменила свой знак (т. е. фазу — на 180°), а вторая осталась неизменной. Поэтому (отраженный) свет, распространяющийся в обратном направлении, поглощается. Это объясняет, почему блестящая поверхность зеркала или металла, накрытая круговым поляризатором (линейный поляроид вверху), выглядит темной (более точно, темно-синей). Зеркало меняет спиральность. Аналогично, любой свет с правой спиральностью поглощается вашим круговым поляроидом (из которого выходит свет с левой спиральностью), если он падает на него со стороны выхода, т. е. со стороны пластинки в $^1/_4\lambda$. С другой стороны, когда на выход кругового поляроида (придающего свету левую спиральность) падает свет с левой спиральностью, то пластинка в $^1/_4\lambda$ уменьшает разность фаз между $\hat{\mathbf{s}}$- и $\hat{\mathbf{f}}$-компонентами до нуля ($\hat{\mathbf{s}}$-компонента до пластинки опережала на 90° $\hat{\mathbf{f}}$-компоненту). Поэтому, когда свет достигает линейного поляроида, $\hat{\mathbf{s}}$- и $\hat{\mathbf{f}}$-компоненты — в фазе и свет полностью проходит через поляроид, не теряя интенсивности (как всегда пренебрегаем малыми потерями на отражение).

Рассмотрим пример. Допустим, что вы смотрите на источник света через поляроид. Вращение поляроида относительно линии наблюдения не меняет интенсивности. Далее, предположим, что вы смотрите на источник через круговой поляризатор (перевернутый); интенсивность не меняется. (Какой вывод вы можете сделать на этом этапе?) Теперь расположите пластинку в $^1/_2\lambda$ между источником и круговым поляризатором и повторите вращение. Вы увидите, что свет полностью поглощается. Вывод: это свет с левой спиральностью. (Напомним, что ваш круговой поляризатор дает свет с левой спиральностью.)

*Пластинка в четверть длины волны и в половину длины волны.* Возьмите одну из двух пластинок прозрачного пластика из оптического набора *). Сложите вместе линейный поляроид и выбранную пластинку так, чтобы край поляроида составлял с краем пластинки угол в 45°. Посмотрите через эту систему на источник света

*) Читателю придется самому изготовить пластинки $^1/_4\ \lambda$ и $^1/_2\ \lambda$, так как к этой книге оптический набор не приложен. См. задачи 8.10 и 8.11. *(Прим. ред.)*

или небо (поляроид обращен к источнику света). Поместите второй поляроид с другой стороны пластика. Вращайте второй поляроид. Повторите тот же опыт с другой пластинкой пластика. Какая из них пластинка в $^1/_4\,\lambda$ и какая в $^1/_2\,\lambda$? Повторите опыт, когда край пластинок из прозрачного пластика параллелен краю поляроидов.

На пластине, из которой была вырезана ваша пластинка в $^1/_4\,\lambda$, не было написано: «задержка в $^1/_4\,\lambda$». Вместо этого на пластине было написано: «величина задержки $(140 \pm 20)$ *нм*. ($1\ нм = 10^{-9}\ м = 10^{-7}\ см = 10$ Å.) Таким образом, задержка равна 1400 Å. Это одна четверть длины волны, равной $4 \cdot 1400$ Å $= 5600$ Å (т. е. зеленый свет).

Постараемся понять, что значит приведенное выше обозначение. Относительная задержка по фазе $\Delta\varphi$ между $s$- и $f$-компонентами, проходящими через задерживающую пластинку толщины $\Delta z$ с показателями $n_s$ и $n_f$, равна

$$\Delta\varphi = 2\pi\,(n_s - n_f)\,\frac{\Delta z}{\lambda}\,. \tag{69}$$

Для пластинки в $^1/_4\lambda$ фазовая задержка соответствует $^1/_4$ цикла, т. е. $\pi/2$ *рад*. Должно выполняться равенство

$$(n_s - n_f)\,\Delta z = {}^1/_4\lambda. \tag{70}$$

Приведенное выше обозначение пластины (из которой вырезалась ваша пластинка) указывает, что $(n_s - n_f)\Delta z$ равно $^1/_4\,\lambda_0$, где $\lambda_0 = 5600$ Å. Эта «пространственная задержка» *не зависит* от $\lambda$ (в большей части видимого диапазона длин волн). Это означает, что с достаточной точностью можно считать, что $n_s - n_f$ не зависит от длины волны. Для произвольной длины волны (видимого света) имеем

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}\,\frac{5600\,\text{Å}}{\lambda}\,. \tag{71}$$

Аналогично для пластины в $^1/_2\,\lambda$ имеем величину задержки $(280 \pm 20)$ *нм*.

*Неполяризованный свет*. Пытаясь определить с помощью набора поляроидов поляризацию света от лампы, вы обнаружите, что линейный поляроид не изменяет интенсивности проходящего света при любом угле поворота вокруг линии наблюдения. Точно так же не происходит изменения интенсивности, когда пластинка в $^1/_4\,\lambda$ помещена между источником и поляроидом. Разложим поле, создаваемое источником, на линейно-поляризованные колебания, направленные по осям $x$ и $y$, и выразим результат нашего опыта через уравнения (63), (64), (67) и (68) (черта над измеряемыми величинами указывает на то, что измерения производятся в течение «времени измерения» $T$):

$$\frac{1}{2}\overline{E_1^2} = \frac{1}{2}\overline{E_2^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\overline{E_1^2} + \frac{1}{2}\overline{E_2^2} + \overline{E_1 E_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\overline{E_1^2} + \frac{1}{2}\overline{E_2^2} - \overline{E_1 E_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}\right]. \tag{72}$$



Другими словами, для любого выбора осей $x$ и $y$ средняя во времени величина $E_x^2$ равна средней во времени величине $E_y^2$ и средняя во времени величина $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ и $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ равна нулю. Конечно, не существует угла $\varphi_1 - \varphi_2$, обладающего свойством, что его sin и cos оба равны нулю. Существенным в уравнении (72) является черта, которая указывает, что берется среднее за время $T$. Причина того, что среднее значение $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ и $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ равно нулю, заключается в том, что разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ за длительный интервал времени $T$, в течение которого мы делаем измерения, меняется случайным образом. Она принимает все значения от $-\pi$ до $+\pi$. И sin и cos за время $T$ бывают положительными так же часто, как и отрицательными, и в среднем дадут нуль.

Если бы мы могли выполнить измерения за $10^{-10}$ *сек* (это время измерения $T$, характерное для газоразрядного источника с доплеровским расширением линии), результаты были бы иными. Мы бы нашли, что свет полностью поляризован в любой «момент» времени. Под «моментом» мы понимаем интервал времени, за который происходит много колебаний, но который мал по сравнению с временем когерентности $(\Delta\nu)^{-1}$.

При помощи «пружины» можно получить механический аналог неполяризованного света. Возбудим «пружину», потряхивая ее конец то в одном, то в другом направлении. Предположим, что нами сделана фотография с экспозицией в $T$ *сек*. Если $T$ мало по сравнению с интервалом между последовательными возбуждениями, то фотография обнаружит полную поляризацию. Если $T$ велико, то на фотографии будет видно изображение неполяризованных колебаний.

*Частичная поляризация*. Если $T$ не мало и не велико по сравнению с временем когерентности, излучение называется *частично поляризованным*. В этом случае имеется некоторое ощутимое различие между результатами четырех измерений, определяющих $\overline{E_x^2}$, $\overline{E_y^2}$, $\overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ и $\overline{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$. Существует много разных способов выражения того факта, что за время $T$ часть поляризации «размывается». Например, можно ввести понятие о «частичной поляризации $P$»:

$$P^2 \equiv [\overline{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}]^2 + [\overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}]^2, \tag{73}$$

где $\overline{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$ и $\overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ определяются по измерениям интенсивности, дающим результаты, представленные уравнениями (63), (64), (67) и (68). Если $T$ мало по сравнению с временем когерентности, то $P$ равно 1; если $T$ велико по сравнению с этим временем, то $P$ равно нулю. Для промежуточных значений $T$ $P$ лежит между нулем и единицей. Однако, чтобы полностью определить колебание, мы, как и прежде, должны измерить четыре константы.

**8.1.** В п. 8.2 после формулы (20) намечен ход вычислений, показывающих, что смещение $\psi(t)$ представляет собой в неявном виде уравнение эллиптической траектории. Выполните эти вычисления.

**8.2.** Неполяризованный свет от ртутной разрядной трубки проходит через зеленый фильтр. Следующие за фильтром щели и линзы формируют параллельный пучок света, распространяющийся по направлению оси $+z$. Начало пучка будем отсчитывать от точки $z=0$. При $z=100$ расположен фотоумножитель, регистрирующий фотоны пучка. Его средняя скорость счета равна 64 отсчетам в минуту ($R=64$).

а) В точке $z=10$ поместим пластинку $^1/_4\,\lambda$, быстрая ось которой параллельна $\hat{\mathbf{x}}$. Чему теперь равно $R$? (Небольшими потерями из-за отражения и т. п. пренебрегаем.)

б) В точке $z=20$ мы помещаем линейный поляризатор, ось которого направлена параллельно вектору $(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$. Чему теперь равно $R$? (Замечание. Помещая в пучок новый прибор, мы оставляем старые на месте. Координата $z$ указывает последовательность размещения приборов в пучке, $z=0$ отвечает началу пучка.)

в) Поместим в $z=30$ пластинку $^1/_2\,\lambda$. Чему равно $R$?

г) Поместим в $z=40$ линейный поляризатор, ось которого параллельна $\hat{\mathbf{x}}$. Чему равно $R$?

д) Поместим в $z=50$ левый круговой поляризатор. Чему равна максимальная и минимальная скорость счета $R$? (Она зависит от ориентации поляризатора в пучке.)

е) Пусть левый поляризатор в $z=50$ ориентирован для получения максимальной интенсивности. Поместим в $z=60$ пластинку $^1/_2\,\lambda$, быстрая ось которой параллельна оси $(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$, а в точку $z=70$ — линейный поляризатор, ось которого параллельна $\hat{\mathbf{y}}$. Чему равно $R$?

**8.3.** Поляризованный по кругу свет, интенсивность которого $I_0$ (интенсивность равна потоку энергии через единицу площади в единицу времени; она пропорциональна при данной частоте света выходному току фотоумножителя), падает на поляроид. Покажите, что интенсивность на выходе поляроида равна $I_0/2$.

**8.4.** Линейно-поляризованный свет с направлением поляризации, составляющим угол $\theta$ с осью $\hat{\mathbf{x}}$, падает на поляроид, ось которого параллельна $\hat{\mathbf{x}}$. За первым поляроидом стоит второй, у которого ось параллельна поляризации падающего пучка света. Покажите, что интенсивность на выходе этой системы равна $I_0\cos^4\theta$, если интенсивность на входе $I_0$.

**8.5.** Поляризованный по кругу свет, имеющий интенсивность $I_0$, падает на стопку из трех поляроидов. Первый и последний поляроиды скрещены (т. е. их оси перпендикулярны), а ось среднего поляроида образует угол $\theta$ с осью первого. Покажите, что интенсивность на выходе равна $^1/_2\,I_0\cos^2\theta\sin^2\theta$.

**8.6.** Очень большое число $(N+1)$ поляроидов уложено в стопку. Ось каждого последующего поляроида составляет угол $\alpha$ с осью предыдущего, так что ось последнего поляроида образует с осью первого угол $\theta=N\alpha$. Пренебрегая потерями на отражение, найдите интенсивность на выходе, если на вход стопки падает линейно-поляризованный свет, направление поляризации которого параллельно оси первого поляроида. Полагая угол $\alpha$ очень малым, получите приближенное решение, ограничившись двумя первыми членами разложения в ряд Тейлора.

Ответ. $I=I_0\left(1-\dfrac{\theta^2}{2N}+\text{члены более высокого порядка}\right)$. Этот результат означает, что даже при $\theta=90°$ (первый и последний поляроиды скрещены) выходная интенсивность будет почти равна входной, если число поляроидов велико. С помощью такого устройства можно плавно поворачивать плоскость поляризации. Склеим наш поляроид клеем, показатель преломления которого равен показателю преломления самого поляроида. Этим мы уменьшим до минимума потери на отражение и получим нечто подобное гигантской молекуле сахара, которая вращает плоскость поляризации, не поглощая энергии.



Другой способ получения «оптической активности в макроскопическом масштабе» заключается в том, чтобы расположить тонкие листы фольги по спирали штопора, погрузив их для этого в пенопласт (хорошее приближение к жесткой, безмассовой среде, не имеющей свободных электронов). Такое устройство будет вращать плоскость поляризации микроволн, проходящих через него.

**8.7.** Имеем пучок света, линейно-поляризованный по оси $\hat{\mathbf{x}}$, но нам нужен свет, плоскость поляризации которого составляет с этой осью угол 30°, т. е. свет, поляризованный по направлению

$$\hat{\mathbf{e}}=\hat{\mathbf{x}}\cos 30°+\hat{\mathbf{y}}\sin 30°.$$

Как получить такой свет: а) ценой некоторой потери интенсивности; б) без потери интенсивности, не пользуясь поляроидом?

**8.8.** Чему равна интенсивность света на выходе устройства, состоящего из скрещенных поляроидов с пластинкой $^1/_2\,\lambda$ между ними, если на вход падает неполяризованный свет с интенсивностью $I_0$ и а) медленная оптическая ось пластинки параллельна оси одного из поляроидов, б) оптические оси пластинки образуют угол 45° с осями поляроидов?

**8.9.** Ответьте на вопрос задачи 8.8, если между поляроидами помещена пластинка $^1/_4\,\lambda$.

**8.10.** Опыт. Испытайте различные пластики (линейка, целлофан, лента скотча и т. п.) на двойное преломление, поворачивая их между скрещенными поляроидами. Допустим, что вам посчастливится найти среди этих веществ пластинку в $^1/_4\,\lambda$ или $^1/_2\,\lambda$. Как вы это узнаете? Попытайтесь создать с помощью растяжения двойное преломление в целлофане, употребляемом для обертки.

**8.11.** Опыт. *Пластинка $^1/_4\,\lambda$ из целлофана.* Достаньте ролик целлофана, употребляемого для обертки пищевых продуктов; 7—8 слоев такого целлофана образуют хорошую пластинку $^1/_4\,\lambda$. Ее можно «настроить» для различных цветов спектра, добавляя или удаляя по одному слою. Например, если 7 слоев являются хорошей пластинкой $^1/_4\lambda$ для $\lambda=5600$ Å (зеленый цвет), то добавление восьмого слоя произведет сдвиг к волне $\lambda=\dfrac{8}{7}\,(5600)=6400$ Å (красный цвет). Чтобы избежать морщин, слои можно приклеить к картонной рамке *).

**8.12.** Опыт. *Зависимость замедления, создаваемого пластинкой, от цвета.* Пластинка $^1/_2\,\lambda$ соответствует своему названию только для определенной длины волны. В вашем оптическом наборе пластинка $^1/_2\,\lambda$ предназначена для $\lambda=5600$ Å. Возьмите яркий источник белого света (например, 150-ваттную осветительную лампу с прозрачным баллоном и нитью в виде спирали около 2,5 *см* длиной и диаметром около 1 *мм*). Смотрите на лампу через дифракционную решетку. Ориентируйте решетку так, чтобы цветные полосы были перпендикулярны нити лампы. Этим вы улучшите разрешение. Теперь возьмите два параллельных поляроида. Поместите между ними пластинку $^1/_2\,\lambda$, оптическая ось которой составляет угол 45° с параллельными осями поляроидов. Теперь тот цвет, для которого пластинка $^1/_2\,\lambda$ поворачивает плоскость поляризации на 90°, будет поглощен вторым поляроидом. Смотрите через собранную вами стопку на дифракционную решетку (держите все устройство близко к глазу). Замечаете ли вы черную полосу в том месте, где должен быть зеленый цвет? Эта часть спектра соответствует $\lambda\sim5600$ Å! (Замечание. Чтобы настроиться на максимум черноты в полосе поглощения, слегка поверните последний поляроид.)

**8.13.** Опыт. *Пластинка $^1/_2\,\lambda$ из целлофана.* Сделайте пластинку $^1/_2\,\lambda$, описанную в опыте 8.11. В ней будет 12—15 слоев. Для «настройки» пластинки можно использовать метод, описанный в предыдущем опыте. Таким образом вы можете определить величину $(n_s-n_f)\,\Delta z$ для одного слоя.

---

*) Для опытов, описанных в этой главе, очень важно иметь пластинки $^1/_4\,\lambda$, $^1/_2\,\lambda$ и круговой поляризатор. Поэтому обращаем внимание читателя, что хорошие пластинки $^1/_4\,\lambda$ и $^1/_2\,\lambda$ легко изготовить, имея листок слюды, также обладающий свойством двойного лучепреломления. См., например, Р. В. Поль, Введение в оптику, Гостехиздат, 1947, стр. 189 и дальше. *(Прим. ред.)*

**8.14.** Опыт. *Поляризация «пружины».* Возьмите один конец «пружины», а другой возьмет ваш товарищ.

а) Пусть каждый из вас вращает «пружину» по часовой стрелке (со своей стороны). Этот опыт покажет вам, что линейная поляризация является суперпозицией круговых поляризаций противоположного направления.

б) Пусть один из вас создаст в «пружине» колебания, направленные под углом 45° к горизонту, а другой — колебания под углом 90° к первым колебаниям. Для облегчения этой задачи вы можете двигать руку по краю книги (угол в 45° взят для того, чтобы уменьшить асимметрию колебаний, вызываемую силой тяжести). Пусть один из вас громко считает: «1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, ...» — с периодом повторения, равным циклу колебаний или половине цикла, а другой вызывает колебания со сдвигом фаз, равным нулю или 180° или 90°.

в) Теперь закрепите один конец, а с другого пошлите состоящий из одного или двух оборотов волновой пакет поляризованных по кругу колебаний. Проверьте, что после отражения выполняется закон сохранения момента импульса. Покажите, что если момент импульса совпадает с направлением распространения, то форма «пружины» подобна левому винту, и что отражение меняет спиральность.

**8.15.** Опыт. *Прозрачная целлофановая лента в качестве пластинки* $^1/_2\lambda$. Закрепите слой прозрачной целлофановой ленты на предметном стекле микроскопа (которое служит механической опорой). С помощью метода, описанного в опыте 8.12, проверьте, может ли этот слой быть пластинкой $^1/_2\lambda$. Оцените величину $(n_x - n_y)\,\Delta z$.

**8.16.** Опыт. *Исследование поляризации с помощью прозрачной целлофановой ленты.* Наложите один на другой 16 слоев прозрачной целлофановой ленты (скотча). В качестве подложки можно использовать предметное стекло. Пузырьки воздуха мешают смотреть через слои, и, если вам не удастся изгнать их разглаживанием, можно воспользоваться каким-нибудь прозрачным маслом. Положите на стол стекло, капните на него маслом. Отрежьте кусок скотча, длиннее стекла на несколько сантиметров. Положите скотч на стекло, добившись хорошего контакта, а выступающие края ленты скотча временно прикрепите к столу. Снова капните маслом в центр скотча. Положите второй слой пленки и т. д., чередуя слои масло—пленка. Поверх последнего слоя скотча положите второе стекло. Все это сооружение можно по краям закрепить лентой скотча. Итак, вы получили стопку, состоящую из 16 слоев скотча между двумя предметными стеклами. Она должна быть достаточно чистой и прозрачной, чтобы через нее можно было смотреть.

Теперь перейдем к самому опыту. К одной поверхности стопки прикрепите полярoид (так, чтобы его ось составляла 45° с осью ленты скотча) и дифракционную решетку. Смотрите через это устройство на широкий источник белого света, поместив на выходе устройства (между ним и глазом) второй полярoид, ось которого параллельна оси первого.

а) Обратите внимание на несколько черных полос! Они соответствуют линейно-поляризованному свету, который поглощается вторым полярoидом. Соседние черные полосы разделены по фазе на $2\pi$ (имеется в виду фаза линейно-поляризованных компонент по быстрой и медленной оси ленты).

«Яркие» области спектра между двумя соседними черными полосами имеют относительные фазы, изменяющиеся от 0 до $2\pi$. В этих областях поляризация проходит через все состояния, схематически показанные на рис. 8.3, п. 8.2.

б) Поверните второй, анализирующий, полярoид на 90°. Черные области станут яркими, и наоборот! Почему?

в) Замените анализирующий полярoид круговым поляризатором, используя его как анализатор, т. е. обратив его выход к источнику света. (Положите круговой поляризатор на блестящую монету. Если монета будет казаться темно-синей, то входная сторона смотрит на вас.)

г) Расположите полярoид и круговой поляризатор рядом, так чтобы поле зрения было разделено между ними. Они должны быть параллельны первому поляризатору, ось которого составляет угол в 45° с осью ленты скотча. Смещайте все устройство таким образом, чтобы смотреть сначала через круговой, затем через линейный поляризатор. Вы замечаете, что полосы смещаются на четверть



расстояния между ними (т. е. происходит сдвиг по фазе на $\pi/2$). Теперь поверните линейный поляризатор и повторите опыт. Направление смещения полос при переходе от кругового поляризатора к полярoиду изменится. Это показывает, что поляризация меняется (например) от линейной «вверх направо» к правой круговой, затем к линейной «вверх влево», к левой круговой, к линейной «вверх вправо» при изменении сдвига фаз от 0 до $2\pi$. Нарисуйте график зависимости поляризации от цвета (длины волны), обозначив линейную поляризацию стрелкой, а круговую — круговой стрелкой.

**8.17.** Опыт. *Прозрачная целлофановая лента — полярoидный фильтр.* (Этот опыт требует четырех полярoидных пленок.) Кроме задерживающей пластинки из 16 слоев скотча, описанной в опыте 8.16, сделайте аналогичные стопки из 8 и 4 слоев. Для краткости обозначим эти стопки 16СП (16-слойная пластинка), 8СП и 4СП, а полярoид обозначим буквой П, и пусть П (45°) означает, что ось полярoида составляет 45° с осью пластинки. Дифракционную решетку будем обозначать ДР. Проделаем следующие опыты.

а) Выстроим ряд ДР; П (45°); 16СП; П (45°). Посмотрите через этот ряд приборов на линейный источник белого света (это опыт 8.16). Теперь повторите опыт, заменив стопку 16СП на стопку 8СП.

б) Добавьте 8СП и еще один П к выходу ряда а), чтобы получить ряд ДР; П(45°); 16СП; П (45°); 8СП; П (45°). Посмотрите на источник.

в) Теперь поставьте 4СП; П (45°) на выход б) и снова посмотрите на источник. Заметьте, что с помощью системы последовательных фильтров вы устранили все боковые полосы и создали фильтр, пропускающий определенную полосу (чтобы сделать картину более ясной, вы можете воспользоваться цветными фильтрами). Ширина полосы определяется пластинкой 16СП. Если вы захотите уменьшить полосу пропускания в два раза, вам придется взять 32СП. Пластинки, сделанные с помощью прозрачного минерального масла, все же позволяют смотреть через них без больших затруднений.

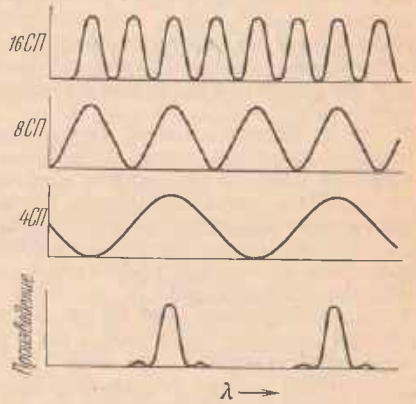



Рис. к задаче 8.17. Фильтр.
Кривая 16СП дает интенсивность прошедшего света для последовательности фильтров П (45°); 16СП; П (45°). Если вместо фильтра 16СП поставить фильтры 8СП или 4СП, мы получим кривые 8СП и 4СП соответственно. При полном наборе фильтров кривая пропускания является произведением трех кривых, что показано на рисунке.

Фильтры рассмотренного типа были предложены Лайо в 1932 г. Астрономы, работающие с такими фильтрами, используют кварцевые задерживающие пластинки вместо слоев скотча. В типичных случаях они имеют полосу шириной 1 Å, центрированную, например, на линии бальмеровской серии водорода (длина волны $\lambda_{H_\alpha} = 6563$ Å). Такие фильтры применяют для фотографирования Солнца. Полная интенсивность света, прошедшего через фильтр, пропорциональна произведению интенсивностей для фильтров 16СП, 8СП и 4СП (последовательность не играет роли). Это показано на рисунке.

Вопрос. Объясните, почему полная интенсивность проходящего света равна произведению интенсивностей кривых пропускания индивидуальных фильтров. Почему (например) нельзя сложить три амплитуды от трех фильтров (когда присутствует один из них), затем возвести сумму в квадрат и усреднить по времени?

**8.18.** Опыт. *Круговой поляризатор.*

а) Наложите круговой поляризатор на алюминиевую фольгу, или на обыкновенное зеркало, или на полированное лезвие ножа. Поверните поляризатор, чтобы поверхность фольги казалась «черной» или темно-синей. Переверните поляризатор и посмотрите снова. (Произведите те же операции с полярoидом.) Перевер-

ните его в «черное» положение. Сдвиньте поляризатор в сторону так, чтобы свет падал на металл, минуя круговой поляризатор. Смотрите на «тень» (или «изображение») поляризатора, возникающую при медленном его сдвиге и возвращении. Объясните то, что вы видите.

б) Сделайте на поверхности фольги V-образную царапину. Пусть бо́льшая часть света приходит с определенного направления (лампа, окно). Положите круговой поляризатор на фольгу так, чтобы он частично лежал на царапине и частично на чистой поверхности фольги. Заметьте, что теперь царапина кажется яркой, тогда как остальная часть фольги по-прежнему выглядит темной. Объясните это! (Указание. Когда вы смотрите на правую руку в зеркало, она выглядит как левая. Как она будет выглядеть в «двойном» зеркале, образованном двумя зеркалами, поставленными под прямым углом друг к другу?)

в) Теперь возьмите фольгу и скомкайте ее, чтобы создать «грубую» поверхность. Положите на нее круговой поляризатор и смотрите с близкого расстояния. Объясните то, что вы видите. Объясните следующие утверждения:

1. «Свет деполяризован в большом масштабе и полностью поляризован в малом».

2. «Это в какой-то степени аналогично деполяризации света в большом масштабе времени и полной его поляризации в достаточно малой шкале времени».

г) Положите круговой поляризатор на кусок обычной белой бумаги. Можете ли вы в этом случае отличить круговой поляризатор от поляроида? Объясните.

д) Снова положите круговой поляризатор на поверхность металла. Между поверхностью и поляризатором поместите пластинку $^1/_2\,\lambda$. Сперва предскажите, что вы ожидаете увидеть, а затем посмотрите. Повторите опыт с пластинкой $^1/_4\,\lambda$. (Замечание. Каждому цвету отвечает, как известно, своя задержка. Вы можете увеличить эффект с помощью зеленого фильтра. В этом нет необходимости, если вы помните, что выражение «черный» является в данном случае приближенным.)

**8.19.** *Момент импульса света.* Правополяризованный свет падает на поглощающую пластинку, которая подвешена на вертикальной нити. Свет падает снизу вверх на нижнюю поверхность пластинки.

а) Пусть длина волны света равно 5500 Å, средняя мощность пучка 1 *вт* и пластинка полностью поглощает падающий свет. Какой момент силы действует на пластину (дайте ответ в *дин·см*)? Вспомните, что момент силы равен скорости изменения момента импульса и что пластина поглощает момент импульса падающего на нее излучения.

б) Предположим, что вместо поглощающей пластинки на нити подвешено обычное посеребренное зеркало, так что свет отражается обратно под углом 180°. Чему равен закручивающий момент в этом случае?

в) Предположим, что на нити подвешена прозрачная пластинка $^1/_2\,\lambda$. Свет проходит через нее (ничего не задевая). Чему равен крутящий момент? (Пренебрежем отражениями от поверхности.)

г) Верхняя поверхность пластинки из в) посеребрена, так что свет проходит через пластинку, отражается от зеркальной поверхности и возвращается обратно через пластинку. Чему равен крутящий момент?

д) На нити подвешена прозрачная пластинка $^1/_2\,\lambda$. Над ней закреплена (т. е. не связана с пластинкой) пластинка $^1/_4\,\lambda$, верхняя поверхность которой посеребрена. От этой поверхности свет отражается обратно. Чему равен крутящий момент, действующий на первую пластинку $^1/_2\,\lambda$?

е) Как получить наибольший крутящий момент?

ж) Пусть период свободных крутильных колебаний подвешенной на нити пластинки равен 10 *мин*. Придумайте опыт, который позволил бы «усилить» действие крутящего момента и измерить вращение пластинки. (Укажите идею, оставляя в стороне подробности.) Прочтите описание соответствующего опыта[*]).

**8.20.** Опыт. *Поляризация при рассеянии.*

а) Введите несколько капель молока в стеклянный кувшин с водой. Пропустите через жидкость пучок света от карманного фонаря. Смотрите на свет, рассеянный «молекулами молока». Исследуйте поляризацию рассеянного света с помощью поляроида. Сделайте это для рассеяния на 90° (угол между направлениями пучка и рассеянного света равен 90°), для рассеяния на малые углы (около 0°) и на большие углы (около 180°). (Замечание. Вам следует каким-то образом отметить направление оси пропускания поляроида. Это направление можно найти, наблюдая за светом, зеркально отраженным от стекла, деревянного или пластмассового пола, окрашенной поверхности при угле падения около 45°. Такой угол достаточно близок к углу Брюстера.)

б) Создайте линейную поляризацию света от вашего осветителя. Коллимируйте свет с помощью картонного экрана так, чтобы сечение пучка было меньше площади поляроида, и смотрите на рассеянный свет с различных направлений в плоскости, перпендикулярной пучку (или, наблюдая под углом в 90°, вращайте поляроид).

в) Изучите рис. 8.6. Определите степень поляризации с помощью следующего выражения:

$$P=\frac{I(\hat{x})-I(\hat{y})}{I(\hat{x})+I(\hat{y})},$$

где $I(\hat{x})$ — интенсивность рассеянного света, поляризованного по $\hat{x}$, а $I(\hat{y})$ — интенсивность рассеянного света, поляризованного по $\hat{y}$. Покажите, что величина $P$ следующим образом зависит от угла рассеяния $\theta$ (см. рис. 8.6):

$$P=\frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}.$$

Заметим, что $P=0$ при рассеянии на 0° или 180° и $P=1$ при рассеянии на 90°.

г) Добавьте немного молока. Пучок приобретает белую окраску. Наблюдайте за поляризацией под углом 90°, где она максимальна. Добавьте молока. Объясните результат. Можно ли ожидать, что свет, отраженный от белых облаков, будет поляризован? Проверьте ваше утверждение на опыте.

**8.21.** Опыт. *Поляризация света радуги.* Поляризован ли этот свет? Вместо радуги проще исследовать искусственную радугу, созданную рассеянием света на брызгах струи фонтана или струи из садового шланга.

**8.22.** *Лунный и земной свет.* Когда Луна кажется «наполовину полной», ее освещенная часть рассеивает солнечный свет к нашему глазу под углом, приблизительно равным 90°. Мы знаем, что при таком угле рассеяния свет голубого неба поляризован почти полностью. Можно ли думать, что свет Луны будет почти линейно поляризован? Проверьте ваше предсказание на опыте. Теперь подумайте, как «наполовину полная» Земля будет выглядеть с Луны. Будет ли поляризован земной свет?

Ответ. Иногда, это зависит от времени и погоды. Почему?

**8.23.** Пучок линейно-поляризованного света падает на пластинку $^1/_2\,\lambda$, которая вращается вокруг оси пучка со скоростью $\omega_0$. Покажите, что свет на выходе линейно поляризован и что направление поляризации вращается с частотой $2\omega_0$.

**8.24.** Опыт. Смотрите на осветительную лампу через поляроид. Поляризован ли свет лампы? Теперь поместите между лампой и поляроидом кусок целлофана (или пластинку $^1/_4\,\lambda$ или $^1/_2\lambda$). Поляризован ли свет теперь? Отразите свет лампы, например, от поверхности ножа. Поляризован ли отраженный свет?

**8.25.** Опыт. *Измерение показателя преломления по углу Брюстера.* Для опыта нам нужна лампа (ее можно закрыть картонной рамкой со щелью, чтобы уменьшить размеры источника), кусок стекла, стол, картонный ящик или что-нибудь в этом роде, чтобы вы могли фиксировать положение глаз, и поляроид. Положите кусок стекла на стол и найдите в нем отражение лампы. (Вы увидите два отражения — одно от верхней, другое от нижней поверхности стекла. Второе отражение можно убрать, выкрасив нижнюю поверхность черной краской или просто наклеив на нее ленточку матового скотча, которую нужно хорошо разгладить для удаления пузырьков воздуха.) Передвигая стекло по поверхности стола, меняйте угол падения света до тех пор, пока поляроид не покажет вам, что отраженный свет полностью поляризован. Измерьте угол падения света и получите показатель преломления по формуле Брюстера $\operatorname{tg}\theta_B=n$. В этом грубом опыте

[*]) R. A. Beth, Phys. Rev. **50**, 115 (1936).

угол измеряется с точностью в несколько градусов, но все же вам, возможно, удастся обнаружить различие в угле Брюстера для стекла и спокойной поверхности воды.

**8.26.** Опыт. *Фазовые соотношения при зеркальном отражении света от стекла.* Попытаемся проверить соотношения, показанные на рис. 8.8. Кроме предметов, использованных в опыте 8.25, нам нужен еще один поляроид, который мы поместим между источником света и лежащим на столе стеклом. Ось пропускания этого поляроида должна составлять угол 45° с горизонталью. (Совет. Удобно сделать так: воткните угол поляроида в пластилин или просто замазку, положив ее на предметное стекло микроскопа, поверхность которого и будет отражающей поверхностью.) Будем смотреть на поверхность стекла так, чтобы видеть источник света через первый поляроид. Предположим, что ось пропускания поляроида направлена от «направо вверх» к «налево вниз». Будем менять угол падения света (передвигая по столу стекло с поляроидом или лампу) и для каждого угла произведем с помощью второго поляроида анализ поляризации отраженного света. Вы обнаружите, что, когда угол падения близок к нулю (почти нормальное падение), отраженный свет поляризован в направлении от «налево вверх» к «направо вниз». По мере перемещения стекла и приближения угла падения к углу Брюстера поляризация остается линейной, но ее направление поворачивается к горизонтальному. Оно становится горизонтальным при угле Брюстера и продолжает свой поворот при переходе от угла Брюстера к скользящему падению, приобретая направление от «вниз налево» к «вверх направо». Таким образом, при переходе от нормального к скользящему падению направление поляризации поворачивается на 90°, как предсказывает рис. 8.8. (При нормальном падении условия отражения обеих компонент, вследствие симметрии, почти совпадают, и поэтому направление поляризации соответствует 45°. При скользящем падении обе компоненты отражаются почти полностью и опять находятся в разных условиях. Поэтому поляризация снова отвечает углу в 45°.) Интересно отметить, что поляризация при всех углах падения остается линейной. Это значит, что между компонентами поля, лежащими в плоскости падения и перпендикулярными к ней, нет других сдвигов фаз, кроме 0° и 180°. Таким образом, при отражении падающей волны импеданс оказывается чисто активным. Этого и следует ожидать при отражении от прозрачной поверхности.

**8.27.** Опыт. *Изменение фазы при отражении от металла.* Этот опыт похож на опыт 8.26, но вместо стекла нужно взять металл с ровной блестящей поверхностью, например пластинку безопасной бритвы, или кухонный широкий нож, или любой хромированный или посеребренный предмет. Вам нужны два поляроида и пластинка $^1/_4\lambda$. Вначале проверьте, что свет, поляризованный параллельно или перпендикулярно плоскости падения, сохраняет свою поляризацию после отражения. (Действие поверхности в этом случае аналогично действию задерживающей пластинки на свет, поляризованный параллельно или перпендикулярно ее осям: пластинка никак не влияет на поляризацию.) Повернем поляроид так, чтобы падающий свет оказался поляризованным под углом 45° к плоскости падения. Установите такой угол падения, при котором источник света находился бы на расстоянии 30 *см* от стола, а металлическая поверхность — на расстоянии примерно метра от источника. Теперь анализируйте отраженный свет с помощью поляроида и пластинки $^1/_4\lambda$ (или с помощью кругового поляризатора, используемого как анализатор). Вы обнаружите эллиптическую поляризацию. Меняя угол падения, можно найти место, где отраженный свет имеет почти круговую поляризацию. Если теперь немного повернуть поляризующий поляроид (на 5—10°), приблизив его ось пропускания к вертикали, чтобы несколько увеличить параллельную компоненту, вы сможете получить отраженный пучок, полностью поляризованный по кругу. (Небольшой поворот необходим для компенсации того, что параллельная компонента отражается не столь же полно, как перпендикулярная компонента.)

Повернув поляризующий поляроид из положения оси пропускания «вверх направо» в положение «вверх налево», вы измените спиральность отраженного света.

Теперь дадим качественное объяснение нашим наблюдениям. Металл является реактивной средой. Обе поляризационные компоненты падающего света отра-



жаются почти полностью. При этом возникает сдвиг фаз, соответствующий времени, нужному, чтобы поля проникли в реактивную среду на глубину порядка длины экспоненциального ослабления и вышли обратно. Этот сдвиг фаз различен для параллельной и перпендикулярной компонент поляризации. Причина различия в следующем. У перпендикулярной компоненты электрическое поле параллельно поверхности металла; электроны свободно движутся под действием поля параллельно поверхности таким образом, чтобы ослабить падающее излучение. Возникающее время запаздывания и сдвиг фаз связаны с инерцией электронов. Поэтому у перпендикулярной компоненты возникает определенная задержка фазы. Теперь рассмотрим параллельную компоненту. При почти нормальном падении поле этой компоненты почти параллельно поверхности и ведет себя поэтому подобно полю перпендикулярной компоненты, в частности, у обеих компонент будет одна и та же задержка фазы. В результате отражения, кроме задержки фазы, связанной с проникновением в металл, у обеих компонент изменится знак амплитуды. Таким образом, после отражения поляризация «вверх направо» (если смотреть на лампу по линии глаз—металл—поляроид—лампа) становится поляризацией «вниз налево». Теперь предположим, что падающий пучок больше не близок к нормали. Тогда электрическое поле в параллельной компоненте больше не параллельно поверхности. Мы можем разложить его на составляющие, параллельные поверхности и перпендикулярные к ней. Поведение параллельной составляющей и испытываемое ею запаздывание фазы мы уже рассмотрели. Компонента, перпендикулярная поверхности, ведет себя совершенно иначе: заряды не могут перемещаться перпендикулярно поверхности. На ней возникает поверхностный заряд, и движение зарядов быстро прекращается. В этом случае, когда движение зарядов ничтожно, не возникает временной задержки, характерной для движения электронов параллельно поверхности. Таким образом, эта часть параллельной компоненты отражается с пренебрежимо малой временной задержкой.

Чтобы сделать это объяснение полным, мы должны были бы вычислить запаздывание фазы каждой компоненты и посмотреть, как оно зависит от угла падения. Эта задача не легка.

**8.28.** *Оптическая активность.* Допустим, что направление линейной поляризации для красного света на длине пути $L = 5$ *см* водного раствора сахара поворачивается на 45°. Отразим этот свет от зеркала и пошлем его через активный раствор обратно, так что полная длина пути будет 10 *см*. (Если вы будете делать этот опыт, постарайтесь, чтобы угол отражения не был равен в точности 180°. Посмотрите на изображение источника света через «реальный» раствор и через «изображение» раствора.)

Вопрос. После двух прохождений света направление линейной поляризации будет образовывать с первоначальным направлением угол 0° или 90°. Что наблюдается на опыте?

**8.29.** Опыт. *Нахождение быстрой оси пластинки* $^1/_4\lambda$. Зная, что ваш круговой поляризатор дает свет с левой спиральностью (по оптической терминологии), найдите быструю ось пластинки $^1/_4\lambda$. (Отметьте положение этой оси.)

**8.30.** Опыт. *Эффективный «коэффициент жесткости» для молекул оберточного целлофана.* Растяните кусок целлофана и поместите его за поляроидом так, чтобы ось растяжения составляла угол 45° с осью поляроида. Не тяните слишком сильно, иначе вы вызовете сдвиг фаз больший, чем $\pi/2$. Теперь определите спиральность эллиптически-поляризованного света. Для этого нужен круговой поляризатор и пластинка $^1/_2\lambda$. Зная спиральность, вы можете сказать, является ли ось растяжения быстрой или медленной осью. Предположим, что действие растяжения заключается в том, что молекулы «выстраиваются» своей «длинной стороной» вдоль оси растяжения. Вы можете узнать, больший или меньший показатель преломления отвечает направлению вдоль «длинной стороны» молекул. Больший показатель преломления означает бо́льшую диэлектрическую постоянную, что в свою очередь означает бо́льшую молекулярную поляризуемость, т. е. малый эффективный «коэффициент жесткости» (если только частота света меньше эффективной частоты свободных колебаний электрона в молекуле. Это условие выполняется для видимого света и стекла. Мы можем предположить, что оно выполняется и в этом случае). Таким образом, если ось растяжения окажется, например,

медленной осью, это значит, что эффективный «коэффициент жесткости» для колебаний вдоль молекулы меньше, чем для колебаний в перпендикулярном направлении. Каков экспериментальный результат?

**8.31.** Опыт. *Исландский шпат (кристалл прозрачного кальцита).* Возьмите большой хороший кристалл (толщиной около 2 *см*) исландского шпата. Поставьте на листе бумаги карандашом точку, положите кристалл на бумагу и смотрите через него. Вы увидите две точки. Рассмотрите их через поляроид. Вы обнаружите, что оба луча полностью поляризованы. Вращайте кристалл вокруг вертикальной оси. Одна точка будет поворачиваться, другая останется неподвижной. Вектор **E** в необыкновенном луче (т. е. в том, который поворачивается) направлен по оптической оси от кристалла. Теперь, глядя обоими глазами, постарайтесь определить, какая из двух точек кажется расположенной ближе. С помощью соответствующего чертежа (или воспользовавшись стеклянной пластинкой или слоем воды в аквариуме) убедитесь в том, что предмет кажется ближе, если смотреть на него через вещество с показателем преломления $n>1$. Какая точка кажется ближе: «обыкновенная» или «необыкновенная»? Что можно сказать о соответствующих показателях преломления? Согласуется ли ваш экспериментальный результат с данными табл. 8.1, п. 8.4? Используя карандаш в качестве метки в пространстве, покажите, что при нормальном падении «обыкновенная» точка не испытывает бокового смещения.

Обыкновенный луч падает нормально к поверхности, движется в кристалле и выходит из него нормально к поверхности. Необыкновенный луч даже при нормальном падении не остается нормальным к поверхности! С помощью соображений, основанных на обращении времени, покажите, что необыкновенный луч, выходящий из реальной точки и падающий нормально на поверхность кристалла, должен выйти из кристалла тоже по нормали, хотя внутри кристалла он движется по наклонной. (Верхняя и нижняя поверхности кристалла остаются параллельными при любой ориентации кристалла на листе бумаги.) Как будет отклоняться необыкновенный луч: будет ли он приближаться к оптической оси или удаляться от нее? (Подумайте о показателях преломления.)

Физическое объяснение отклонения необыкновенного луча заключается в следующем. Разложим вектор **E** падающего необыкновенного луча на две компоненты: параллельную и перпендикулярную оптической оси. Показатели преломления вдоль этих направлений различны, следовательно, различны и поляризуемости. Таким образом, различны и амплитуды вынужденных колебаний электронов, т. е. их излучение различно. При суперпозиции полей излучения этих двух компонент движения электронов возникает волна, распространяющаяся в «косом» направлении. Теперь вы должны найти направление наклона луча. Совпадает ли результат с опытом?

**8.32.** *Навигация викингов.* На больших широтах (например, за Полярным кругом) невозможно пользоваться магнитным компасом. Солнце также трудно использовать для ориентировки, потому что даже в полдень оно может быть за линией горизонта. Иногда на самолетах пользуются «сумеречным компасом», который определяет положение Солнца ниже линии горизонта по изменению направления поляризации голубого неба. Компас содержит кусок поляроида. Некоторые естественные кристаллы, например турмалин или кордерит, обладают свойствами поляроида. Если рассматривать линейно-поляризованный свет через такой кристалл, то он будет казаться прозрачным при совпадении плоскости поляризации с его осью пропускания и темным при повороте кристалла на 90°. Такие вещества называют «дихроичными».

В IX веке викинги вели свои суда в море, не имея ни компаса, ни поляроида. Ночью они пользовались звездами, а днем Солнцем, если оно не было закрыто облаками. Но, если верить древним скандинавским сагам, штурманы викингов могли установить положение Солнца, закрытого облаками, с помощью таинственного «солнечного камня». По-видимому, тайна камня раскрыта датским археологом Рамскоу и десятилетним мальчиком, которому был известен «сумеречный компас» (отец его, Йорге Йенсен, был штурманом скандинавской авиакомпании). Рамскоу писал в археологическом журнале: «...возможно, это был прибор, позволяющий обнаружить положение Солнца в облачную погоду». Мальчик подумал, что таким прибором является «сумеречный компас». Его отец сообщил об этой идее



Рамскоу. Последний исследовал различные дихроичные кристаллы, находимые в Скандинавии. Лучшим из них оказался кордерит. Такой кристалл позволяет установить с точностью $\pm 2{,}5°$ угловое положение Солнца и следить за ним, пока оно не опустится на $\sim 7°$ ниже линии горизонта.

Вопрос. В журнале «Тайм» от 14 июля 1967 г., стр. 158, написано, что древние саги утверждают, что магический «солнечный камень» находил положение Солнца независимо от погоды. Верите ли вы в это?

**8.33.** *Поляризационный «проекционный оператор».* Поляроид, ось пропускания которого направлена по $\hat{x}$, помещен в пучок света, содержащий все состояния поляризации, и пропускает только свет, имеющий линейную поляризацию по этой оси. Мы можем назвать такой поляроид «проекционным оператором». Он «проектирует на свой выход» $\hat{x}$-поляризацию без потерь (если пренебречь небольшими отражениями). Заметим, что наш «проекционный оператор» может действовать в прямом и в обратном направлениях, т. е. любая поверхность поляроида может служить входом. Рассмотрим теперь круговой поляризатор, состоящий из поляроида (вход) с приклеенной к нему пластинкой $^1/_4\lambda$, оптическая ось которой составляет 45° с осью поляроида. Предположим, что эта система дает на выходе свет с правой спиральностью. Но, если на нее падает свет такой спиральности, она поглощает половину интенсивности. Если перевернуть такой поляризатор, он будет пропускать свет с правой спиральностью и поглощать свет с левой спиральностью. Но когда свет с правой спиральностью падает со стороны пластинки $^1/_4\lambda$, то на выходной поверхности поляроида возникает линейно-поляризованный свет. Таким образом, такая система не является «проекционным оператором» для поляризации.

Возникает проблема: как создать «поляризационные операторы» круговой поляризации, один для света с правой, с другой для света с левой спиральностью. «Правый проекционный оператор» должен пропустить к своему выходу без потерь свет с правой спиральностью (пренебрегаем потерями на отражение) и поглотить свет с левой спиральностью.

Вопрос. Будет ли такой оператор обратимым, т. е. можно ли использовать любую поверхность в качестве входа?

**8.34.** Опыт. *Устранение бликов.* Предположим, что вы хотите использовать вашу осветительную лампу, чтобы рассмотреть предмет, находящийся далеко за окном. Как избавиться от мешающих бликов, возникающих от света, зеркально отраженного от оконного стекла? Предположим, что вы смотрите через дождь ночью, используя ту же осветительную лампу. Помогут ли вам в этом случае те же ухищрения, которые помогли избавиться от оконных бликов? Предположим, что вместо видимого света вы используете микроволны длиной 10 *см*, а приемник работает на антенне передатчика (радар). Каковы должны быть фазовые соотношения в двух антеннах, ориентированных по осям $x$ и $y$, чтобы избавиться от бликов, созданных каплями воды?

**8.35.** Опыт. *Окраска в прозрачном пластике.* Найдите кусок прозрачного пластика. Посмотрите на отражение неба в поверхности пластика при угле падения около 45°. Видите ли вы цвета? (Чтобы уменьшить фон, положите под пластик черную бумагу.) Для увеличения эффекта смотрите на пластик через поляроид. Объясните происхождение цветов.

ГЛАВА 9

# ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И ДИФРАКЦИЯ

## 9.1. Введение

Большинство задач, которые мы до сих пор рассматривали, являлись одномерными в том смысле, что существовал только один путь, по которому волна, испущенная из одного места, могла перейти в другое. Теперь мы перейдем к рассмотрению случаев, когда существует несколько различных путей распространения волн от излучателя к детектору. Это рассмотрение приведет нас к явлениям *интерференции* и *дифракции*, которые возникают из-за конструктивной и деструктивной суперпозиции волн, имеющих в зависимости от выбранного пути распространения различные фазы.

В п. 9.2 мы рассмотрим суперпозицию (в месте расположения детектора) волн, испущенных двумя точечными источниками и имеющих одинаковую частоту и постоянную разность фаз. Примерами могут служить водяные волны, образованные двумя стержнями на поверхности воды, или свет, испущенный двумя щелями, освещенными линейным или точечным источником (домашний опыт 9.18), или, наконец, звуковые волны, испущенные двумя громкоговорителями, подключенными к одному звуковому генератору.

В п. 9.3 мы рассмотрим интерференцию между двумя независимыми источниками, т. е. между источниками, разность фаз которых не остается постоянной. Мы увидим, что в этом случае интерференционная картина постоянна лишь в течение интервала времени порядка $(\Delta\nu)^{-1}$, где $\Delta\nu$ — полоса частот источника. Тем не менее, проводя достаточно «быстрые» эксперименты, можно зафиксировать интерференционную картину.

В п. 9.4 мы определим, насколько большим может быть источник, все еще оставаясь «точечным», если он состоит из независимо излучающих частей, а детектор регистрирует среднее излучение за продолжительный временной интервал [т. е. за интервал, большой по сравнению с $(\Delta\nu)^{-1}$]. В полученном здесь результате можно убедиться, выполнив несложный домашний опыт 9.20. Другой домашний опыт (9.21) иллюстрирует когерентность зеркала Ллойда.



В п. 9.5 будет показано, что пучок с пространственной шириной $D$ имеет угловое расхождение порядка $\Delta\theta \approx \lambda/D$ относительно основного направления распространения. Этот результат математически связан (через фурье-преобразование) с тем, что у импульса продолжительностью $\Delta t$ ширина частотного спектра имеет порядок $(\Delta t)^{-1}$.

В п. 9.6 для нахождения интерференционной картины от одной и многих щелей используется построение Гюйгенса. Основное внимание здесь обращено на оптические и электромагнитные явления, а в домашних опытах, выполненных с помощью дифракционных решеток, исследуются различные дифракционные картины. Для выполнения этих опытов мы рекомендуем достать лампу с чистым стеклянным баллоном и прямой нитью накаливания длиной около 7 *см*. В большинстве опытов такая лампа служит линейным источником света.

В п. 9.7. рассмотрена так называемая геометрическая оптика. Вначале мы выводим закон зеркального отражения и закон преломления Снеллиуса, исходя из волновых свойств света, а затем переходим к зеркалам, призмам и тонким линзам.

## 9.2. Интерференция между двумя точечными когерентными источниками

*Когерентные источники*. В качестве простейшего примера рассмотрим интерференцию от двух одинаковых точечных источников, расположенных в разных местах и испускающих гармонические бегущие волны одинаковой частоты в открытую однородную среду. Если каждый источник имеет вполне определенную частоту (а не конечную полосу частот вблизи основной), то относительная фаза двух источников (разность между их фазовыми постоянными) не меняется со временем. В этом случае говорят, что два источника относительно когерентны или просто *когерентны*. (Даже если источники имеют различные частоты, они будут «когерентными», если каждый из них монохроматичен, так как в этом случае их разность фаз всегда полностью определена.) Если каждый источник имеет одинаковую основную частоту и конечную полосу частот $\Delta\nu$, то разность фаз обоих источников (при условии, что они независимы) будет оставаться постоянной только в течение времени порядка $(\Delta\nu)^{-1}$. Однако постоянство разности фаз может быть сохранено, если на источник действует общая внешняя вынуждающая сила. В этом случае, даже если фазовая постоянная каждого источника в течение интервала времени $(\Delta\nu)^{-1}$ будет меняться неконтролируемым образом в диапазоне $0 \div 2\pi$ ($\Delta\nu$ — частотная полоса возмущающей силы), разность фаз будет оставаться постоянной. В этом случае также говорят, что источники когерентны, хотя они уже не монохроматичны.

В качестве примера двух когерентных источников волн рассмотрим систему из двух стержней, касающихся поверхности воды.

Если под действием одной и той же внешней силы стержни будут совершать вертикальные колебания, то на поверхности воды будут возникать волны поверхностного натяжения. Благодаря тому, что возмущающая сила одинакова для обоих стержней, разность их фаз постоянна. Другим примером двух когерентных источников могут служить две одинаковые радиоантенны, находящиеся под воздействием одного и того же генератора. Даже если генератор и не является идеально монохроматичным, разность фаз токов в двух антеннах остается постоянной.

В качестве примера двух когерентных источников видимого света рассмотрим два небольших отверстия или две параллельные щели в непрозрачном экране, освещенном с одной стороны удаленным точечным источником света. Электрическое поле падающего от точечного источника электромагнитного излучения наводит токи на краях щелей. В этом случае обе щели являются когерентными источниками света (рис. 9.1).

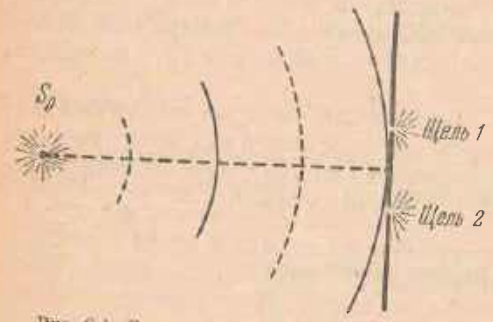



Рис. 9.1. Два когерентных источника света. Токи на краях щелей 1 и 2 возбуждаются волнами, приходящими от точечного источника $S_0$. Фаза волн постоянная источника может сползать или меняться скачком, но разность фаз токов в щелях остается постоянной.

Во всех этих примерах нам необходим «детектор», регистрирующий (воспринимающий) волны. В случае волн поверхностного натяжения на воде таким детектором может быть кусок пробки, плавающий на поверхности воды. Вертикальные перемещения пробки могут быть измерены. В случае радиоволн можно использовать детектор, состоящий из приемной антенны, резонансного контура, настроенного на частоту передатчика, и осциллоскопа. Для видимого света возможным детектором может быть наш глаз, фотопленка или фотоумножитель, выходной ток которого можно измерить. В каждом случае детектор будет реагировать на суммарную волну, являющуюся линейной суперпозицией волн от каждого источника.

*Конструктивная и деструктивная интерференция.* Для некоторых положений детектора в пространстве прибытие гребня (впадины) волны от одного источника всегда сопровождается одновременным прибытием гребня (впадины) от другого источника. Такая область пространства называется областью *конструктивной интерференции* или областью *интерференционного максимума*. Для других точек пространства гребень от одного источника накладывается на минимум от другого. В этом случае говорят об области *деструктивной интерференции* или *интерференционного минимума*. Так как разность фаз колебаний обоих источников постоянна (по предположению), то область конструктивной интерференции остается такой для любого последующего момента времени. То же справедливо и для области деструктивной интерференции.



*Интерференционная картина.* В результате чередования в пространстве интерференционных максимумов и минимумов возникает *интерференционная картина*. Она неподвижна, несмотря на то что образована бегущими волнами. Заметим, что если генератор, действующий на обе антенны, выключить и затем снова включить (при этом у колебаний будет новая фаза), то разность фаз токов в антенне не изменится. Аналогично, если выключить и включить точечный источник, воздействующий на две щели, то разность фаз токов в щелях останется неизменной. Поэтому не изменится и интерференционная картина. С другой стороны, если переместить точечный источник так, что изменение расстояния от источника до одной щели не будет равно изменению расстояния от источника до другой щели, то разность фаз наведенных токов изменится, что приведет к изменению интерференционной картины. Аналогично, если между осциллятором и одной из антенн вставить задерживающую цепочку, то это вызовет изменение разности фаз токов в антеннах и соответственно изменение интерференционной картины.

*Близкое и далекое поля.* В большинстве примеров, которые мы будем рассматривать, расстояние от детектора до обоих источников значительно больше расстояния между ними. В этом случае говорят, что детектор находится в *далеком поле* источников *). При рассмотрении далекого поля возможны упрощающие геометрические приближения. В частности, если нас интересует амплитуда волны, то с хорошим приближением мы можем считать, что оба идентичных источника находятся на одинаковом расстоянии от детектора и вклад в суперпозицию от каждого источника будет определяться бегущими волнами с одинаковыми амплитудами.

При заданном положении детектора (точка поля $P$) временная зависимость полной волновой функции определяется суперпозицией двух гармонических колебаний, имеющих одинаковые частоты и амплитуды, но различные фазовые постоянные. Две фазовые постоянные (в данной точке поля $P$) зависят от фазовых постоянных двух колеблющихся источников и от числа длин волн между каждым источником и точкой поля. Если расстояние от точки $P$ поля до источников одинаково или отличается на целое число длин волн и если источники колеблются в фазе, то точка $P$ соответствует интерференционному максимуму. Амплитуда гармонического колебания в этой точке в два раза больше амплитуды колебаний каждого из источников. (Если источники колеблются со сдвигом по фазе в 180°, то точка $P$ соответствует интерференционному минимуму и амплитуда колебаний в ней равна нулю.) Если расстояние от точки $P$ до одного источника больше расстояния от точки $P$ до другого источника на $^1/_2\lambda$ (плюс любое целое число длин волн) и если источники колеблются в фазе, то точке $P$ соответствует интерференци-

*) О близком поле см. п. 7.5.

онный минимум и нулевая амплитуда. Наше приближение состоит в том, что входящие в суперпозицию колебания имеют равные амплитуды. В действительности, так как расстояние от источников до точки поля $P$ различно, различны и амплитуды колебаний в точке $P$ от каждого источника. Поэтому при более строгом рассмотрении амплитуда в интерференционном минимуме уже не равна *точно* нулю.

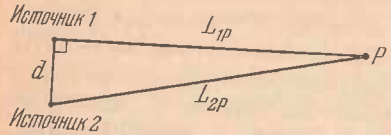



Рис. 9.2. Далекое поле.
Приемник в точке $P$ находится в далеком поле обоих источников, если разность расстояний $L_{2P}$ и $L_{1P}$ много меньше длины волны.

Вторым важным упрощением, пригодным для далекого поля, является предположение о параллельности направлений от обоих источников к точке поля $P$. Мы используем это приближение при определении интерференционной картины от двух точечных источников. Приведем критерий пригодности приближения далекого поля. Рассмотрим такую точку поля $P$, что направление от источника *1* до точки $P$ перпендикулярно линии, соединяющей оба источника *1* и *2* (рис. 9.2). Приближение далекого поля справедливо, если направление от источника *2* к $P$ можно считать параллельным направлению от источника *1* к $P$. В этом случае можно полагать, что разность фаз двух колебаний в точке $P$ определяется только разностью фаз источников (для геометрии рис. 9.2). Это приближение будет плохим, если расстояние $L_{2P}$ от источника *2* до $P$ превышает расстояние $L_{1P}$ на $^1/_2\lambda$ (или больше), так как в этом случае вклады двух воли в точке $P$ отличаются по фазе на 180° (или больше) при условии, что разность фаз источников равна нулю.

*«Граница» между близким и далеким полями.* Рассмотрим такое расстояние $L_0$ между источником и точкой поля, что если $L_{1P}$ и $L_{2P}$ значительно больше $L_0$, то приближение далекого поля справедливо. Таким образом, $L_0$ можно считать грубой границей между районами далекого и близкого полей (источников). Естественно выбрать $L_0$ так, чтобы при $L_{1P}=L_0$ $L_{2P}$ превышало $L_{1P}$ точно на $^1/_2\lambda$. Приближенное выражение для этой границы $L_0$ можно получить следующим образом. Из рис. 9.2 имеем

$$L_{2P}^2 = L_{1P}^2 + d^2,$$

т. е.

$$L_{2P}^2 - L_{1P}^2 = (L_{2P} - L_{1P})(L_{2P} + L_{1P}) = d^2.$$

В рассматриваемом случае $L_{2P}$ и $L_{1P}$ почти равны друг другу и $L_0$. С учетом того, что $L_{2P}$ превышает $L_{1P}$ на $^1/_2\lambda$, имеем

$$d^2 = (L_{2P} - L_{1P})(L_{2P} + L_{1P}) \approx \left(\frac{1}{2}\lambda\right)(L_0 + L_0).$$

Таким образом, мы можем считать, что приближение далекого поля справедливо для точек $P$, находящихся на расстояниях от источников значительно больших, чем расстояние $L_0$, удовлетворяющее соотношению

$$\boxed{L_0\lambda \approx d^2.} \qquad (1)$$

*Собирающая линза для получения интерференционной картины в далеком поле.* Посмотрим, как можно получить в видимом свете интерференционную картину от двух щелей. (См. домашний опыт 9.18.) Расположение щелей (два когерентных источника) показано на рис. 9.1. Пусть расстояние между ними будет равно 0,5 *мм*. Вычислим, как далеко от щелей должна быть расположена точка, чтобы ее можно было считать находящейся в далеком поле щелей. Используя выражение (1), для $\lambda = 5000$ Å и $d = 0{,}5$ *мм* будем иметь

$$L_0 \approx \frac{d^2}{\lambda} = \frac{(0{,}5\cdot 10^{-1}\ см)^2}{5{,}0\cdot 10^{-5}\ см} = 50\ см.$$

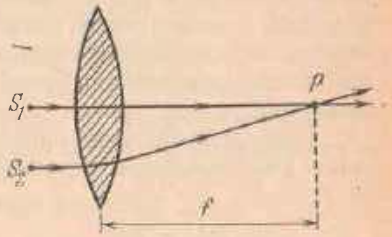



Рис. 9.3. Собирающая линза.
Параллельные лучи от источников $S_1$ и $S_2$ фокусируются в точке $P$, если оба источника совершают колебания с одной и той же фазой постоянной. Расстояние от центра линзы до фокуса $P$ называется фокусным расстоянием линзы $f$ (для линзы, толщина которой мала по сравнению с $f$).

Таким образом, лишь на расстоянии порядка $10L_0 \approx 5\ м$ мы будем находиться в далеком поле. Однако пользоваться такими расстояниями неудобно и, главное, в этом нет необходимости. Существует способ получить картину, соответствующую далекому полю, даже если две щели расположены непосредственно перед детектором. Детектором может быть наш глаз, который в первом приближении состоит из светочувствительной поверхности (сетчатки) и линзы (хрусталика). (Мы будем изучать линзы в п. 9.7.) Линза глаза имеет переменное фокусное расстояние (фокус), которое изменяется в зависимости от натяжения аккомодационного мускула глаза. Когда вы смотрите на удаленный объект, этот мускул находится в расслабленном состоянии (для нормального глаза). В этом случае глазная линза принимает такую форму, что лучи от удаленного объекта, попадая на поверхность линзы, собираются в ее фокусе, который находится на сетчатке. (Если преломляющая способность линзы слишком сильна или слишком слаба, то фокус не будет находиться на сетчатке и удаленный объект будет казаться размытым.) Следует заметить, что источник удален, и поэтому лучи, попадающие на линзу (хрусталик), почти параллельны. Эта же линза (с расслабленным аккомодационным мускулом) будет фокусировать на сетчатку любые параллельные лучи независимо от того, пришли они от удаленного или близкого источника. Фокусирующее действие линзы показано на рис. 9.3. Оказывается (мы покажем это в п. 9.7), что, хотя геометрическое расстояние от источника $S_1$ до $P$ (рис. 9.3) меньше, чем от источника $S_2$ до $P$, в этих расстояниях укладывается одинаковое число волн. Действительно, путь

луча $S_1P$ в линзе больше пути луча $S_2P$, а длина волны в линзе короче длины волны в воздухе. Мы можем считать, что точка $P$ находится на «эффективно» бесконечном расстоянии от источников в том смысле, что параллельные лучи от источников $S_1$ и $S_2$ проходят до точки $P$ расстояния, на которых укладывается одинаковое число длин волн. Таким образом, точка $P$ будет соответствовать интерференционному максимуму (при условии, что источники $S_1$ и $S_2$ колеблются в фазе) точно так же, как если бы все пространство между источниками и точкой $P$ имело постоянный показатель преломления и точка $P$ была бесконечно удалена вправо от источников.

В дальнейшем мы будем считать, что точка $P$ находится в дальнем поле источников $S_1$ и $S_2$ либо потому, что точка $P$ на самом деле удалена на большое расстояние от источников, либо потому, что мы используем линзу и точка $P$ «эффективно» очень далека от источников.

*Интерференционная картина в далеком поле.* На рис. 9.4 показаны два точечных источника, испускающих электромагнитные

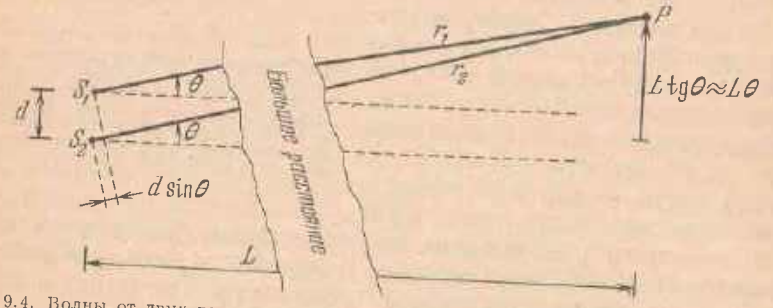



Рис. 9.4. Волны от двух точечных источников регистрируются в далекой точке поля $P$.

волны, которые регистрируются в удаленной точке поля $P$. Нас будет интересовать интерференционная картина в плоскости, содержащей оба источника и точку поля $P$. Полученные результаты будут справедливы и для двух источников, имеющих форму линии (например, две щели в случае света), или для двух радиоантенн, или для поверхностных волн на воде.

*Главный максимум.* Если расстояния $r_1$ и $r_2$ от источников $S_1$ и $S_2$ до точки поля $P$ велики по сравнению с расстоянием $d$ между источниками, то можно считать, что два луча, соединяющих источники с точкой $P$, параллельны и составляют практически один и тот же угол $\theta$ с осью $z$ (см. рис. 9.4). В этом случае разность хода обоих лучей до точки $P$ равна $d\sin\theta$. Поэтому, если источники колеблются в фазе, то условие конструктивной интерференции в точке $P$ имеет вид $d\sin\theta = 0;\ \pm\lambda;\ \pm 2\lambda$ и т. д. Интерференционный максимум, образованный при угле $\theta = 0°$, называется *главным максимумом* или *максимумом нулевого порядка*. Первый максимум, с любой стороны от главного максимума ($d\sin\theta$ равно $\pm\lambda$), называ-



вается *максимумом первого порядка* и т. д. Области деструктивной интерференции, где суперпозиция двух волн всегда равна нулю, называются *узлами*. Узлы возникают в тех точках, где разность хода лучей $d\sin\theta$ равна $\pm{}^1/_2\lambda;\ \pm{}^3/_2\lambda$ и т. д.

Выведем выражение для суммарного электрического поля в точке $P$, предполагая, что оба источника совершают одинаковое гармоническое движение, фазовые постоянные которого могут быть различны. Представим себе мысленно источники в виде двух колеблющихся точечных зарядов. Будем рассматривать одну из двух возможных компонент вектора напряженности в точке $P$. Нет необходимости указывать на тип поляризации, так как полученные результаты справедливы для любого типа поляризации, например для правой или левой круговой поляризации. Однако для определенности будем считать, что имеем дело с излучением, поляризованным по оси $\hat{y}$, где $\hat{y}$ — направление, перпендикулярное плоскости рисунка. Движение зарядов 1 и 2 вдоль направления $\hat{y}$ имеет вид

$$y_1(t) = y_0\cos(\omega t + \varphi_1), \quad y_2(t) = y_0\cos(\omega t + \varphi_2). \tag{2}$$

Пусть начало координат находится на половине расстояния между источниками. Тогда положение точки $P$ может быть задано углом $\theta$ и расстоянием $r$ от начала координат. Поле $E_1(t)$, регистрируемое в точке $P$ и излученное в результате движения первого источника $y_1(t_1')$ в более ранний момент времени $t_1'$, равно

$$E_1(t) = -\frac{q\ddot{y}_1(t_1')}{r_1c^2} = \frac{\omega^2 q y_0\cos(\omega t_1' + \varphi_1)}{r_1c^2}. \tag{3}$$

Выражение для поля $E_2(t)$, излученного в момент $t_2'$ в результате движения второго источника $y_2(t_2')$, имеет аналогичный вид. В приближении далекого поля считаем, что $r_1$ и $r_2$ равны среднему расстоянию $r$:

$$r \equiv \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \tag{4}$$

$$E_1(t) = A(r)\cos(\omega t_1' + \varphi_1), \quad E_2(t) = A(r)\cos(\omega t_2' + \varphi_2), \tag{5}$$

$$A(r) \equiv \frac{\omega^2 q y_0}{rc^2}. \tag{6}$$

Моменты $t_1'$ и $t_2'$ испускания излучения, регистрируемого в точке $P$ в более поздний момент времени, определяются из равенств

$$\omega t_1' = \omega\left(t - \frac{r_1}{c}\right) = \omega t - kr_1, \quad \omega t_2' = \omega\left(t - \frac{r_2}{c}\right) = \omega t - kr_2. \tag{7}$$

*Разность фаз, возникающая от разности хода лучей.* Разность хода лучей $r_2 - r_1$ зависит от угла $\theta$, поэтому разность фаз двух волн в точке $P$ также зависит от $\theta$. Именно это изменение разности фаз при изменении угла $\theta$ и определяет интерференционную картину. Разность фаз $\Delta\varphi$, возникающая вследствие разности хода лучей, равна

$$\Delta\varphi = \omega t_1' - \omega t_2' = k(r_2 - r_1) = k(d\sin\theta) = 2\pi\frac{d\sin\theta}{\lambda}, \tag{8}$$

где $d \sin \theta$ — разность хода (см. рис. 9.4). Различные формы выражения (8) для $\Delta\varphi$ математически эквивалентны, но соответствуют различным мысленным картинам, каждая из которых должна быть рассмотрена отдельно. Так, в первом случае мы обращаем внимание на то, что излучение испущено в разные моменты времени. В последнем случае разность фаз равна $2\pi$, умноженному на число длин волн, определяющих разность хода, во втором и третьем случаях можно говорить о числе радиан фазы на единицу длины (волновое число $k$), умноженном на разность хода. Кроме величины $\Delta\varphi$, определяемой из уравнения (8), может существовать разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ колебаний самих источников. Полное поле $E$ в точке $P$ является суперпозицией полей $E_1$ и $E_2$:

$$E(r, \theta, t) = E_1 + E_2 = A(r)\cos(\omega t_1' + \varphi_1) + A(r)\cos(\omega t_2' + \varphi_2) = \\ = A(r)\cos(\omega t + \varphi_1 - kr_1) + A(r)\cos(\omega t + \varphi_2 - kr_2). \quad (9)$$

*«Средняя» бегущая волна.* Вместо того чтобы считать поле $E$ суперпозицией двух сферических бегущих волн от источников 1 и 2, мы можем представить это поле как одну «среднюю» сферическую бегущую волну, амплитуда которой зависит от угла распространения $\theta$, а фаза равна среднему значению фаз $\varphi_1$ и $\varphi_2$. Воспользуемся тригонометрическим равенством

$$\cos a + \cos b = \cos\left[\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b)\right] + \\ + \cos\left[\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)\right] = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b),$$

где

$$a = \omega t + \varphi_1 - kr_1, \quad b = \omega t + \varphi_2 - kr_2.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}(a+b) = \omega t + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{1}{2}k(r_1 + r_2) = \omega t + \varphi_{ср} - kr, \quad (10)$$

$$\frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{1}{2}k(r_1 - r_2) = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi. \quad (11)$$

Теперь уравнение (9) можно переписать так:

$$E(r, \theta, t) = \left\{2A(r)\cos\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi\right]\right\}\cos(\omega t + \varphi_{ср} - kr) = \\ = A(r, \theta)\cos(\omega t + \varphi_{ср} - kr), \quad (12)$$

где амплитуда $A(r, \theta)$ определяется по формуле

$$A(r, \theta) = 2A(r)\cos\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi\right], \quad (13)$$

$$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) = 2\pi\frac{d\sin\theta}{\lambda}.$$

*Поток фотонов.* Поток фотонов в данной точке поля $P$ пропорционален среднему во времени потоку энергии $\langle S\rangle$. В нашем случае, когда имеется лишь одна компонента поляризации, направленная по $\hat{y}$, поток энергии равен

$$\langle S\rangle = \frac{c}{4\pi}\langle \mathbf{E}^2\rangle, \quad (14)$$



где

$$\mathbf{E} = \hat{y}E(r, \theta, t). \quad (15)$$

Имеем

$$\langle \mathbf{E}^2\rangle = \langle [A(r, \theta)\cos(\omega t + \varphi_{ср} - kr)]^2\rangle = \frac{1}{2}A^2(r, \theta), \quad (16)$$

где

$$A^2(r, \theta) = \left\{2A(r)\cos\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi\right]\right\}^2. \quad (17)$$

*Интерференционная картина от двух щелей.* Будем считать, что $r$ фиксировано, и посмотрим, как меняется поток фотонов при изменении угла $\theta$. В соответствии с уравнениями (14) — (17) имеем

$$I(\theta) = I_{макс}\cos^2\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi\right] \quad (18)$$

(через $I(\theta)$ обозначен поток фотонов). Из уравнения (18) следует, что *интенсивность изменяется как квадрат косинуса половины полной разности фаз*, определяемой разностью фаз источников и разностью фаз, возникающей вследствие зависимости разности хода лучей от угла $\theta$.

*Источники колеблются в фазе.* Если $\varphi_1$ и $\varphi_2$ равны, зависимость интенсивности от угла определяется только разностью хода:

$$I(\theta) = I_{макс}\cos^2\frac{1}{2}\Delta\varphi = I_{макс}\cos^2\left[\pi\frac{d\sin\theta}{\lambda}\right]. \quad (19)$$

Это выражение справедливо как для двух щелей, так и для двух точечных источников. На рис. 9.5 показана зависимость интенсивности от угла $\theta$ для малых $\theta$ ($\theta \approx 0$). Мы предполагаем, что расстояние между источниками значительно больше $\lambda$ ($d \gg \lambda$), так что $I(\theta)$ проходит через много максимумов и минимумов, в то время как $\theta$ остается довольно малым. На рис. 9.5 показаны несколько максимумов и минимумов в небольшой окрестности $\theta \approx 0$.

*Источники колеблются в противофазе.* Если $\varphi_1$ и $\varphi_2$ отличаются по фазе на $\pm\pi$, то половина разности фаз равна $\pm\pi/2$ и уравнение (18) принимает вид

$$I(\theta) = I_{макс}\sin^2\frac{1}{2}\Delta\varphi = I_{макс}\sin^2\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}. \quad (20)$$

На рис. 9.6 показан график выражения (20) в области $\theta \approx 0$ для случая, когда $d \gg \lambda$.

*Интерференционная картина вблизи* $\theta = 0°$. Глядя на линейный источник света через две щели, нельзя указать направление, для которого $\theta = 0°$. Таким образом, в рис. 9.5 и 9.6 содержится больше информации, чем нам обычно доступно (по крайней мере в домашних опытах). Наиболее важной информацией является угловой интервал между двумя последовательными максимумами или соответствующий пространственный интервал на экране детектора. (Таким экраном может быть, например, сетчатка глаза.) Два последовательных максимума на рис. 9.5 и 9.6 соответствуют изменению разности хода на одну длину волны, т. е. увеличению $d\sin\theta$ на $\lambda$. Для $\theta$, близкого к нулю, можно считать $\sin\theta \approx \theta$. Тогда *угловой*

*интервал между последовательными максимумами равен $\lambda/d$ радиан.* Обозначим этот интервал через

$$\theta_0 \approx \frac{\lambda}{d}. \tag{21}$$

Соответствующее пространственное расстояние между двумя

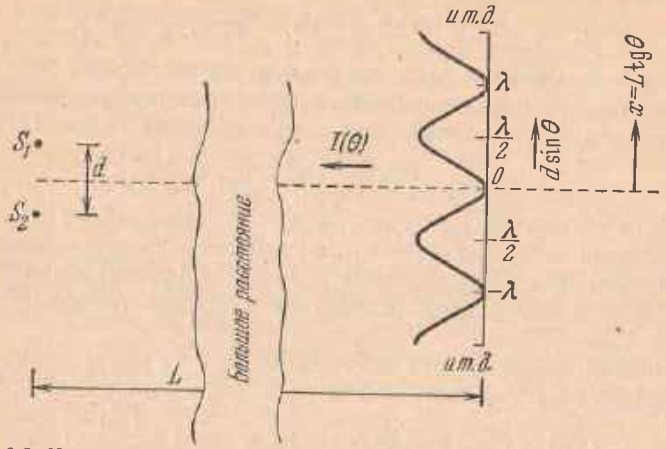



Рис. 9.5. Интенсивность суперпозиции от двух находящихся в фазе источников. Расстояние $d$ велико по сравнению с $\lambda$.

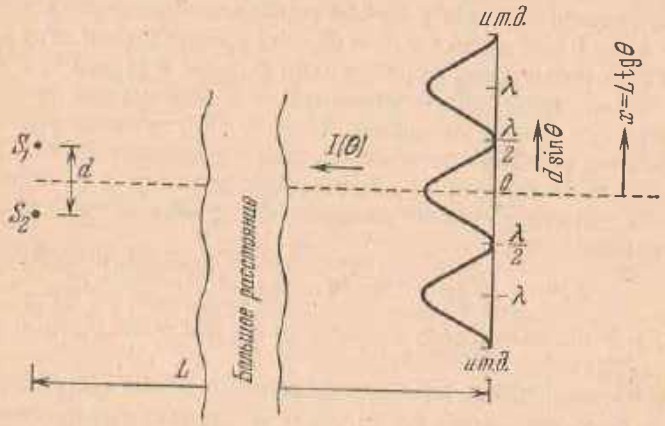



Рис. 9. 6. Интенсивность суперпозиции от двух источников, различающихся по фазе на 180°.

последовательными максимумами обозначим через $x_0$. В соответствии с рис. 9.5 или рис. 9.6 величина $x_0$ при малых $\theta$ равна

$$x_0 \approx L\theta_0 \approx \frac{L\lambda}{d}. \tag{22}$$

*Сохранение энергии.* Если выключить источник *2*, то электрическое поле в точке $P$ от источника *1* будет равно

$$E = E_1 = A(r)\cos(\omega t + \varphi_1 - kr_1). \tag{23}$$



Поток фотонов равен

$$\langle E_1^2\rangle = A^2(r)\langle\cos^2(\omega t + \varphi_1 - kr_1)\rangle = \frac{1}{2}A^2(r). \tag{24}$$

Это выражение не зависит от $\theta$. Аналогично, если действует только источник *2*, поток фотонов равен

$$\langle E_2^2\rangle = \frac{1}{2}A^2(r). \tag{25}$$

Когда действуют оба источника, поток фотонов пропорционален (константа пропорциональности та же, что и раньше) величине

$$\langle E^2\rangle = \langle(E_1+E_2)^2\rangle = \frac{1}{2}A^2(r,\theta) =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{2A(r)\cos\left[\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{1}{2}\Delta\varphi\right]\right\}^2 =$$
$$= A^2(r)\,2\cos^2\left[\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{1}{2}\Delta\varphi\right].$$

Используя (24) и (25), перепишем это выражение в виде

$$\langle E^2\rangle = [\langle E_1^2\rangle + \langle E_2^2\rangle]\,2\cos^2\left[\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{1}{2}\Delta\varphi\right], \tag{26}$$

где

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}. \tag{27}$$

Таким образом, поток энергии при двух действующих источниках есть произведение коэффициента $2\cdot\cos^2[\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{1}{2}\Delta\varphi]$, ответственного за угловую модуляцию, на сумму потоков от каждого источника в отдельности. Если между $\theta=0°$ и $\theta=360°$ находится много максимумов и минимумов, то модулирующая функция будет принимать значение 0 так же часто, как и значение 2, и ее среднее значение будет равно единице. Чтобы можно было наблюдать большое количество максимумов и минимумов, расстояние между источниками должно быть равным многим длинам волн, т. е. $d \gg \lambda$. Таким образом, мы видим, что полная испускаемая энергия (в плоскости рисунка) равна сумме вкладов каждого источника при условии, что расстояние между источниками составляет много длин волн. Это кажется правдоподобным.

*Один плюс один равно четырем?* Рассмотрим, однако, случай, когда оба источника расположены очень близко друг к другу. Пусть расстояние между источниками значительно меньше одной длины волны. Если источники колеблются в фазе, то из выражений (26) и (27) получим

$$\langle E^2\rangle \approx 2\,[\langle E_1^2\rangle + \langle E_2^2\rangle]. \tag{28}$$

Таким образом, вместо суммы энергий от двух источников мы имеем удвоенное значение суммарной энергии. Это может показаться странным. Не противоречит ли это закону сохранения энергии? Оказывается, что не противоречит. Каждый источник испускает в два раза больше энергии, когда другой источник совмещен с ним (и колеблется в фазе). Каким образом это происходит? Мы описы-

вали движение каждого заряда выражениями (2), которые не зависят от расстояния $d$ между источниками. Испускаемая энергия удваивается не потому, что изменяется движение каждого заряда, а потому, что импеданс, на который нагружен каждый источник, удвоился. Почему это происходит? Это происходит потому, что активная сила сопротивления, действующая на электроны в одной антенне, обусловливается не только тем полем, которое испущено этой антенной, но также и полем, испущенным второй антенной. Так как токи в антеннах находятся в фазе (по предположению) и антенны расположены очень близко друг к другу, полная сила сопротивления, действующая на электроны в одной антенне, в два раза больше, чем в случае только одной антенны. Поэтому, чтобы поддерживать неизменной скорость движения зарядов, источник должен развивать в два раза большую мощность. Поскольку это справедливо для каждой антенны, то в результате будем иметь увеличение полной энергии в два раза.

*Один плюс один равно нулю?* Если разность фаз между колебаниями источников равна 180° и если вы расположите одну антенну почти под другой, то амплитуда суммарной волны будет равна нулю. В пределе, когда антенны находятся одна под другой, амплитуда суммарной волны равна нулю в соответствии с уравнением (20). Источник «не работает», и энергия не излучается. Поле, излучаемое одной антенной, воздействует на электроны в другой антенне так, чтобы помочь осциллятору. В пределе (нулевое расстояние между антеннами) электроны в двух антеннах воздействуют друг на друга без помощи осциллятора. В этом случае мы имеем замкнутую систему с энергией, переходящей из одной антенны к другой и обратно. Роль генератора заключается только в восполнении потерь на активных сопротивлениях антенн. Сопротивление излучению, т. е. характеристический импеданс, равно нулю.

### 9.3. Интерференция между двумя независимыми источниками

*Независимые источники и время когерентности.* Предположим, что каждый из источников имеет полосу угловых частот $\Delta\omega$ и основную угловую частоту $\omega_0$. Предположим, что источники независимы. Это значит, что на источники не действует одна и та же внешняя сила. Таким образом, нет ничего, что принудительно фиксировало бы разность их фаз. В случае двух радиоантенн это значит, что каждая антенна подключена к отдельному генератору и источнику мощности. Для видимого света это означает, что мы имеем два независимых источника, излучение которых определяется возбуждением различных атомов. Примером может служить газоразрядная лампа с парами ртути, окруженная непрозрачным экраном, в котором сделаны два небольших отверстия или две щели. Каждое отверстие будет освещаться различными атомами газа. Аналогичным образом мы можем сделать два отверстия или две щели в непрозрачном экране и установить его перед обыкновенной лампой накаливания. (Чтобы при этом работать с достаточно узкой полосой частот, можно воспользоваться красным фильтром.)



Будем считать, что частотный диапазон $\Delta\nu$ мал по сравнению с основной частотой $\nu_0$. В этом случае за время $(\Delta\nu)^{-1}$ произойдет много циклов колебаний с частотой $\nu_0$. Интервал времени $(\Delta\nu)^{-1}$ называется *временем когерентности*. Это — временной интервал, необходимый для того, чтобы частотные компоненты по краям частотного диапазона приобрели разность фаз $2\pi$:

$$\Delta\omega_{\text{ког}}\,\tau_{\text{ког}} \approx 2\pi, \tag{29}$$

т. е. $t_{\text{ког}} \approx 2\pi/\Delta\omega$, или $t_{\text{ког}} \approx (\Delta\nu)^{-1}$. Для временных интервалов, меньших, чем $(\Delta\nu)^{-1}$, можно считать, что разность фаз двух источников остается практически постоянной. (В таких интервалах времени может быть заключено много циклов колебаний, так как $\nu_0(\Delta\nu)^{-1}$ велико.)

*«Некогерентность» и интерференция.* Ограничимся рассмотрением случая, когда расстояние между источниками $d$ значительно больше длины волны $\lambda$. На рис. 9.5 и 9.6 показаны интерференционные картины для моментов времени, когда разность фаз двух источников равна 0 и 180° соответственно. Если разность фаз принимает значения от 0 до 180°, то интерференционная картина «лежит между» рис. 9.5 и 9.6.

Предположим, что для определения интенсивности применяется детектор с большим временем детектирования, например глаз (разрешающее время которого около 1/20 *сек*). В этом случае средняя по времени интенсивность не будет зависеть от угла $\theta$. Действительно, если время детектирования велико по сравнению с $(\Delta\nu)^{-1}$, то интерференционная картина будет принимать все возможные «значения» между крайними «значениями» рис. 9.5 и 9.6 и при любой величине $d\sin\theta$ средняя по времени интенсивность будет одинаковой. В этом случае говорят, что два источника «некогерентны», и усредненный по времени поток энергии (поток фотонов) будет равен сумме потоков от каждого источника. Таким образом, из-за большого времени усреднения интерференционная картина окажется размытой. Этот факт можно записать алгебраически, замечая, что равенство (26) п. 9.2 дает величину $\langle E^2\rangle \approx \langle E_1^2\rangle + \langle E_2^2\rangle$, не зависящую от $\theta$ при условии, что разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ принимает все возможные значения между 0 и $2\pi$, а каждое значение разности фаз равновероятно. Действительно,

$$\left\langle \cos^2\left[\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{1}{2}\Delta\varphi\right]\right\rangle = \frac{1}{2}, \tag{30}$$

если $\Delta\varphi$ фиксировано, а $(\varphi_1 - \varphi_2)$ равномерно распределено от нуля до $2\pi$.

Итак, некогерентность является результатом несовершенства измерительного процесса. В результате измерений теряется информация об интерференционной картине. Ее можно наблюдать

лишь в том случае, если время детектирования сравнимо или меньше, чем $(\Delta\nu)^{-1}$. Для видимого света время когерентности имеет порядок $10^{-9}$— $10^{-8}$ *сек* (например, для источника в виде газоразрядной трубки, состоящего из независимо излучающих атомов). Поэтому для регистрации интерференционной картины до того, как она изменится, необходимо большое экспериментальное искусство. Такая задача была решена в очень красивом опыте Брауна и Твисса *).

*Опыт Брауна и Твисса.* Способ, с помощью которого Браун и Твисс успешно регистрировали интерференционную картину за время измерений, меньшее $10^{-8}$ *сек*, состоит в следующем. Имелись два фотоумножителя, местоположение которых определялось координатой $x$. Расстояние между фотоумножителями $(x_1 - x_2)$ можно было менять. Выходной ток первого фотоумножителя $I_1$ умножался на выходной ток второго фотоумножителя $I_2$. Токи перемножались в быстрой электронной схеме, постоянная времени которой не больше $10^{-8}$ *сек* (другими словами, полоса пропускания быстрой схемы близка к 100 *Мгц*). Произведение $I_1I_2$ измерялось «мгновенно», т. е. в течение интервала времени $10^{-8}$ *сек*, но для определения среднего значения этого произведения $\langle I_1I_2\rangle$ брался интервал, равный многим минутам. Это среднее значение было измерено для различных расстояний $x_1 - x_2$ между фотоумножителями. В результате можно было построить график зависимости $\langle I_1I_2\rangle$ от расстояния $x_1 - x_2$.

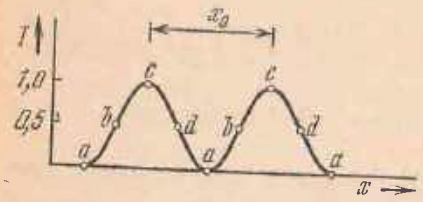


Рис. 9.7. Зависимость интенсивности от $x$ в данный «момент» времени, продолжительность которого меньше $(\Delta\nu)^{-1}$.

Мгновенное значение тока на выходе фотоумножителя пропорционально потоку световой энергии $I(0)$, падающему на него. Начнем с мысленного случая, когда расстояние $x_1 - x_2$ равно нулю, т. е. на каждый фотоумножитель действует один и тот же мгновенный поток света.

Сделаем очень грубое усреднение произведения двух токов. Будем считать, что $I(0)$ принимает только четыре значения: $a$, $b$, $c$ и $d$ (рис. 9.7). Токи, возникающие на выходе фотоумножителей при этих интенсивностях, обозначим также через $a$, $b$, $c$ и $d$, причем уровень отсчета выберем так, что $a = 0$, $b = {}^1/_2$, $c = 1$ и $d = {}^1/_2$. За одну четвертую мгновения (все «мгновенье» длится $10^{-8}$ *сек*) ФУ-1 (фотоумножитель-1) даст ток $I_1$, равный $a$. За это время ток $I_2$ также будет равен $a$, поскольку ФУ-2 находится там же, где и ФУ-1.

*) R. Brown and R. Twiss, Nature **178**, 1447 (1956). В последующих экспериментах использовался лазер, см. R. Pfleegor and L. Mandel, Phys. Rev. **159**, 1084 (1967).



Далее, по мере изменения интерференционной картины ток каждого фотоумножителя одну четвертую времени будет соответствовать $b$, одну четвертую времени — $c$ и одну четвертую времени — $d$. Среднее во времени произведение двух токов для $x_2 = x_1$ равно (при нашем грубом приближении)

$$(I_1I_2)_{\text{ср}} = \frac{1}{4}(aa + bb + cc + dd) = \\ = \frac{1}{4}\left(0\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}. \quad (31)$$

Теперь найдем среднее значение произведения $I_1I_2$, когда расстояние $x_2 - x_1$ равно расстоянию между «мгновенным» интерференционным максимумом и минимумом, т. е. равно половине расстояния $x_0$ (см. рис. 9.7). [Расстояние $x_0$ определяется равенством (22) п. 9.2.] Если $x_2 - x_1 = x_0/2$, то в момент, когда ФУ-1 дает ток $a$, ФУ-2 дает ток $c$. Когда ФУ-1 дает ток $b$, ФУ-2 дает ток $d$, и т. д. В результате усреднения произведения по моментам, когда ток ФУ-1 равен $a$, $b$, $c$ и $d$, имеем

$$(I_1I_2)_{\text{ср}} = \frac{1}{4}(ac + bd + ca + db) = \\ = \frac{1}{4}\left(0\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}. \quad (32)$$

Мы видим, что $(I_1I_2)_{\text{ср}}$ в три раза больше при $x_2 - x_1$, равном нулю, чем при $x_2 - x_1 = x_0/2$. Таким образом, зависимость $(I_1I_2)_{\text{ср}}$ от $x_2 - x_1$ определяет разность фаз $\Delta\varphi = (2\pi d \sin\theta)/\lambda$.

В опыте Брауна и Твисса существенно то, что в произведении $I_1I_2$ каждый ток усреднен в интервале $\sim 10^{-8}$ *сек* и в течение этого интервала его можно считать постоянным. Среднее $\langle I_1I_2\rangle$ за время в несколько минут будет таким же, как и при усреднении в интервале в несколько десятков времен когерентности, например в интервале $10^{-6}$ *сек*. (Большой интервал в несколько минут взят для того, чтобы усреднить шумы фотоумножителя, и по другим чисто экспериментальным причинам.) С другой стороны, произведение $\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle$ не зависит от $x_2 - x_1$, так как каждый фотоумножитель подвергается воздействию всей интерференционной картины в течение времени усреднения. Целью опыта является нахождение расстояний $x_2 - x_1$, для которых $I_2$ и $I_1$ велики, или $I_1$ и $I_2$ малы, или $I_1$ мало, а $I_2$ велико и наоборот.

Рассуждая в терминах фотонов, можно сказать, что если фотоумножитель-1 «недавно» (в течение $10^{-8}$ *сек*) зарегистрировал фотон, то вероятность регистрации фотона вторым фотоумножителем будет больше средней вероятности при $x_1 = x_2$ и меньше ее при $x_2 - x_1 = x_0/2$. Приведем грубое полуклассическое объяснение. Если, например, одна волна с интенсивностью в 100 фотонов интерферирует с другой волной с такой же интенсивностью, то при перекрытии этих волн в пространстве суперпозиция может дать полную интенсивность либо в 400 фотонов (полностью конструктивная интерференция), либо нуль (полностью деструктивная интерференция).

Все эти случаи можно отличить (в опытах Брауна и Твисса) от случая, когда группы волн никогда не перекрываются, для которого всегда справедливо: $100 + 100 = 200$ фотонов. Теперь нам ясно, что для выполнения эксперимента необходимо иметь интенсивный источник света (чтобы увеличить возможность перекрытия волновых групп двух фотонов) и фотоны с узкой полосой частот [поскольку длина волновой группы равна скорости, умноженной на среднее время жизни (т. е. $c/\Delta\nu$), и более длинным волновым группам легче перекрыться друг с другом].

### 9.4. Сколь велик может быть «точечный» источник света?

На рис. 9.1 было показано, как получить два когерентных источника света (т. е. два источника, у которых разность фаз постоянна), освещая «точечным» источником две щели в непрозрачном экране. Если источник света настолько велик, что первая щель освещается одной группой атомов, а вторая — другой группой, то источники некогерентны, т. е. их фазы некоррелированы (для измерений в течение времени, большего $(\Delta\nu)^{-1}$). Оба эти случая показаны на рис. 9.8.

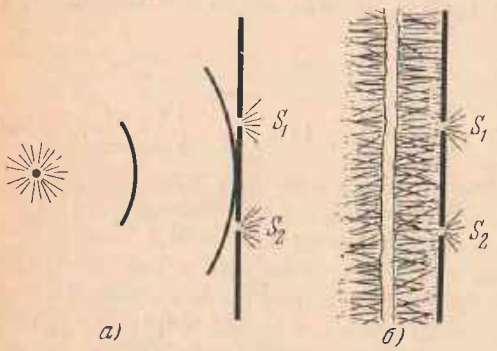



Рис. 9.8.
*а)* Источники $S_1$ и $S_2$ возбуждаются общим точечным источником, и их относительная фаза не меняется — они когерентны. *б)* Источники $S_1$ и $S_2$ возбуждаются рядом независимо излучающих атомов. Для интервалов времени, больших $(\Delta\nu)^{-1}$, эти источники некогерентны.

*Классический точечный источник.* Ближе всего понятию «точечный источник» отвечает отдельный атом. В соответствии с классическими представлениями он испускает электромагнитные волны во всех направлениях и воздействует на края щелей (рис. 9.8, *а*) с одинаковой фазой. (Квантовая теория дает такой же результат.) Реальный источник света состоит из огромного числа излучающих атомов. Если все они находятся в одной точке, то мы имеем точечный источник. (Это более реальная модель классического точечного источника, чем отдельный атом.) Однако в любом реальном источнике атомы занимают объем конечных размеров. Нас интересует, насколько большим может быть источник света, оставаясь при этом «точечным» (имеется в виду, что токи, возникающие в обеих щелях в результате действия точечного источника, сохраняют постоянную разность фаз)?

*Простой протяженный источник.* Рассмотрим очень простой не точечный источник. Он состоит из трех независимых точечных источников $S_a$, $S_b$ и $S_c$, у которых основная частота, ширина полосы



частот и средняя интенсивность одинаковы. Расположение источников показано на рис. 9.9. Предположим, что вначале включен только источник $S_a$. В этом случае его воздействия на щели *1* и *2* имеют одинаковую фазовую постоянную (положим, что она равна нулю). Поэтому два источника, образованные щелями, всегда когерентны. Пусть теперь включены два источника, $S_a$ и $S_c$. Источник $S_c$ имеет ту же доминирующую частоту и ширину полосы, но он не коррелирован по фазе с источником $S_a$. Поэтому разность фаз источников $S_a$ и $S_c$ не остается постоянной в течение времени, большего $(\Delta\nu)^{-1}$. Однако разность фаз излучения от щелей *1* и *2* будет равна нулю все время, так как источник $S_c$ воздействует на обе щели с нулевой

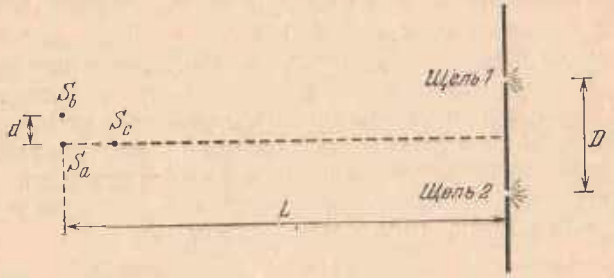



Рис. 9.9. Когерентность.
Щели *1* и *2* возбуждаются тремя независимыми источниками $S_a$, $S_b$ и $S_c$. Нужно ли объединить эти источники в один, чтобы щели *1* и *2* были когерентными?

разностью фаз, т. е. так же, как источник $S_a$. Токи в щелях могут рассматриваться как суперпозиция токов, вызванных двумя источниками, и если каждый источник дает нулевую разность фаз между излучением щелей, то то же даст и суперпозиция. Таким образом, мы видим, что точечный источник может иметь протяженность вдоль линии, соединяющей $S_a$ и $S_c$, и это не нарушит когерентности щелей *1* и *2*.

Теперь рассмотрим случай, когда включены источники $S_a$ и $S_b$, а источник $S_c$ выключен. Источники $S_a$ и $S_b$ — это независимые источники, имеющие одинаковую основную частоту, ширину полосы и среднюю интенсивность. В течение временного интервала, меньшего $(\Delta\nu)^{-1}$, амплитуда и фазовая постоянная каждого источника остаются неизменными. Предположим, что в данный момент (под «моментом» подразумевается временной интервал, меньший времени когерентности $(\Delta\nu)^{-1}$, но достаточно большой, чтобы вместить по крайней мере цикл быстрых колебаний и чтобы мы могли говорить о вполне определенных амплитуде и фазе) амплитуда источника $S_b$ мала по сравнению с амплитудой источника $S_a$. В этом случае с хорошей степенью точности можно считать, что щели освещаются только источником $S_a$ и исходящее из них излучение имеет поэтому нулевую разность фаз. Теперь подождем некоторое время, которое велико по сравнению с временем когерентности источников $S_a$ и $S_b$. Предположим, что амплитуды коле-

баний $S_a$ и $S_b$ теперь практически равны. В этом случае экран с двумя щелями будет освещаться интерференционной картиной от двух источников (см. рис. 9.5, 9.6 и 9.7). Местоположение максимумов и минимумов в этой картине зависит от разности фаз источников $S_a$ и $S_b$. Нас интересует, обеспечивает ли вынуждающая сила, действующая в этом случае на щели *1* и *2*, нулевую разность фаз. Мы знаем, что амплитуда интерференционной картины меняет знак при переходе от одного интерференционного максимума к другому. [В соответствии с уравнением (13) п. 9.2 амплитуда $A(r, \theta)$ пропорциональна $\cos[{}^1/_2(\varphi_1 - \varphi_2) + (\pi d \sin\theta)/\lambda]$. Отсюда следует, что амплитуда изменяет знак, когда $d\sin\theta$ возрастает на $\lambda$.] Мы видим, что разность фаз для обеих щелей будет равна нулю бо́льшую часть времени, если расстояние между ними много меньше, чем расстояние $x_0$ между двумя соседними интерференционными максимумами в интерференционной картине от двух источников. (Даже когда две щели расположены близко, может случиться, что нуль интерференционной картины, освещающей их, попадает между щелей. В этом случае разность фаз равна 180°. Однако при большем сближении щелей это будет иметь место все меньшую и меньшую часть времени.) Итак, необходимо, чтобы

$$D \ll x_0, \tag{33}$$

где $x_0$ — расстояние между соседними максимумами в интерференционной картине, определяемое из равенства (22) п. 9.2:

$$x_0 = L\frac{\lambda}{d}. \tag{34}$$

*Условие когерентности.* «Протяженный источник», состоящий из точечных источников $S_a$, $S_b$ и $S_c$, ведет себя, как точечный, при условии, что выполняется условие когерентности

$$D \ll \frac{L\lambda}{d}, \tag{35}$$

т. е.

$$d \ll \frac{L\lambda}{D}, \tag{36}$$

или

$$L \gg \frac{dD}{\lambda}. \tag{37}$$

В зависимости от того, какие параметры экспериментально доступны, применяется тот или иной критерий (35) — (37). [Домашний опыт 9.20 дает возможность легко проверить условие (37). В этом опыте величина $L$ является переменной.] Условие когерентности легче всего запомнить в виде следующей формулы:

$$\boxed{dD \ll L\lambda.} \tag{38}$$

Таким образом, произведение двух поперечных длин $d$ и $D$ должно быть мало по сравнению с произведением двух продольных длин $L$ и $\lambda$ (см. рис. 9.9).



Пусть источник состоит из большого числа точечных источников, расположенных между $S_a$ и $S_b$, так что его ширина равна $d$. Условие (38), полученное для двух крайних точек $a$ и $b$, будет применимо и к источнику в целом. (Точечные источники, расстояния между которыми меньше $d$, когерентны, если когерентны источники, находящиеся на расстоянии $d$.)

Аналогично, если мы имеем экран со многими щелями, то условие когерентности [уравнение (38)] применимо ко всей группе щелей, если $D$ — расстояние между крайними щелями.

## 9.5. Угловая ширина пучка бегущих волн

Пучок бегущих волн, распространяющийся в данном направлении, обычно имеет вполне определенную конечную ширину. Пучок видимого света от прожектора и пучок микроволн от радара можно создать, поместив небольшой источник электромагнитного излучения в фокусе параболического рефлектора. Этот источник возбуждает электроны на металлической поверхности рефлектора, и они колеблются с такими разностями фаз, что отраженное излучение от всех точек поверхности рефлектора конструктивно интерферирует вдоль направления луча. Другим способом получения светового пучка является отражение плоским зеркалом света от небольшого или удаленного источника (например, солнца). Вместо зеркала можно использовать отверстие в непрозрачном экране. Если источник находится достаточно далеко или достаточно мал, то излучение, падающее на зеркало (или отверстие), можно считать плоской волной, т. е. волной, в которой все излучение распространяется точно в одном направлении. Зеркало отражает часть плоской волны. Аналогично, если достаточно малый источник находится в фокусе зеркала, представляющего собой идеальный параболоид, то пучок (в некотором приближении), подобно «сегменту плоской волны», состоит из излучения, распространяющегося в одном направлении. Все вышесказанное справедливо и для звуковых волн, и для волн в воде.

*Ограничение углового разброса пучка из-за дифракции.* Теперь возникает интересный и важный вопрос: можно ли создать пучок волн, который был бы ограниченной в сечении частью плоской волны? В таком пучке волна распространялась бы строго в одном направлении, и мы имели бы совершенно параллельный, ограниченный в сечении пучок, уходящий в бесконечность. Такой пучок создать *нельзя*. Сколь бы малым ни был источник в фокусе идеальной параболы, пучок не будет совершенно параллельным. Возьмем за основное направление ось $z$. Пусть «пространственная» ширина пучка (для данного $z$, например, сразу после рефлектора) равна $D$. В этом случае возникнет угловой разброс в направлениях распространения, и величина этого разброса, определяемая по половине максимальной интенсивности, будет порядка $\lambda/D$. (Это будет доказано ниже.)

Точно так же, если у нас имеется совершенно плоская волна от удаленного точечного источника, падающая на экран с отверстием диаметром $D$ (или на зеркало с линейными размерами $D$), то угловой разброс прошедшего через отверстие пучка (или пучка, отраженного от зеркала) имеет порядок $\lambda/D$. Угловой разброс может быть равен нулю только при $D$, равном бесконечности (или если $\lambda$ равно нулю). Говорят, что угловой разброс пучка *ограничен дифракцией*. На рис. 9.10 приведены примеры пучков. Заметим, что

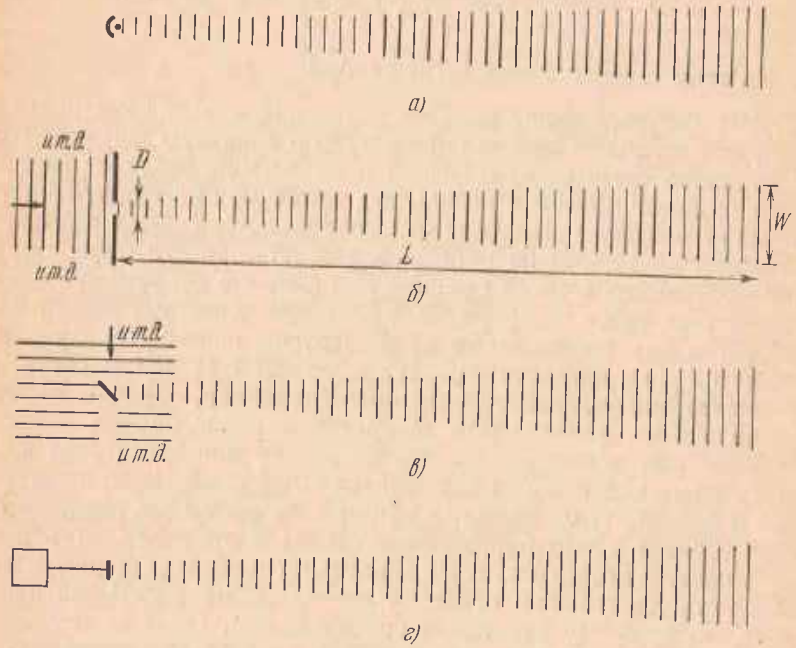



Рис. 9.10. Дифракция. Щель шириной $D$ создает угловой разброс $\approx \lambda/D$. Пучок, пройдя расстояние $L$, расширяется до $W \approx L\lambda/D$.

*а)* Пучок, созданный точечным источником и параболическим зеркалом. *б)* Пучок, созданный плоской волной, проходящей через отверстие в непрозрачном экране. *в)* Пучок, созданный плоской волной, отраженной от плоского зеркала. *г)* Пучок, испущенный плоским излучателем, все части которого колеблются в фазе.

если первоначальная ширина пучка равна $D$ и если были приложены все усилия, для того чтобы он был как можно более параллельным, то ширина пучка на большом расстоянии $L$ примерно равна первоначальной ширине плюс произведение $L$ на полный угловой разброс $\lambda/D$. Для достаточно больших $L$ мы можем пренебречь первоначальной шириной $D$. Таким образом,

$$\boxed{\text{Полный угловой разброс} = \Delta\theta \approx \frac{\lambda}{D}}, \qquad (39)$$

$$\text{Ширина пучка} = W \approx L\frac{\lambda}{D}. \qquad (40)$$



Каждая из четырех частей рис. 9.10 может соответствовать либо волнам на воде, либо звуковым, либо электромагнитным волнам (например, видимый свет с $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ *см* или микроволны с $\lambda = 10$ *см*).

*Пучок как интерференционный максимум.* Дадим грубый вывод формулы (39). (В п. 9.6 будет приведен точный вывод.) Заметим, что результат, который будет получен, не зависит ни от типа волны, ни от того, как волна образована. Мы можем, например, работать с простейшим источником, каким является плоский излучатель рис. 9.10, *г*. В случае звуковых волн это будет просто колеблющийся в воздухе поршень. В случае электромагнитных волн это может быть колеблющийся слой зарядов конечной протяженности, например плоская антенна.

В любом случае будем считать, что *весь излучатель* когерентен, т. е. все его элементы колеблются в фазе друг с другом. [Если это условие не выполняется, то угловой разброс будет больше того, что дает формула (39). В пределе, в случае некогерентного излучателя, пучок вообще не возникнет.] Для основного направления пучка точки поля, достаточно удаленные от излучателя, практически эквидистантны относительно всех частей излучателя. Таким образом, для этого направления мы будем иметь максимум, отвечающий конструктивной интерференции. Это условие и *определяет основное направление пучка*. (Если изменить разность фаз излучения элементов излучателя, то можно создать пучок, у которого основное направление не будет перпендикулярным поверхности излучателя. Этот случай показан на рис. 9.10, *в*, где на различные части зеркала, расположенного под углом 45° к падающей плоской волне, действует вынуждающая сила с различной фазой. В результате максимум конструктивной интерференции, т. е. направление отраженного пучка, не перпендикулярен поверхности зеркала, а подчиняется закону «зеркального отражения».)

*Угловой разброс пучка.* В удаленной точке поля, местоположение которой не находится точно в направлении пучка, нельзя получить полностью конструктивной интерференции. Чтобы найти положение первого нуля в интерференционной картине, разделим излучатель на две половины: верхнюю и нижнюю. Затем будем аппроксимировать его двумя когерентными точечными (или линейными) источниками. Один источник находится на половине длины верхней части антенны, а другой — на половине длины нижней ее части. Расстояние между источниками обозначим $D/2$. Первый интерференционный нуль (первый нуль с любой стороны главного максимума, определяемого направлением пучка) возникает при разности хода лучей от источников в $^1/_2\lambda$, т. е. когда $^1/_2 D \sin\theta$ равно $^1/_2\lambda$. Для малых углов, положив $\sin\theta = \theta$, имеем

$$\boxed{\text{Половина углового расстояния до первого нуля} = \frac{\lambda}{D}}. \qquad (41)$$

Рис. 9.11 иллюстрирует сказанное. В каком направлении образуется следующий максимум? Если бы точки $S_1$ и $S_2$ (рис. 9.11) на самом деле соответствовали точечным источникам, то следующий максимум возник бы при разности хода лучей от второго и первого источников, равной длине волны $\lambda$. Однако, хотя разность фаз точечных источников, которыми мы заменим верхнюю и нижнюю половины излучателя, равна нулю, вклады от обеих половин источника в образование следующего максимума равны нулю. Это происходит потому, что если снова разделить верхнюю и нижнюю половины пополам, так что весь излучатель будет разделен уже на четыре части, то вклад от первой четверти излучателя будет сдвинут на 180° относительно вклада от второй четверти и компенсирует его полностью. То же можно сказать про вклады от третьей и четвертой четвертей. Таким образом, первый боковой максимум появляется в действительности не тогда, когда имеются две половины со вкладами, отличающимися по фазе на $2\pi$ (так как в этом случае можно говорить, что мы имеем четыре смежных источника со вкладами, последовательно отличающимися по фазе на $\pi$), а в том случае, когда излучатель можно представить в виде трех третей, причем смежные трети отличаются по фазе на $\pi$. Две из трех третей компенсируют друг друга, а третья треть остается. Поэтому амплитуда первого побочного максимума меньше, чем амплитуда главного максимума, по меньшей мере в $^1/_3$ (в действительности при учете разности фаз в оставшейся одной трети излучателя мы получим еще меньшую величину). Таким образом, мы видим, что боковой максимум имеет меньшую амплитуду по сравнению с центральным максимумом, что и определяет направление пучка. При исследовании точной интерференционной картины мы найдем, что половина углового расстояния до первого нуля равна полному угловому разбросу, измеренному примерно на половине максимальной интенсивности. Именно так мы и определили угловой разброс пучка в формуле (39). Таким образом, мы довольно грубо вывели уравнение (39). (Точный результат показан на рис. 9.14, п. 9.6.)

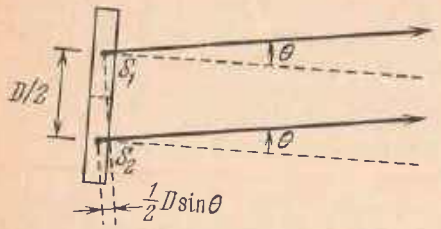


Рис. 9.11. Плоский излучатель.
Источник $S_1$ соответствует вкладу от верхней, $S_2$ — от нижней половины излучателя.

Приложение. *Сравнение луча лазера и луча карманного фонарика.* Предположим, что мы имеем ограниченный дифракцией лазерный пучок диаметром $D = 2$ *мм* при длине волны 6000 Å. Чему будет равен диаметр пучка на расстоянии 150 *м*? Угловой разброс пучка равен

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{D} \approx \frac{6\cdot 10^{-5}}{0{,}2} \approx 3\cdot 10^{-4}\ \textit{рад}.$$



Произведение углового разброса на расстояние $L = 1500$ *см* даст пространственный разброс $W = (1500)(3\cdot 10^{-4}) = 0{,}5$ *см* $= 5$ *мм*. (Это легко продемонстрировать в аудитории.)

Рассмотрим теперь луч карманного фонарика или световой указки в виде фонарика. Пусть этот пучок, с начальным диаметром 2 *мм*, образован точечной нитью, расположенной в фокусе линзы. Каким должен быть размер нити, чтобы пучок света от этого фонарика был ограничен дифракцией? Если нить не точечная, то различные ее части будут давать независимые пучки. Нетрудно показать, что угловой разброс, вызванный конечными размерами нити, примерно равен длине нити, деленной на фокусное расстояние $f$ линзы:

$$\Delta\theta \approx \frac{\Delta x}{f}.$$

Мы хотим, чтобы пучок фонарика с начальной шириной 2 *мм* был ограничен только дифракцией. Для этого нужно, чтобы угловой разброс, возникающий из-за конечных размеров нити, был меньше углового разброса из-за дифракции. Последний, в соответствии со сделанными выше вычислениями, равен $3\cdot 10^{-4}$ *рад*. У обычного фонарика нить находится на расстоянии 0,5 *см* от линзы, т. е. $f \approx 0{,}5$ *см*, и мы получаем следующую оценку размера нити:

$$\Delta x < f\,\Delta\theta \approx (0{,}5)(3\cdot 10^{-4}) \approx 1{,}5\cdot 10^{-4}\ \textit{см}.$$

Сделать столь малую нить вряд ли возможно.

### 9.6. Дифракция и принцип Гюйгенса

*Различие между интерференцией и дифракцией.* В п. 9.5 мы рассмотрели угловой разброс пучка из-за дифракции и произвели грубый расчет дифракционной картины при падении плоской волны на отверстие в непрозрачном экране (рис. 9.10, *б*) или на зеркало (рис. 9.10, *в*), а также в случае плоского излучателя (рис. 10, *г*). До этого мы рассматривали интерференционную картину, образованную двумя точечными или линейными источниками. В чем различие между интерференционной и дифракционной картинами?

Реального различия между ними нет. В силу исторических причин распределение амплитуды или интенсивности, появляющееся вследствие суперпозиции вкладов от конечного числа отдельных когерентных источников, обычно называется *интерференционной* картиной. Распределение амплитуды или интенсивности, вызванное суперпозицией вкладов от расположенных «непрерывно» друг за другом когерентных источников, называют *дифракционной* картиной. Поэтому говорят об интерференционной картине от двух узких щелей и о дифракционной картине от одной широкой щели или о комбинированной (интерференционной и дифракционной) картине от двух широких щелей.

В п. 9.5 мы предположили, что ограниченный дифракцией пучок, возникающий при падении плоской волны на отверстие

(апертуру) в экране (рис. 9.10, *б*), эквивалентен пучку от плоского излучателя, размер которого равен величине отверстия, а все излучающие элементы колеблются в фазе и с одинаковой амплитудой (рис. 9.10, *д*). В этом пункте мы попытаемся доказать справедливость нашего предположения. Мы увидим, что, хотя предположение об эквивалентности апертуры и источника не совсем точно, оно является удобным приближением, значительно упрощающим вычисление дифракционной картины. Это предположение справедливо, пока размеры апертуры значительно больше длины волны. Предположение об эквивалентности облегчает расчет излучения, испущенного не под очень большими углами относительно основного направления пучка. Методика таких вычислений (основанная на замене апертуры соответствующим плоским излучателем), позволяющая определить интерференционную картину для определенного сечения пучка $z$, называется *построением Гюйгенса*. Мы пользуемся им для вычисления дифракционной картины, возникающей при падении плоской волны (например, от удаленного точечного источника) на отверстие в непрозрачном экране.

*Действие непрозрачного экрана.* Любое электромагнитное излучение связано с колебанием заряженных частиц. Полное электрическое (и магнитное) поле в любой точке представляет собой суперпозицию волн, образованных всеми источниками, т. е. всеми колеблющимися зарядами. В нашей задаче мы имеем один удаленный точечный источник, который дает падающую на экран плоскую волну. Полная амплитуда волны за непрозрачным экраном равна нулю по определению (экран непрозрачный). Эта полная амплитуда представляет собой суперпозицию волны от источника $S$ и волн, испущенных колеблющимися электронами в веществе экрана. Экран не пропускает падающую волну. Это значит, что суперпозиция всех волн, т. е. волн от источника $S$ и волн от возбужденных падающим излучением электронов экрана (электроны возбуждаются также вследствие излучения от других электронов), дает за экраном нулевую амплитуду.

Если это кажется странным, то вспомните, почему статическое электрическое поле внутри металлического проводника равно нулю. Проводник не «съедает» внешнее поле. Когда в это поле вносят проводник, заряды в проводнике перемещаются до тех пор, пока суперпозиция полей от поверхностных зарядов и внешнего поля не приведет к отсутствию поля в проводнике. Все электромагнитные поля происходят от заряженных частиц, и нулевое поле, возникающее за непрозрачным экраном, является результатом суперпозиции.

Если вы будете представлять себе электрические силовые линии от заряженной частицы как небольшой поток «пуль», движущихся от точечного заряда со скоростью света, то это может привести к трудностям. «Пули» не подчиняются принципу суперпозиции. Два таких потока не могут пройти друг через друга без взаимодействия. Суперпозиция двух «пуль» не может дать нуля. С точки зрения такого ошибочного представления об электрическом поле вы будете рассматривать действие металлического проводника на электростатическое поле, в котором он находится, как действие брони на поток пуль. Точно так же было бы ошибкой считать, что экран, на который падает свет, представляет собой некую броню, останавливающую и поглощающую свет, превращая его в тепло (если экран черный), или отражающую «пули» назад (если поверхность экрана блестящая). Эта картина неверна, и если вы именно так представляете себе механизм взаимодействия излучения с экраном, то постарайтесь избавиться от этого неверного представления.



*Блестящий и черный непрозрачные экраны.* При выборе непрозрачного экрана возможны два крайних случая. Он может иметь блестящую поверхность (например, непрозрачная алюминиевая фольга). Электроны в металле находятся под действием электрического поля; соответственно они излучают электромагнитные волны. Оказывается, что в прямом направлении (направление падающей волны) суперпозиция падающей волны и волн от возбужденных электронов экрана будет равна нулю. В обратном направлении мы получим отраженную волну. Вдали от резонанса движение данного электрона полностью определяется упругой амплитудой, скорость сдвинута по фазе на 90° относительно полного электрического поля в месте расположения заряда, и поэтому над электроном в течение любого полного цикла работа не совершается. (Электрон только меняет направление падающего излучения, не поглощая энергию.)

Другой крайний случай,— это когда поверхность непрозрачного экрана, на которую падает излучение, черная (например, черный картон или предметное стекло микроскопа, покрытое слоем аквадака). Здесь электроны также находятся под действием падающего излучения. Электроны испытывают активную силу сопротивления со стороны среды и всегда имеют предельную скорость *). Излучение электронов в прямом направлении сдвинуто по фазе на 180° относительно падающего излучения, и поэтому суперпозиция в этом направлении дает нуль (после того как излучение проникнет в некоторую толщу экрана). Скорость электрона всегда в фазе с полным электрическим полем в месте расположения электрона, и электрическое поле совершает над электроном вполне определенную работу. Эта работа переходит в тепло, и температура среды (экрана) повышается. Отраженной волны не возникает: суперпозиция вкладов от отдельных слоев экрана в обратном направлении дает нуль.

*Действие отверстия в непрозрачном экране.* Вырежем небольшое отверстие (или щель) в нашем непрозрачном экране. Щель обозначим индексом *1* и соответственно материал, который нужно вырезать для образования щели, обозначим как «пробка *1*». Материал экрана выше и ниже пробки *1* обозначим соответственно через

*) См. Д. 9., стр. 493.

$a$ и $b$. Полное поле за экраном, которое равно нулю, является суперпозицией полей, излучаемых источником $S$, частями экрана $a$ и $b$ и пробкой *1*. Таким образом, пока пробка еще не вынута, имеем

$$E = 0 = E_S + E_a + E_b + E_1. \qquad (42)$$

Эта ситуация показана на рис. 9.12.

Теперь вытащим пробку. *Предположим*, что после этого движение электронов в частях экрана $a$ и $b$ не изменилось. (Это предположение

Рис. 9. 12. Плоские волны от далекого точечного источника падают на непрозрачный экран. Нулевая интенсивность за экраном является результатом суперпозиции полей от $S$ и от частей экрана $a$ и $b$ и пробки *1*.

является некоторым приближением, поскольку на электроны в частях экрана $a$ и $b$ действует общее поле, включающее в себя и поле, излучаемое электронами пробки. Наибольшее влияние излучение от электронов пробки будет оказывать на электроны в $a$ и $b$, находящиеся на расстоянии нескольких длин волн от края щели, поскольку интенсивность излучения быстро падает с увеличением расстояния от электрона.) Теперь поле за экраном не будет больше определяться суперпозицией (42). Чтобы получить это поле, нужно из суперпозиции (42) вычесть поле, создаваемое пробкой *1*, т. е. $E_1$. Имеем

$$E = E_S + E_a + E_b = (E_S + E_a + E_b + E_1) - E_1 \approx 0 - E_1 \approx -E_1. \qquad (43)$$

Таким образом, поле за экраном, равное суперпозиции вкладов от источника и от оставшихся частей экрана $a$ и $b$, совпадает (с точностью до знака) с полем, испускаемым одной пробкой, помещенной между $a$ и $b$. Итак, мы можем считать, что поле за экраном, созданное источником и экраном со щелью, равно полю от более простой системы, состоящей только из пробки *1*, причем все электроны пробки колеблются в фазе и с равной амплитудой. Такое представление дает возможность легко вычислить интерференционную картину от непрозрачного экрана со щелью. Легкость связана



с тем, что нас не интересует зависимость амплитуды и фазы колеблющихся электронов в пробке от их положения в пробке. (Мы предполагаем, что экран имеет конечную толщину.) Если бы мы знали, какова эта зависимость, мы могли бы оценить излучение от пробки в обратном направлении, т. е. мы могли бы различать блестящий и черный непрозрачные экраны. Вместо этого мы предполагаем, что поле $E_1$ образовано бесконечно тонким слоем колеблющихся зарядов на пробке и все заряды колеблются с одинаковой фазой и амплитудой.

*Принцип Гюйгенса*. Описанная выше замена источника и экрана со щелью простым излучателем (пробкой с зарядами на поверхности) в месте расположения щели называется *принципом Гюйгенса*. Этот принцип может быть использован как для любого числа щелей, так и для одной широкой щели. Заметим, что такая замена дает правильную интерференционную картину только за экраном. *Реальная* «излучающая пробка», т. е. антенна в виде плоской пластины, излучает во всех направлениях. *Реальный* непрозрачный экран с отверстием (щелью) излучает слабо или сильно в обратном направлении в зависимости от того, является ли поверхность, на которую падает излучение, черной или блестящей. Принцип Гюйгенса не позволяет вычислить поле слева от экрана (излучение на рис. 9.12 падает на экран слева), так как мы пренебрегли изменениями амплитуды и фазы, возникающими между передней и задней поверхностями пробки. Эти изменения зависят от того, является ли поверхность, на которую падает излучение, блестящей или черной.

Необходимо еще одно замечание. В уравнении (43) мы предположили, что поля $E_a$ и $E_b$ одинаковы как с пробкой, так и без нее. Как упоминалось выше, это является приближением. Допустим, что мы имеем одну широкую щель и используем принцип Гюйгенса для вычисления поля справа от экрана и поля непосредственно в самой щели. Если мы находимся достаточно далеко справа от экрана и не очень смещены относительно прямого направления, проведенного через центр щели, и если ширина экрана равна многим длинам волн, то принцип Гюйгенса дает очень хорошее приближение. Если же мы ищем поле в непосредственной близости от щели, то вычисления, сделанные с помощью принципа Гюйгенса, будут очень грубыми. На поле непосредственно в самой щели решающее действие оказывает движение зарядов в экране, находящихся около краев щели. Но именно на этом движении зарядов больше всего сказывается удаление пробки. Поэтому в самой щели и особенно у ее краев картина поля может быть очень сложной. Вы спросите: а почему не решить эту задачу точно? Дело в том, что сделать это очень трудно. Вы должны применить уравнения Максвелла для всех областей вакуума и вещества, точно задать свойства материала и верно определить граничные условия. Не существует общих методов решения этой задачи, и лишь для нескольких задач такого рода было получено точное решение.

*Использование построения Гюйгенса для вычисления дифракционной картины от одной щели.* Мы хотим вычислить дифракционную картину для случая, когда плоская волна (испущенная удаленным точечным источником) падает на щель. Используя построение Гюйгенса, мысленно заменим падающую плоскую волну (или удаленный точечный источник) и материал экрана излучающей пластиной, т. е. «пробкой» Гюйгенса. Поскольку распределение колеблющихся зарядов вдоль пластины непрерывно, мы должны будем при оценке действия пластины произвести интегрирование (т. е. вычислить суперпозицию) по вкладам от всех бесконечно малых элементов пластины. Вместо интегрирования мы можем (и

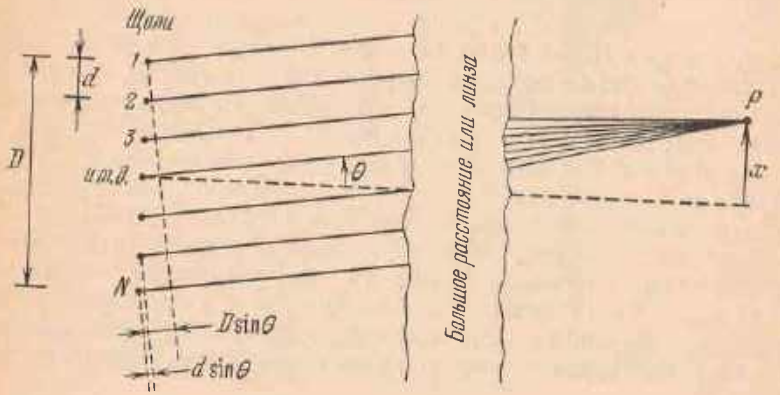



Рис. 9.13. $N$ антенн или $N$ узких щелей с зарядами, колеблющимися в фазе.

будем) рассматривать дискретную сумму, образованную вкладами от $N$ одинаковых, находящихся на равном расстоянии друг от друга «антенн». В пределе, устремив $N$ к бесконечности, мы получим непрерывное распределение излучающих источников. (Преимущество в использовании дискретных, а не непрерывно распределенных источников заключается в том, что мы одновременно получаем дифракционную картину от $N$ антенн или $N$ узких щелей для произвольного $N$ от $N=2$ до бесконечности.)

Пусть полная ширина широкой щели равна $D$. В этом случае $D$ представляет собой ширину области, содержащей нашу линейную группу из $N$ антенн Гюйгенса. Пусть расстояние между соседними антеннами равно $d$, тогда $D=(N-1)d$. Будем считать, что плоская волна распространяется в положительном направлении оси $z$ и $N$ узких щелей расположены по оси $x$ (рис. 9.13).

В далекой точке поля $P$ каждая антенна дает вклад, имеющий одинаковую амплитуду $A(r)$ (точка $P$ достаточно удалена, и мы можем считать, что она находится на приблизительно одинаковом расстоянии от всех антенн). Далее, все антенны излучают с одинаковой фазой (по предположению). Электрическое поле в точке $P$



равно следующей сумме:

$$E=A(r)\cos(kr_1-\omega t)+A(r)\cos(kr_2-\omega t)+\ldots \\ \ldots+A(r)\cos(kr_N-\omega t). \quad (44)$$

Мы хотим представить эту суперпозицию $N$ бегущих волн одной бегущей волной, распространяющейся (выходящей) из среднего положения группы антенн, амплитуда которой зависит от угла испускания. (Именно так мы поступали, рассматривая интерференционную картину от двух источников в п. 9.2. Там для $N=2$ мы получили такой же результат.) Мы можем упростить алгебраические выкладки, используя комплексное представление колебаний. Поле $E$ является реальной частью комплексной величины

$$E_c=A(r)\,e^{-i\omega t}\,(e^{ikr_1}+e^{ikr_2}+\ldots+e^{ikr_N}). \quad (45)$$

В соответствии с рис. 9.13 имеем

$$\left.\begin{aligned} r_2&=r_1+d\sin\theta,\\ r_3&=r_1+2d\sin\theta,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_N&=r_1+(N-1)\,d\sin\theta. \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

С учетом равенств (46) уравнение (45) можно переписать так:

$$E_c=A(r)\,e^{-i\omega t}e^{ikr_1}\,(1+e^{ik(r_2-r_1)}+e^{ik(r_3-r_1)}+\ldots)= \\ =A(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1}\,S, \quad (47)$$

где

$$S\equiv 1+e^{ik(r_2-r_1)}+e^{ik(r_3-r_1)}+\ldots=1+a+a^2+\ldots+a^{N-1} \quad (48)$$

и

$$a\equiv e^{ik(r_2-r_1)}=e^{ik(d\sin\theta)}=e^{i\Delta\varphi}. \quad (49)$$

Разность фаз $\Delta\varphi$ для волн в точке $P$ от двух соседних антенн равна

$$\Delta\varphi=kd\sin\theta=\frac{2\pi}{\lambda}\,d\sin\theta. \quad (50)$$

Для геометрической прогрессии $S$ [уравнение (48)] справедливо соотношение

$$aS-S=a^N-1,$$

т. е.

$$S=\frac{a^N-1}{a-1}=\frac{e^{iN\Delta\varphi}-1}{e^{i\Delta\varphi}-1}=\frac{e^{i(1/2)N\Delta\varphi}}{e^{i(1/2)\Delta\varphi}}\,\frac{\left[e^{i(1/2)N\Delta\varphi}-e^{-i(1/2)N\Delta\varphi}\right]}{\left[e^{i(1/2)\Delta\varphi}-e^{-i(1/2)\Delta\varphi}\right]}= \\ =e^{i(1/2)(N-1)\Delta\varphi}\,\frac{\sin{}^1\!/_2N\Delta\varphi}{\sin{}^1\!/_2\Delta\varphi}. \quad (51)$$

Тогда уравнение (47) можно переписать так:

$$E_c=A(r)\,e^{-i\omega t}e^{ik[r_1+(1/2)(N-1)\,d\sin\theta]}\,\frac{\sin{}^1\!/_2N\Delta\varphi}{\sin{}^1\!/_2\Delta\varphi}= \\ =A(r)\,e^{-i\omega t}e^{ikr}\,\frac{\sin{}^1\!/_2N\Delta\varphi}{\sin{}^1\!/_2\Delta\varphi}, \quad (52)$$

где величина

$$r \equiv r_1 + {}^1/_2 (N-1)\, d \sin\theta = r_1 + {}^1/_2 D \sin\theta. \qquad (53)$$

определяет расстояние от точки $P$ до центра группы антенн. Взяв реальную часть выражения (52), получим для поля в точке $P$

$$E(r,\ \theta,\ t) = \left[\frac{A(r) \sin {}^1/_2 N\, \Delta\varphi}{\sin {}^1/_2\, \Delta\varphi}\right] \cos(kr - \omega t) \equiv$$

$$\equiv A(r,\ \theta) \cos(kr - \omega t). \qquad (54)$$

Покажем, что для $N = 2$ уравнение (54) дает такой же результат, что и уравнения (12) и (13) в п. 9.2. Используя равенства $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, где $x = \Delta\varphi/2$, имеем

$$E(r,\ \theta,\ t) = A(r) \frac{2 \sin {}^1/_2 \Delta\varphi \cos {}^1/_2 \Delta\varphi}{\sin {}^1/_2\, \Delta\varphi} \cos(kr - \omega t) =$$

$$= [2A \cos {}^1/_2\, \Delta\varphi] \cos(kr - \omega t),$$

что согласуется с результатами, полученными раньше.

*Дифракционная картина от одной щели.* Устремим $N$ к бесконечности, не меняя ширины щели $D$. Расстояние $d$ при этом стремится к нулю. Разность фаз $\Delta\varphi$ между колебаниями двух соседних антенн также стремится к нулю. Полный сдвиг фаз $\Phi$ между колебаниями первой и $N$-й антенн в точке $P$ точно равен $(N-1)\,\Delta\varphi$. При большом $N$ фазовый сдвиг можно считать приблизительно равным $N\,\Delta\varphi$:

$$\Phi = (N-1)\,\Delta\varphi = kD \sin\theta, \qquad (55)$$

$$\Phi \approx N\,\Delta\varphi, \quad N \gg 1. \qquad (56)$$

Модулированная амплитуда [равенство (54)] равна

$$A(r,\ \theta) = A(r) \frac{\sin {}^1/_2 N\, \Delta\varphi}{\sin {}^1/_2\, \Delta\varphi} \approx A(r) \frac{\sin {}^1/_2 \Phi}{\sin [{}^1/_2\, (\Phi/N)]}. \qquad (57)$$

В пределе, когда $N$ достаточно велико, мы можем пренебречь в разложении $\sin [{}^1/_2\, (\Phi/N)]$ в уравнении (57) в ряд Тейлора всеми членами, кроме первого:

$$\sin {}^1/_2 \frac{\Phi}{N} \approx {}^1/_2 \frac{\Phi}{N}, \qquad (58)$$

$$A(r, \theta) = NA(r) \frac{\sin {}^1/_2 \Phi}{{}^1/_2 \Phi}. \qquad (59)$$

Сделаем еще одно упрощение. По мере того, как $N$ устремляется к бесконечности, мы должны устремить $A(r)$ к нулю, но при этом произведение $NA(r)$ должно оставаться постоянным, поскольку мы хотим иметь одинаковый вклад от данного бесконечно малого элемента $dx$ непрерывной группы источников независимо от того, сколько антенн содержит группа. (Напомним, что мы используем антенны Гюйгенса.) Заметим, что когда $\theta$ стремится к нулю, то и $\Phi$ стремится к нулю, а отношение $\sin {}^1/_2 \Phi / {}^1/_2 \Phi$ стремится к единице:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{1}{6} x^3 + \ldots}{x} = 1 - \frac{1}{6} x^2 + \ldots = 1 \quad \text{для} \quad x = 0.$$



В соответствии с уравнением (59) $A(r,\ 0) = NA(r) \cdot 1$, и окончательно получим

$$E(r,\ \theta,\ t) = A(r,\ 0) \left[\frac{\sin {}^1/_2 \Phi}{{}^1/_2 \Phi}\right] \cos(kr - \omega t), \qquad (60)$$

где

$$\Phi = 2\pi \frac{D \sin\theta}{\lambda}. \qquad (61)$$

Угловая зависимость (при заданном $r$) среднего во времени потока энергии получается из уравнения (60):

$$I(r,\ \theta) = I_{\text{макс}} \frac{\sin^2 {}^1/_2 \Phi}{({}^1/_2\, \Phi)^2}. \qquad (62)$$

Распределения амплитуды и интенсивности показаны на рис. 9.14.

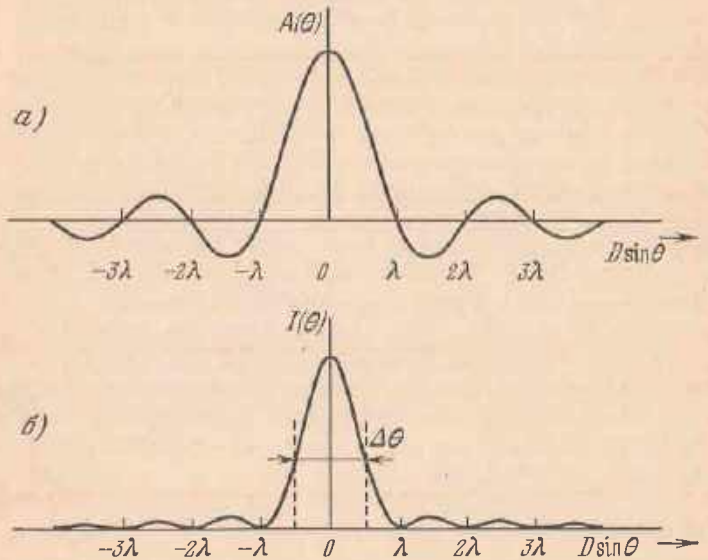



Рис. 9.14. Дифракция от одной щели.

*а)* Амплитуда. *б)* Интенсивность. Угловой интервал $\Delta\theta$, простирающийся от $-{}^1/_2 \lambda/D$ до $+{}^1/_2 \lambda/D$, приблизительно отвечает (для малых углов) «полной ширине для половинной интенсивности». Более точно, интенсивность на границах интервала составляет $(2/\pi)^2 = 0{,}41$ интенсивности в максимуме.

*Угловой разброс пучка, ограниченного дифракцией.* Теперь мы можем подтвердить полученный в п. 9.5 результат, согласно которому пучок шириной $D$ имеет угловой разброс порядка $\lambda/D$. Точная зависимость амплитуды и интенсивности от угла $\theta$ показана на рис. 9.14. Основное свойство графика интенсивности заключается в том, что интенсивность велика только в интервале углов между $\theta = -{}^1/_2 \lambda/D$ и $\theta = +{}^1/_2 \lambda/D$:

$$\Delta\theta = \lambda/D. \qquad (63)$$

Простейший способ наблюдения дифракционной картины от одной щели состоит в следующем. Возьмите два маленьких куска

бумаги с прямыми краями и расположите куски бумаги (в руках) так, чтобы края были параллельны, т. е. чтобы образовалась щель. Посмотрите через эту щель на точечный или линейный источник так, чтобы щель была параллельна источнику. Расположите щель близко перед глазами. Изменяйте ширину щели от «нуля» до «бесконечности», где «нуль» — это нуль, а «бесконечность» — это примерно 1 *мм*. Хорошую щель можно получить, смотря между зубцами обычной обеденной вилки. Расположите вилку близко перед глазами. Расстояние между зубцами вилки слишком велико, поэтому вы должны поворачивать ее до тех пор, пока *проекция* этого расстояния не станет достаточной малой. Поворачивая вилку, вы можете менять величину проекции и наблюдать за изменением интерференционной картины. С помощью быстрых (и грубых) измерений можно (грубо) проверить справедливость уравнения (63). См. домашний опыт 9.17.

*Разрешающая способность глаза.* Возьмите миллиметровую шкалу или сделайте метки на листе белой бумаги и найдите расстояние от бумаги до глаза, на котором метки покажутся совпадающими друг с другом, т. е. неразрешимыми. Обычно, если расстояние между метками равно 1 *мм*, то они плохо разрешимы на расстоянии в 2 *м* и совсем неразрешимы на расстояния 4 *м*. Таким образом, если глаз находится в центре поля зрения (т. е. когда вы смотрите прямо на линии), то предельное значение углового разрешения близко к $\Delta\theta \approx 1$ *мм*/2 *м* = 1/2000. Теперь посмотрите в зеркало и с помощью линейки, расположенной близко к глазу, измерьте диаметр $D$ вашего зрачка. Обычно $D \approx 2$ *мм*. Дифракционный предел углового разрешения вашего глаза определяется угловым размером изображения пятна от падающей плоской волны, испущенной удаленным точечным источником, на сетчатке глаза. Полный угловой разброс изображения удаленной точки равен

$$\Delta\theta\,(\text{дифракционный предел}) \approx \frac{\lambda}{D} \approx \frac{5{,}5\cdot 10^{-5}\ см}{0{,}2\ см} \approx \frac{1}{4000}.$$

Таким образом, наш глаз (и мозг) воспринимает две точки как разрешенные, если угловое расстояние между ними равно удвоенному значению дифракционной ширины.

Для того чтобы доказать, что (грубое) согласие между разрешающей способностью глаза и углом дифракции не случайно, повторите описанный опыт, но смотрите через дырочку, сделанную, например, в листе бумаги. Если диаметр вашего зрачка равен 2 *мм*, то диаметр дырочки должен быть 1 *мм*. Ухудшится ли при этом угловое разрешение вашего глаза? Во сколько раз?

*Критерий Рэлея.* Если угловое расстояние между двумя точками равно дифракционной ширине $\lambda/D$, то, в соответствии с рис. 9.14,*б*, максимум интенсивности от одной точки будет совпадать с первым минимумом на графике интенсивности для второй точки. В этом случае точки еще разрешимы. Этот *критерий разрешимости* носит название *критерия Рэлея*.



Ширина изображения точки на вашей сетчатке примерно равна произведению фокусного расстояния линзы (хрусталика) вашего глаза на угловую ширину изображения точки. Фокусное расстояние $f$ приблизительно равно внутреннему диаметру глаза. Когда вы смотрите на удаленный объект, этот диаметр равен примерно 3 *см*. Поэтому ширина изображения пятна на сетчатке от удаленной точки близка к $f\,(\lambda/D) = 3\cdot 5\cdot 10^{-5}/0{,}2 \approx 8$ *мкм*. Тот факт, что разрешающая способность нашего глаза ограничена дифракционным пределом, говорит о том, что фоторецепторы в центре сетчатки отделены друг от друга расстоянием, не большим чем 8 *мкм*.

Один астронавт, летавший вокруг Земли на расстоянии 240 *км*, утверждал, что он мог различать отдельные дома в деревнях, когда пролетал над ними. Верите ли вы ему?

*Терминология. Дифракция Фраунгофера и дифракция Френеля.* При рассмотрении дифракционной картины от щели или отверстия мы предполагали, что имеем приходящую плоскую волну (от далекого точечного источника $S$). Мы также считали, что регистрируем излучение, испускаемое щелью под определенным *углом*. Это значит, что мы рассматривали суперпозицию волн, распространяющихся по параллельным направлениям к точке детектирования $P$, и либо $P$ находится очень далеко от щели, либо мы используем линзу (например, хрусталик глаза), чтобы сфокусировать волны в точку $P$ (расположенную, например, на сетчатке глаза). Дифракция, наблюдаемая при выполнении двух этих условий — плоская падающая волна и дифрагированная волна, испущенная в заданном направлении,— называется *дифракцией Фраунгофера*. Если линзы не используются, то для выполнения этих условий точечный источник $S$ и детектор $P$ должны находиться в «далекой зоне» щели. Чтобы определить, находится ли источник $S$ (например) в «далекой зоне», допустим, что щель расположена в плоскости, перпендикулярной линии от источника до центра щели. Рассмотрим пространственные конусы, вершины которых — в источнике $S$, а образующие соединяют $S$ со всеми точками площади щели. Если длины образующих практически одинаковы, то $S$ находится в «далекой зоне» щели. Под «практически одинаковыми» длинами мы подразумеваем различие в длине, меньшее $^1/_2\lambda$. В этом случае фронт волны, падающей на щель, можно считать плоским. Аналогичная оценка справедлива и для точки $P$, в которой расположен детектор.

Нетрудно показать, что для щели с шириной $D$ точка, находящаяся на расстоянии $L$, будет в далекой зоне, если выполнено условие

$$L\lambda \gg (^1/_2\, D\cos\theta)^2,$$

где $^1/_2 D\cos\theta$ — проекция половины ширины щели на направление, перпендикулярное линии, соединяющей щель с точкой. Если одно из двух условий, необходимых для дифракции Фраунгофера, не выполняется (т. е. или точечный источник $S$, или точка детектирования $P$ не находятся в далекой зоне щели), то мы имеем

случай дифракции, называемой *дифракцией Френеля* (рассматривать этот случай детально мы не будем).

*Фурье-анализ выражения для угловой расходимости когерентного источника.* Результат, выражаемый равенством (63), можно представить в несколько ином виде. Введем в рассмотрение отдельную частотную компоненту бегущей волны и будем считать ее совершенно монохроматичной. В этом случае полоса частот $\Delta\omega$ равна нулю. Что можно сказать о векторе распространения? Квадрат вектора распространения равен $k^2 = \omega^2/c^2$ (для света в вакууме). Поэтому $k^2$ должно иметь совершенно определенное значение, если значение $\omega^2$ известно. Но это не значит, что каждая компонента k должна иметь определенное значение. Величина $k^2$ равна сумме квадратов соответствующих компонент:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \tag{64}$$

где $k_x$ определяет число радиан фазы на единицу длины вдоль оси $\hat{\mathbf{x}}$, соответственно $k_y$ — вдоль $\hat{\mathbf{y}}$ и $k_z$ — вдоль $\hat{\mathbf{z}}$. Если пучок не ограничен дифракцией, а представляет собой плоскую волну, распространяющуюся вдоль $+z$, то $k_x$ и $k_y$ будут равны нулю. Для фурье-компоненты (т. е. составляющей с определенной частотой) ограниченного дифракцией пучка с вектором распространения в плоскости $xz$, образующим угол $\theta$ с осью $z$, имеем $k_y = 0$, $k_x = k\sin\theta$ и $k_z = k\cos\theta$. Для малых углов $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$. Итак, $x$-компонента вектора k равна

$$k_x \approx k\theta. \tag{65}$$

Но мы уже видели, что угловой разброс пучка относительно основного направления $z$ равен

$$\Delta\theta \approx \lambda/D. \tag{66}$$

Поэтому разброс значений $k_x$ равен [используем равенства (65) и (66)]

$$\Delta k_x \approx k\,\Delta\theta \approx k\lambda/D = 2\pi/D.$$

Обозначив полную ширину пучка $D$ в направлении $x$ через $\Delta x$, получим

$$\boxed{\Delta k_x\,\Delta x \geqslant 2\pi.} \tag{67}$$

Неравенство напоминает нам о том, что дифракционный предел достигается лишь в том случае, если источники когерентны.

Выразим сказанное в более явном виде. В соответствии с построением Гюйгенса мы должны рассмотреть излучающую пластину, состоящую из источников, равномерно распределенных вдоль оси $x$ от $x = -D/2$ до $x = +D/2$. Все источники имеют одинаковую амплитуду и фазовую постоянную. График зависимости амплитуды источников от $x$ обращается в нуль всюду, за исключением области шириной $D$, центр которой в начале координат. Таким образом, по координате $x$ мы имеем дело с «прямоугольной волной».



Мы можем применить к этой «волне» (импульсу) фурье-анализ и представить ее в виде суперпозиции синусоидальных функций $\sin k_x x$ и $\cos k_x x$ точно так же, как это было сделано для прямоугольного временного импульса, который был разложен по функциям $\cos\omega t$. Выражение (6.95) из п. 6.4 дает преобразование Фурье для временного прямоугольного импульса $f(t)$ с высотой $1/\Delta t$ и шириной $\Delta t$:

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin {}^1/_2\omega\,\Delta t}{{}^1/_2\omega\,\Delta t}. \tag{68}$$

По аналогии прямоугольный импульс $f(x)$ протяженностью $D$ и высотой $1/D$ должен иметь следующее преобразование Фурье:

$$B(k_x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin {}^1/_2 k_x D}{{}^1/_2 k_x D}, \tag{69}$$

но

$$k_x D = kD\sin\theta = \Phi. \tag{70}$$

Поэтому

$$B(k_x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin {}^1/_2\Phi}{{}^1/_2\Phi}. \tag{71}$$

Сравнивая уравнения (71) и (60), мы видим, что амплитуда поля, регистрируемого под углом $\theta$ (который задан через $k_x$), равна (с точностью до постоянного множителя) фурье-преобразованию амплитуды источника в щели (т. е. фурье-преобразованию прямоугольного импульса). В щели амплитуда колебаний равна $f(x)\cos\omega t$, где $f(x)$ — сила источника (для нашего случая сила источника постоянна по всей ширине щели). На расстоянии $r$ и в направлении $\theta$ бегущая волна получается заменой $\cos\omega t$ на $\cos(\omega t - kr)$ и $f(x)$ — на фурье-преобразование $B(k_x)$. Другой поперечный размер пучка $y$ удовлетворяет соотношению, аналогичному уравнению (67), но с заменой $x$ на $y$.

*Важные результаты фурье-анализа.* Учитывая результаты фурье-анализа для продольной компоненты $k_z$ волнового вектора, а также результаты частотного фурье-анализа, имеем

$$\left.\begin{aligned} \Delta k_x\,\Delta x \geqslant 2\pi, \quad \Delta k_z\,\Delta z \geqslant 2\pi, \\ \Delta k_y\,\Delta y \geqslant 2\pi, \quad \Delta\omega\,\Delta t \geqslant 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Фурье-анализ дает нам мощный метод вычисления дифракционной картины. Однако здесь мы не будем этим заниматься (см. задачу 9.59).

*Дифракционная картина от двух широких щелей.* Две параллельные щели можно получить следующим образом. Плотно прикрепите лентой скотча или приклейте по краям предметного стекла микроскопа кусок тонкой алюминиевой фольги. Используя, например, в качестве линейки второе предметное стекло микроскопа, осторожно процарапайте по фольге прямую линию с помощью лезвия бритвы. Вторую щель проведите как можно ближе к первой, стараясь не испортить ее. Нетрудно прорезать две щели с расстоянием между ними, меньшим 0,5 *мм*. Расположив щели близко к

глазу, посмотрите на линейный источник. Сделайте это с красным фильтром и без него. Близко расположенные друг к другу интерференционные полосы соответствуют интерференционной картине от двух щелей. Угловое расстояние между полосами равно $\lambda/d$ радиан (полагаем $\sin\theta \approx \theta$). Теперь сделайте описанным выше способом одну щель (можно на этом же предметном стекле) и сравните картины от одной и двух щелей. Обратите внимание на то, что *картина от двух щелей модулирована картиной от одной щели* (рис. 9.15).

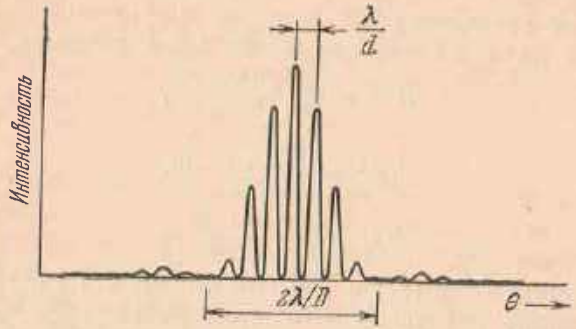



Рис. 9.15. Дифракция от двух щелей для случая, когда расстояние между щелями $d$ в 4 раза больше ширины каждой щели.
Величины углового расстояния $\lambda/d$ и полной ширины $2\lambda/D$ получены для приближения малого угла $\sin\theta \approx \theta$.

Обычно довольно трудно разглядеть картину от двух щелей, за исключением той ее части, которая лежит в области главного максимума картины от одной щели. (Имея красный фильтр и хорошо сделанную двойную щель, можно разглядеть и другие части дифракционной картины.)

Приведем объяснение возникновения картины. Каждая щель является источником электрического поля, регистрируемого детектором (сетчаткой глаза). Поле от каждой щели имеет определенную амплитуду и фазовую постоянную. Эта постоянная вклада от всей щели такая же, как и от отдельного (дифференциального) вклада («антенны»), поступающего из центра щели. Действительно, в выражение для волны от одной щели входит множитель $\cos(kr - \omega t)$, где $r$ — расстояние от центра щели до детектора. [См. формулы (60) и (53).] Амплитуда волны от одной щели пропорциональна $\sin {}^1/_2\Phi/{}^1/_2\Phi$, где $\Phi$ — разность фаз вкладов от противоположных краев щели. Когда мы имеем две такие щели, расстояние между которыми $d$, то фаза вклада от каждой щели совпадает с фазой от узкой щели, мысленно расположенной в центре данной щели. Таким образом, картина получается такой же, как и ранее рассмотренная картина (п. 9.2) дифракции от двух узких щелей, за тем исключением, что постоянная амплитуда $A(r)$ вклада от каждой щели теперь (в случае двух широких щелей) заменяется на множитель,



пропорциональный $\sin {}^1/_2\Phi/{}^1/_2\Phi$. Другими словами, дифракционная картина от двух бесконечно узких щелей будет *модулирована* функцией $\sin {}^1/_2\Phi/{}^1/_2\Phi$. Комбинируя полученные ранее результаты для двух узких щелей [формула (13), п. 9.2] с модулирующей функцией, мы найдем, что дифракционная картина (если обе щели возбуждаются с одинаковой фазой) имеет вид

$$E(0, t) = A(\theta)\cos(kr - \omega t), \tag{73}$$

$$A(\theta) = A(0)\frac{\sin {}^1/_2\Phi}{{}^1/_2\Phi}\cos {}^1/_2\Delta\varphi, \tag{74}$$

$$\Phi = kD\sin\theta = 2\pi\frac{D\sin\theta}{\lambda}, \tag{75}$$

$$\Delta\varphi = kd\sin\theta = 2\pi\frac{d\sin\theta}{\lambda}, \tag{76}$$

где $D$ — ширина каждой щели, $d$ — расстояние между щелями и $r$ — расстояние от точки наблюдения $P$ до середины между щелями. Если $D$ стремится к нулю, то центральный максимум постепенно занимает все поле зрения, и мы получаем результат п. 9.2 для двух узких щелей.

Распределение интенсивности $I(\theta)$ пропорционально среднему во времени от квадрата электрического поля. В соответствии с выражениями (73) и (74) мы имеем

$$I(\theta) = I(0)\left(\frac{\sin {}^1/_2\Phi}{{}^1/_2\Phi}\right)^2(\cos^2 {}^1/_2\Delta\varphi). \tag{77}$$

Множитель $\cos^2 {}^1/_2\Delta\varphi$ обусловливает быстрое чередование интенсивности в зависимости от $\theta$, с расстоянием между отдельными максимумами в $\lambda/d$. Член $(\sin {}^1/_2\Phi/{}^1/_2\Phi)^2$ определяет форму модулирующей функции, полная угловая ширина которой на половине интенсивности равна $\lambda/D$. Полная ширина углового интервала между нулями интенсивности с обеих сторон центрального максимума равна $2\lambda/D$. Сосчитав число «двухщелевых полос» в центральном максимуме, определяемом модуляционной функцией от одной щели, мы можем найти отношение $d/D$ для наших двух щелей. Распределение интенсивности, соответствующее формуле (77), показано на рис. 9.15.

*Дифракционная картина от многих одинаковых и параллельных широких щелей.* Из приведенного выше описания дифракционной картины от двух широких щелей следует, что при большом числе таких щелей дифракционную картину легко получить умножением амплитудной модулирующей функции $\sin {}^1/_2\Phi/{}^1/_2\Phi$ на интерференционную картину, полученную в предположении, что щели узкие.

*Интерференционная картина от многих щелей.* Рассмотрим зависимость интерференционной картины, созданной большим количеством ($N$) «антенн» (рис. 9.13), от числа $N$. (Вместо антенн можно рассматривать $N$ узких щелей.) Перепишем уравнение (54),

определяющее амплитуду для узких щелей:

$$E(r,\ \theta,\ t) = A(r,\ \theta)\cos(kr - \omega t), \tag{78}$$

$$A(r,\ \theta) = A(r)\frac{\sin {}^1/_2 N\,\Delta\varphi}{\sin {}^1/_2\Delta\varphi}, \tag{79}$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{d\sin\theta}{\lambda}. \tag{80}$$

*Главные максимумы, центральный максимум, источник белого света.* Углы, для которых знаменатель (и числитель) выражения (79) обращается в нуль, равны $\Delta\varphi/2 = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi$ и т. д. Для таких углов разность хода $d\sin\theta$ равна $0,\ \pm\lambda$ и т. д., что соответствует полностью конструктивной интерференции между всеми $N$ антеннами. Максимумы, получаемые при этом, называются *главными максимумами:*

$$d\sin\theta = 0,\ \pm\lambda,\ \pm 2\lambda,\ \ldots,\ m\lambda \qquad (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \tag{81}$$

Максимум при $\theta = 0$ называется *центральным максимумом* или *максимумом нулевого порядка.* Максимумы при $m = \pm 1$ называются *максимумами первого порядка* и т. д. Центральный максимум отличается от остальных главных максимумов одним важным свойством: вклады от всех антенн в центральный максимум находятся в фазе *независимо от длины волны.* Поэтому *в случае белого источника центральный максимум белый.* Для всех других главных максимумов положение максимума зависит от длины волны, т. е. от цвета.

Для главного максимума амплитуда суперпозиции будет в $N$ раз больше амплитуды вклада от каждой щели (антенны). Физически это очевидно и непосредственно следует из выражения (79), так как для центрального максимума $\Delta\varphi = 0$ и отношение $\sin Nx/\sin x$ (мы полагаем $\Delta\varphi/2 = x$) равно

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{Nx - \frac{1}{6}(Nx)^3 + \ldots}{x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots} = N\frac{\left[1 - \frac{1}{6}(Nx)^2 + \ldots\right]}{\left[1 - \frac{1}{6}x^2 + \ldots\right]} = N \tag{82}$$

для $x \to 0$.

Для максимума первого порядка ($m = +1$) мы можем показать, что предел $\sin Nx/\sin x$ при $x$, стремящемся к $\pi$, равен $\pm N$. Введем для этого малый угол $\varepsilon$, учитывающий отличие $x$ от $\pi$:

$$x = \pi - \varepsilon,$$

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{\sin(N\pi - N\varepsilon)}{\sin(\pi - \varepsilon)} = (-1)^{N+1}\frac{\sin N\varepsilon}{\sin\varepsilon}. \tag{83}$$

При стремлении $\varepsilon$ к нулю мы получаем, что предел отношения равен $(-1)^{N+1}N = \pm N$.

*Угловая ширина главного максимума.* С увеличением $N$ угловая ширина главных максимумов уменьшается. Исследуя выражение (79), легко получить угловой интервал от главного максимума до первого нуля или интервал от максимума до максимума. Для главного максимума и числитель и знаменатель равны нулю. Когда



аргумент ${}^1/_2 N\,\Delta\varphi$ синусоидальной функции в числителе уравнения (79) возрастет на $\pi$, числитель снова обратится в нуль. (Знаменатель при этом не равен нулю.) Таким образом, *при перемещении от главного максимума до первого нуля амплитуды произошло приращение фазы* $\Delta\varphi$ *на* $2\pi/N$. Этому соответствует *приращение разности хода* $d\sin\theta$, *равное* $\lambda/N$. Мы знаем, что приращение разности хода между двумя последовательными главными максимумами равно $\lambda$. Учитывая это, можно сказать, что *амплитуда падает от максимальной до нуля на интервале значений* $\sin\theta$, *который в* $N$ *раз уже интервала* $\lambda/d$, *определяющего расстояние между соседними главными максимумами.*

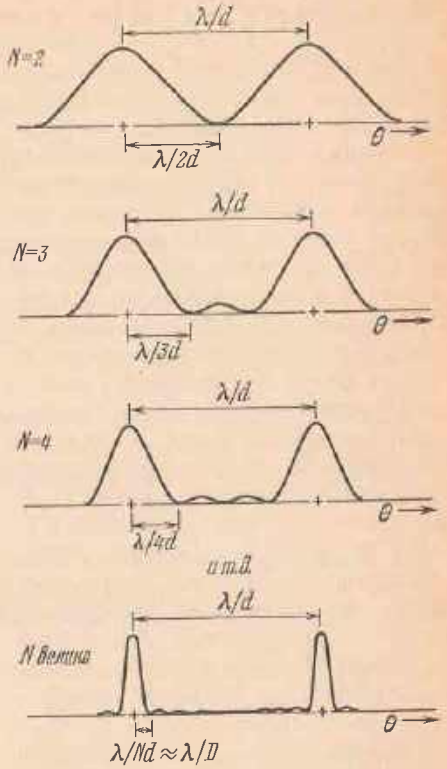



Рис. 9.16. Интерференция от многих щелей. Показаны два главных максимума. При больших $N$ каждый главный максимум имеет форму дифракционной картины от одной щели (см. рис. 9.14, *б*). Углы показаны для приближения $\sin\theta \approx \theta$.

Для большого $N$ или для четного $N$ (большого или малого) легко показать, почему первый нуль появляется, когда приращение разности хода $d\sin\theta$ равно $\lambda/N$. Предположим, что мы имеем 6 антенн. Первый нуль возникает, когда первые три могут быть спарены с последними тремя в «уничтожающие» друг друга пары, так что 1-я антенна уничтожает 4-ю, 2-я — 5-ю и 5-я — 6-ю. Первая и четвертая антенны уничтожат вклады друг друга при разности хода в ${}^1/_2\lambda$ (то же справедливо и для остальных пар). В этом случае разность хода между антеннами 1 и 2 равна $\lambda/6$, т. е. $\lambda/N$. Когда $N$ нечетно, такое доказательство неприменимо, поскольку антенны не могут быть спарены. В этом случае легче всего получить «визуальное» доказательство, построив векторную диаграмму вкладов амплитуд на комплексной плоскости. Построив такую диаграмму, легко видеть, что $N$ комплексных амплитуд соединяются таким образом, чтобы образовать замкнутый многоугольник и сделать полную амплитуду равной нулю, когда $\Delta\varphi$ равно $2\pi/N$ (задача 9.52). На рис. 9.16 мы показали, как интерференционная картина зависит от $N$, когда расстояние между щелями $d$ неизменно.

Вы можете продемонстрировать сужение главных максимумов, когда $N$ возрастает от 2 до 3. С помощью лезвия бритвы сделайте три щели в алюминиевой фольге, закрепленной на предметном стекле микроскопа. Пусть две из них будут длиннее третьей, чтобы можно было переходить от трех щелей к двум, слегка сдвигая предметное стекло перед глазом. После нескольких попыток вы сможете сделать три вполне приличные щели, расстояние $d$ между которыми примерно одинаково и меньше 0,5 *мм* (после каждой попытки, для проверки, смотрите через щели на свет). Вы легче справитесь с этой задачей, если используете увеличительное стекло с увеличением $2\times$ или $3\times$. Когда вы смотрите на линейный источник через две щели, то яркие полосы выглядят чуть более широкими, чем темные области, их разделяющие. При трех щелях яркие области будут у́же, чем черные интервалы между ними. Однако, если вам не удастся сделать одинаковые щели на равном расстоянии друг от друга, вы получите другую картину.

*Прозрачная дифракционная решетка.* Вместо $N$ антенн или $N$ щелей в непрозрачном экране можно иметь $N$ параллельных царапин на куске гладкого стекла или пластика шириной $D$. Без царапин свет дал бы интерференционную картину, соответствующую одной широкой щели шириной $D$. Царапины действуют подобно антеннам. Они дают интерференционную картину от $N$ царапин, которая аналогична картине от $N$ щелей,— за одним исключением. Центральный максимум (при 0°) определяется вкладами не только всех царапин, но также и от всего прозрачного материала между царапинами. Поэтому центральный максимум будет значительно ярче, чем остальные главные максимумы.

Если рассматривать линейный источник через дифракционную решетку, то мы получим дифракционную картину, каждый главный максимум которой имеет распределение интенсивности, показанное на рис. 9.14, *б*.

Дифракционная решетка в вашем оптическом наборе *) имеет такую же конструкцию. В ней проведено 13 400 царапин на дюйм, что отвечает $d = 190 \cdot 10^{-4}$ *см*, т. е. 1,9 *мкм*. Сколько главных максимумов вы обнаружите для зеленого света с $\lambda$=5500 Å (т. е. 0,55 *мкм*)? В соответствии с уравнением (81) главные максимумы возникают при значениях $\sin\theta$, равных 0, $\lambda/d$ и т. д. Конечно, $\sin\theta$ не может быть больше единицы. Для нашей решетки имеем $d \approx 3{,}5\,\lambda$, где $\lambda = 0{,}55$ *мкм*. Поэтому, если $\sin\theta = m\lambda/d$, то значения $m$ могут быть $m = 0,\ \pm 1, \pm 2, \pm 3$, но не 4. Теперь посмотрите на зеленую лампу с помощью вашей решетки. Прямо впереди будет центральный максимум ($\theta = 0$), для которого все цвета перемешаны. Цветные полосы по бокам представляют собой цветное изображение лампы при углах, определяемых из равенств $d\sin\theta = \lambda$ (первый порядок), $= 2\lambda$ (второй порядок) и т. д. Видны ли вам все три порядка? (Если вы видите четыре порядка, то что-то не в порядке.) Если вы хотите наблюдать спектр лампы накаливания, то не надо брать большую лампу, так как ее размеры вызовут перекрытие различных «окрашенных ламповых баллонов». Перед лампой можно поместить узкую вертикальную щель (решетку при этом нужно держать так, чтобы она развертывала цвета горизонтально) или взять лампу с прозрачным стеклянным баллоном и прямой нитью длиной около 7 *см*.

*) См. сноску на стр. 15.



Зная, например, что длина волны зеленого света равна 5500 Å, легко измерить постоянную $d$ вашей решетки. Посмотрите на лампу через решетку, расположенную близко перед глазом, и измерьте угол в радианах (или его синус или тангенс) от главного максимума до «зеленого», используя линейку в вытянутой руке. Воспользуйтесь уравнением (81). Получите ли вы $d \approx 3{,}5\,\lambda$? Дальнейшему исследованию свойств решетки посвящены домашние опыты.

*Дифракция от непрозрачного препятствия.* На рис. 9.12 показан точечный источник $S$ и непрозрачный экран, состоящий из частей $a$, $b$ и пробки *1*. Поле за экраном (оно равно нулю) было представлено суперпозицией полей $E_S + E_a + E_b + E_1 = 0$. Когда пробка *1* вынута, поле за экраном $E_S + E_a + E_b$ должно быть равно $-E_1$. Это рассуждение позволило нам сформулировать принцип Гюйгенса, с помощью которого можно, например, найти дифракционную картину от экрана с отверстием. Теперь нас интересует, что получится, если *оставить пробку и убрать остальные части экрана a и b*.

Пока мы ничего не убрали, справедливо равенство $E_S + E_a + E_b + E_1 = 0$. Теперь уберем $a$ и $b$ и предположим, что движение электронов в пробке *1* (непрозрачное препятствие) не изменилось. (Это является приближением, потому что на электроны в пробке воздействует как излучение от частей экрана $a$ и $b$, так и излучение от источника.) Поле за пробкой равно $E_S + E_1$. В близкой области за пробкой (понятие близкой области будет определено) поле будет практически таким, как и при наличии всего экрана, так как части экрана $a$ и $b$ находятся в этом случае далеко от близкой области и их вклад мал по сравнению с $E_S + E_1$. Поэтому в близкой области за пробкой электрическое поле будет практически равно нулю. Это — тень пробки. Она возникает благодаря тому, что в близкой точке за экраном поле (равное нулю) определяется главным образом источником $S$ и близлежащими зарядами, которые в этом случае принадлежат пробке *1*. Таким образом, вблизи за экраном суперпозиция $E_1$ и $E_S$ даст нуль. Отсюда следует, что пробка *1* испускает часть плоской волны в том же направлении, в котором распространяется падающая плоская волна от удаленного источника $S$. Амплитуда волны от пробки равна амплитуде падающей волны от источника $S$, а фаза волны от пробки сдвинута на 180° относительно фазы падающей волны, так что суперпозиция $E_S + E_1$ в близкой области равна нулю. Таким образом, получается тень. Непрозрачное препятствие не съедает падающий свет, а излучает пучок света отрицательной амплитуды (т. е. отрицательной относительно

падающего света) в прямом направлении. Комбинация этого пучка с падающей волной дает нуль вблизи за экраном.

*Как далеко простирается область тени?* Нужно сказать, что пробка не испускает точно плоскую волну света «отрицательной амплитуды», поскольку она имеет конечную ширину (или диаметр) $D$. Вместо этого она испускает «пучок», основное направление которого совпадает с направлением распространения плоской волны $E_S$. Этот пучок имеет, однако, связанный с дифракцией разброс углов, ширина которого равна $\Delta\theta \approx \lambda/D$. За время, в течение которого пучок пройдет расстояние $L$ от экрана, появится рассеяние (расхождение) пучка в боковом направлении, определяемое величиной $W \approx L\,\Delta\theta \approx L\,(\lambda/D)$. По мере распространения пучка его амплитуда уменьшается. Только когда амплитуда электрического поля пучка равна по величине амплитуде плоской волны $E_S$, мы имеем нулевую суперпозицию, т. е. тень. В конце концов на достаточно больших расстояниях в направлении распространения пучка тень исчезает. Грубо говоря, свет отрицательной амплитуды, испущенный облучаемым диском, значительно ослабляется, когда дифракционное рассеяние пучка увеличивает его ширину в два раза. Это дает нам грубую «граничную длину» $L_0$, на которой $D \approx W_0$. Но так как $W_0 \approx L_0\,(\lambda/D)$, то мы имеем

$$\boxed{L_0\lambda \approx D^2}. \qquad (84)$$

Таким образом, для $L \ll L_0$ мы рассчитываем иметь прекрасную черную тень за препятствием, за исключением области, близкой к краям (где предположение о неизменности $E$, при отсутствии $a$ и $b$ неверно). Для $L \gg L_0$ обнаружить влияние препятствия будет довольно трудно, так как электрическое поле от него мало по сравнению с полем плоской волны $E_S$. Препятствие можно легко обнаружить с помощью линзы. Плоская волна $E_S$ будет фокусироваться в небольшое пятно в фокальной плоскости, размер которого равен $f\lambda/D_л$, где $D_л$ — диаметр линзы, а $f$ — фокусное расстояние. Свет отрицательной амплитуды от препятствия даст изображение шириной $f\lambda/D$. Если диаметр линзы значительно больше размера препятствия $D$, то яркое пятно от плоской волны затемняет только небольшую область в центре изображения.

Дифракционную картину от препятствий можно изучить, используя в качестве точечного источника электрический фонарь. Один из удивительных результатов — это яркое пятно в центре тени, наблюдаемое при расстоянии $L \gg L_0$. (См. домашний опыт 9.34.)

Уравнение (84) может быть проверено и не для световых волн. Его можно проверить, положив препятствие на пути пучка бегущих волн на водной поверхности. Тень будет появляться при $L \ll L_0$ и пропадать при $L \gg L_0$. (См. домашний опыт 9.29.)



## 9.7. Геометрическая оптика

Геометрическая оптика изучает поведение световых лучей (пучков) в оптических инструментах (которые состоят из различных отражающих и преломляющих поверхностей). Она рассматривает только главные направления распространения лучей (пучков) и не интересуется рассеянием лучей вследствие дифракции. (Если при рассмотрении световых явлений учитывается волновая природа света, включающая понятия интерференции и дифракции, то используется термин «физическая оптика».) Основные законы геометрической оптики — это *закон зеркального отражения и закон преломления Снеллиуса*. Конечно, оба эти закона в действительности определяются волновой природой света и являются следствием конструктивной интерференции.

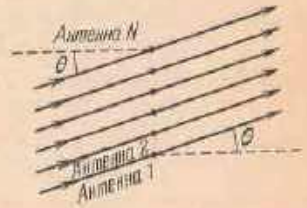



Рис. 9.17. Ряд антенн, возбуждаемых наклонно падающей волной.

Штриховые линии перпендикулярны плоскости антенн. Стрелками показано направление распространения волны. Угол падения волны равен θ.

*Зеркальное отражение. Зеркальное отражение* возникает всякий раз, когда плоская волна падает на гладкую плоскую поверхность. Зеркальное отражение определяется следующими условиями: а) отраженный луч лежит в плоскости падения (эта плоскость образована падающим лучом и нормалью к поверхности), и б) угол отражения равен углу падения (оба угла измеряются от нормали).

Зеркальное отражение возникает благодаря конструктивной интерференции. Электроны в веществе находятся под действием падающей волны. Поэтому они излучают. Направление зеркально отраженного луча является направлением, которому соответствует максимум конструктивной интерференции.

Это легко себе представить, рассмотрев уже знакомую нам линейную группу антенн. Предположим, что токи в антеннах определяются электрическим полем падающей плоской волны. Пусть угол $\theta$ между направлением волны и направлением ряда антенн (рис. 9.17) не равен 0° (не нормальное падение).

Теперь рассмотрим ту часть далекого поля, которая вызвана только токами в антеннах. Вначале рассмотрим центральный интерференционный максимум. Легко видеть, что он возникает в направлении распространения падающего пучка. Антенна *1* возбуждается раньше антенны *2* и поэтому начнет излучать раньше ее. В удаленной точке $P$ излучение от антенн *1* — $N$ будет точно в фазе, если направление, в котором происходит излучение антенн, совпадает с направлением падающего на антенны излучения; например, некоторый гребень волны от антенны *1* должен пройти дальше, чем гребень от антенны $N$, но нужно помнить, что и излучать антенна *1* начала раньше антенны $N$.

Очевидно, что, вследствие симметрии группы антенн, антенны, возбужденные так, как показано на рис. 9.17, будут давать центральный интерференционный максимум не только справа (на чертеже), но и слева. Этот мнимый максимум представляет собой зеркально отраженное излучение. Из рис. 9.18 мы видим, что угол отражения равен углу падения.

Зеркальное отражение от любой гладкой плоской поверхности происходит благодаря конструктивной интерференции, возникающей таким же образом, как и в случае близко расположенных антенн.

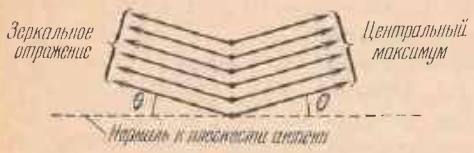



Рис. 9.18. Направления интерференционного максимума для антенн, возмущаемых с фазовыми соотношениями рис. 9.17.

*Незеркальное отражение от периодической структуры.* Центральный максимум и максимум, возникающий в результате зеркального отражения, не являются единственными интерференционными максимумами, образованными группой антенн (см. рис. 9.17 и 9.18). Наряду с этими максимумами нулевого порядка в прошедшей и отраженной волнах существуют также максимумы в тех направлениях, для которых разность хода от смежных антенн до детектора больше (или меньше) на целое число длин волн, чем разность хода, определяющая максимум нулевого порядка. Интерференционная картина для прошедших волн (на рис. 9.18 распространяющихся вправо) аналогична интерференционной картине от дифракционной решетки с $N$ щелями при косом падении света. Интерференционная картина, образованная отраженными волнами, аналогична картине от проходящих волн, за тем исключением, что отраженный центральный максимум не такой яркий, как центральный максимум, образованный прошедшими волнами. Вы можете убедиться в существовании интерференционной картины в отраженном от регулярной группы свете, используя прозрачную дифракционную решетку как *отражающую решетку*, т. е. расположив ее близко к глазу и рассматривая точечный источник в отраженном свете. Отражение (зеркальное) нулевого порядка (т. е. центральный максимум) легко определить, поскольку оно «белое». Отраженные максимумы ненулевого порядка аналогичны максимумам, образованным проходящими волнами при таком же косом угле падения.

Если расстояние между соседними антеннами меньше длины волны, то существует лишь одно направление (максимум нулевого порядка), соответствующее полностью конструктивной интерференции. Это — направление центрального максимума, которому соответствует зеркальное отражение. При изучении геометрической оптики и оптических инструментов мы обычно имеем дело с видимым светом, падающим на поверхность стекла или металла. Антеннами в этом случае являются атомы на поверхности, расстояние между которыми порядка $10^{-8}$ *см*. Поэтому для видимого света с длиной волны около



$5 \cdot 10^{-5}$ *см* мы можем получить только максимум нулевого порядка. (Для рентгеновских лучей, длина волны которых порядка $10^{-8}$ *см*, при отражении от поверхности некоторых кристаллов можно получить максимумы более высокого порядка.) Мы будем иметь дело с оптическими инструментами, в которых используется видимый свет. Поэтому можно ограничиться рассмотрением зеркального отражения (т. е. максимума нулевого порядка в отраженном свете).

*Изображение точечного источника в зеркале; мнимый и реальный источники.* Поверхность постоянной фазы излучения от точечного источника представляет собой сферу. Достаточно малые части поверхности сфер могут быть аппроксимированы плоскостями, и мы можем называть плоскую волну излучения, проходящую через такую малую поверхность, *лучом*. На рис. 9.19 показан точечный

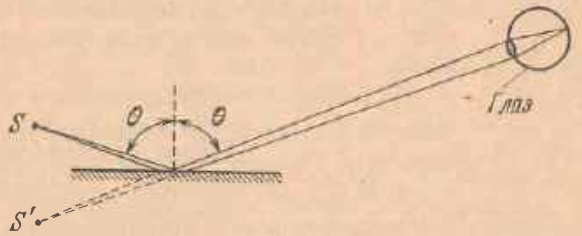



Рис. 9.19. Мнимое изображение $S'$ реального точечного источника $S$ в плоском зеркале.

источник, рассматриваемый с помощью зеркала. Излучение, проходящее через апертуру линзы, может рассматриваться как «пучок лучей». Два луча из этого пучка показаны на рис. 9.19. Каждый из них зеркально отражен от поверхности зеркала. Свет, падающий в глаз, кажется пришедшим от точечного источника $S'$, расположенного за зеркалом. Источник $S'$ называется *мнимым*, поскольку в действительности его не существует. (Источник $S$ называется *реальным* источником.)

*Преломление; закон Снеллиуса; принцип Ферма.* Мы привели два вывода закона Снеллиуса. Один вывод основывался на простых геометрических построениях (п. 4.3). Другой — на том факте, что число гребней волны, приходящихся на единицу длины, вдоль границы раздела двух сред одинаково с обеих сторон от границы (п. 7.2). Оба эти вывода используют понятие плоской волны. Поскольку геометрическая оптика всегда оперирует с лучами, т. е. с узкими пучками света, то мы приведем третий вывод этого закона, основанный на понятии пучка, ограниченного дифракцией. При этом выводе мы не будем рассматривать рассеяние пучка вследствие дифракции.

Вначале рассмотрим пучок, распространяющийся в однородном куске стекла с показателем преломления $n$ (рис. 9.20). Рассмотрим атом $a$ в середине пучка. Пучок (излучение) действует на атом, который излучает во всех направлениях. Излучение этого атома помогает (пучку) воздействовать на атомы $b$, $c$ и $d$. Суперпозиция излу-

чения от этих атомов помогает воздействовать на атом $e$ (который также находится в центре пучка). Далее, пучок является результатом конструктивной интерференции. Это значит, что если атомы $b$ и $d$ лежат достаточно близко с обеих сторон от $c$, то фазы вкладов от всех трех атомов $b$, $c$ и $d$ в суперпозицию, воздействующую на $e$, одинаковы благодаря тому, что они испытывают воздействие со стороны атома $a$. Другими словами, времена распространения волн с фазовой скоростью $c/n$ от $a$ к $b$ и $e$, от $a$ к $c$ и $e$ и от $a$ к $d$ и $e$ должны быть примерно равны, если $a$, $c$ и $e$ лежат вдоль направления луча, а $b$ и $d$ достаточно близки к $c$. Если это не так, то излучение от отдельных возбуждаемых пучком атомов не будет складываться таким образом, чтобы создать конструктивную интерференцию.

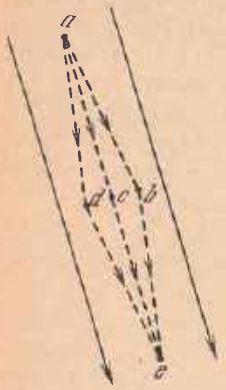



Рис. 9.20. Распространение пучка света в стекле. Стрелки указывают ширину пучка и направление распространения. Точки $a$, $b$, $c$, $d$ и $e$ — атомы стекла.

Из рис. 9.20 следует, что если $a$, $c$ и $e$ лежат вдоль пучка, то соседние пути $\overline{abe}$ и $\overline{ade}$ чуть-чуть больше, чем путь $\overline{ace}$. Когда мы говорим, что эти пути чуть-чуть больше или что они примерно равны $\overline{ace}$, мы имеем в виду, что если, например, $b$ имеет небольшие поперечные смещения $x$ от $c$, то путь $\overline{abe}$ превысит $\overline{ace}$ на величину, пропорциональную квадрату $x$, а не первой степени $x$. Таким образом, при разложении в ряд Фурье длины пути по параметру $x$ первая производная исчезает (исчезает тот член ряда, который дает вклад, пропорциональный $x$).

В действительности имеет значение не длина пути, а время распространения. Существует принцип, согласно которому пучок света распространяется по такому пути, чтобы производная времени распространения по $x$ была равна нулю [$x$ — параметр, равный нулю для пути пучка (подобного $\overline{ace}$) и отличный от нуля для соседнего пути (подобного $\overline{abe}$ или $\overline{ade}$)]. Этот принцип означает, что время распространения вдоль пучка является экстремальным (минимальным). Он называется *принципом наименьшего времени Ферма* или просто *принципом Ферма*.

Используем принцип Ферма для вывода закона Снеллиуса. На рис. 9.21 показан атом $a$ в среде 1 и атом $e$ в среде 2. (Они являются аналогами атомов $a$ и $e$ на рис. 9.20.) Нам нужно определить положение точки $P$, т. е. положение точки пересечения пучка $\overline{aP}$ с плоскостью. Время распространения волны вдоль пути $\overline{aP}$ равно $t_1 = l_1 n_1/c$, а вдоль пути $\overline{Pe}$ $t_2 = l_2 n_2/c$. Расстояния $ct_1 = n_1 l_1$ и $ct_2 = n_2 l_2$ называются *оптическими длинами*. Полная оптическая длина $c(t_1 + t_2)$ минимальна, если минимально полное время распространения. Таким образом, мы хотим найти точку $P$, для



которой было бы справедливо равенство

$$\text{Оптическая длина} = n_1 l_1 + n_2 l_2 = \text{минимум}. \qquad (85)$$

Из рис. 9.21 имеем

$$\text{Оптическая длина} = n_1 (y_1^2 + x_1^2)^{1/2} + n_2 (y_2^2 + x_2^2)^{1/2}. \qquad (86)$$

Сдвинем точку $P$ на бесконечно малое расстояние от положения (которое еще не известно), дающего минимальный оптический путь. Обозначим через $d$ (опт. дл.) изменение оптической длины в результате такого смещения. Чтобы найти $d$(опт. дл.), продифференцируем уравнение (86). Поскольку $P$ смещается вдоль границы, то переменными являются только $x_1$ и $x_2$. Так как положение атомов $a$ и $e$ неизменно, то сумма $x_1 + x_2$ постоянна и приращение $dx_2$ вследствие смещения точки $P$ будет равно приращению $dx_1$, взятому с обратным знаком. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} d(\text{опт. дл.}) &= n_1 dl_1 + n_2 dl_2 = \\ &= n_1 d(y_1^2 + x_1^2)^{1/2} + n_2 d(y_2^2 + x_2^2)^{1/2} = \\ &= \frac{n_1 x_1 dx_1}{(y_1^2 + x_1^2)^{1/2}} + \frac{n_2 x_2 dx_2}{(y_2^2 + x_2^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{n_1 x_1}{l_1} dx_1 + \frac{n_2 x_2}{l_2}(-dx_1). \end{aligned} \qquad (87)$$

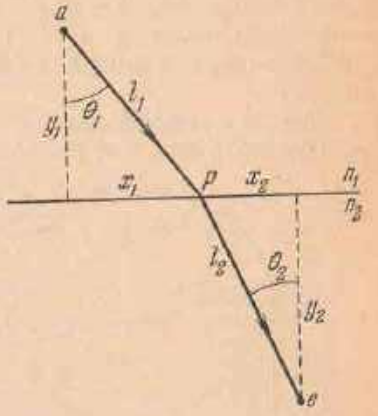



Рис. 9.21. Преломление. Оптическая длина пути $l_1 n_1 + l_2 n_2$ зависит от положения точки $P$. В соответствии с принципом Ферма свет из $a$ в $e$ проходит по траектории, для которой оптическая длина пути минимальна. В этом случае траектория $\overline{aPe}$ расположена вдоль интерференционного максимума, аналогично траектории $\overline{ace}$ на рис. 9.20.

В уравнении (87) можно пренебречь членами более высокого порядка, включающими $dx_1^2$, $dx_1^3$ и т. д. Теперь предположим, что точка $P$ выбрана так, что $\overline{aPe}$ совпадает с направлением пучка. Тогда, в соответствии с принципом Ферма, производная первого порядка по $x_1$ равна нулю. Из уравнения (87) имеем

$$d(\text{опт. дл.}) = 0 = \left[\frac{n_1 x_1}{l_1} - \frac{n_2 x_2}{l_2}\right] dx_1,$$

т. е.

$$n_1 \frac{x_1}{l_1} = n_2 \frac{x_2}{l_2},$$

т. е.

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2, \qquad (88)$$

что и есть закон Снеллиуса.

Теперь рассмотрим некоторые основные оптические устройства.

*Эллиптическое зеркало.* На рис. 9.22 мы видим полый эллипсоид вращения с зеркальной внутренней поверхностью и с точечным

источником $F$, расположенным в одном из главных фокусов. Из определения эллипса следует, что расстояние от $F$ до второго фокуса $F'$ одинаково для всех лучей. Поэтому фокус $F'$ является местом полной конструктивной интерференции для излучения, испущенного электронами на поверхности, которые в свою очередь находятся под воздействием излучения из $F$. Мы говорим, что источник, расположенный в $F$, *изображается* в точке $F'$.

Изображение в $F'$ не является точкой, фаза результирующего поля в точке около $F'$ может лежать в диапазоне $\pm\pi$ относительно фазы в $F'$ при условии, что точка лежит внутри сферы радиусом примерно $\lambda/4$ с центром в $F'$. Такова грубая оценка размера изображения в $F'$.

*Вогнутое параболическое зеркало.* Предположим, что у эллипсоида

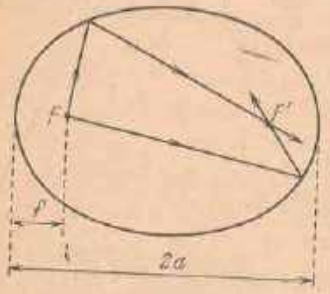



Рис. 9.22. Эллиптическое зеркало.

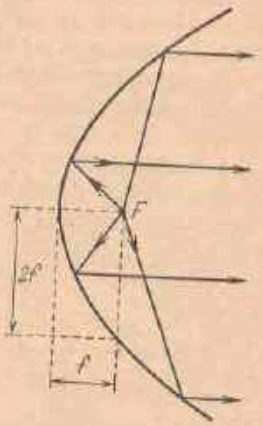



Рис. 9.23. Вогнутое параболическое зеркало.

на рис. 9.22 фокус $F$ и фокусное расстояние $f$ остаются неизменными, а фокус $F'$ движется вправо, т. е. эллипс растягивается. Если $F'$ сместился бесконечно далеко вправо, то эллипсоид вырождается в параболоид. Лучи, испущенные из $F$, образуют при отражении параллельный пучок (потому что они фокусируются в $F'$, который бесконечно удален, рис. 9.23).

Если апертура параболического зеркала имеет диаметр $D$, то точечный источник в $F$ не образует идеально параллельного пучка. Угловая ширина интерференционного максимума равна $\Delta\theta \approx \lambda/D$, и лишь при бесконечно большом $D$ мы получили бы идеальную плоскую волну от точечного источника. Действительно, падающая плоская волна фокусируется в $F$ в изображение, которое будет точечным только при бесконечно большом $D$. Изображение в фокусе имеет ширину $\Delta x \approx f\,\Delta\theta \approx f\lambda/D$.

*Вогнутое сферическое зеркало.* Говорят, что сфера «пристроена» в вершине параболоида, если она касается вершины и имеет тот же радиус кривизны, что и параболоид в точке касания. Нетрудно показать, что радиус такой сферы равен $2f$ (рис. 9.24).



*Сферическая аберрация.* Для апертуры небольшого диаметра ($D \ll 2f$) поверхность сферического зеркала практически совпадает (слева от фокуса) с поверхностью параболического зеркала. В этом случае точечный источник, находящийся в $F$, образует почти параллельный пучок. Для больших апертур расхождение сферической и параболической поверхностей приводит к сферической аберрации (т. е. к отклонению лучей от параллельности, рис. 9.24). Некоторый опыт в обращении с вогнутыми зеркалами можно получить, используя дешевое зеркало для бритья. Получите с таким зеркалом изображение (например) пламени свечи или вашего лица. (Для этой цели может подойти и вогнутая поверхность новой блестящей ложки.) Для опытов с вогнутыми зеркалами можно использовать посеребренные сферические елочные украшения (или переверните ложку).

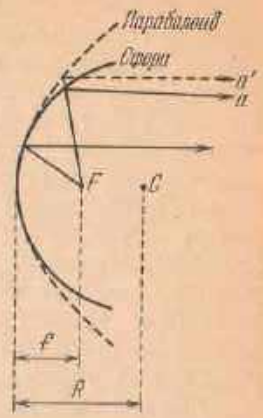



Рис. 9.24. Вогнутое сферическое зеркало («в контакте» с воображаемым касательным параболическим зеркалом).
Центр сферы в точке $C$, ее радиус $2f$. Луч $a$, отраженный от сферы, не параллелен оси. Это демонстрирует сферическую аберрацию.

*Отклонение луча света при почти нормальном падении на тонкую стеклянную призму.* Тонкой называется призма, у которой угол $\alpha$ при вершине настолько мал, что можно использовать приближение малого угла: $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$. Для углов падения, близких к нормальному, мы можем использовать это приближение и для угла падения. В этом случае монохроматическая плоская волна отклоняется к основанию призмы на угол $\delta$:

$$\delta = (n-1)\,\alpha. \qquad (89)$$

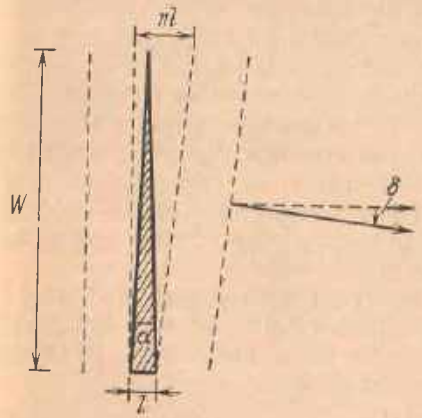



Рис. 9.25. Отклонение луча тонкой призмой.

До тех пор, пока падение можно считать близким к нормальному, угол отклонения $\delta$ постоянен. Уравнение (89) легко вывести следующим образом (рис. 9.25). В основании призмы волновой фронт проходит расстояние $l$ со скоростью $c/n$. У вершины скорость в $n$ раз больше (так как толщина призмы нуль), и поэтому тот же фронт за то же время пройдет расстояние $nl$. Поэтому фронт у вершины окажется впереди на величину $(n-1)\,l$. Эта величина, деленная на высоту призмы $W$, представляет (для малых углов)

угол отклонения $\delta = (n-1)(l/W) = (n-1)\alpha$, т. е. имеем уравнение (89).

*Цветовая дисперсия призмы.* В качестве примера тонкой призмы возьмем призму с углом при вершине $\alpha = 30°$ и $n = 1{,}50$ (в этом случае для нашей задачи приближение малого угла еще не будет слишком плохим). Тогда в соответствии с уравнением (89) отклонение $\delta$ равно 15°. В действительности это — среднее отклонение, потому что для типичного стекла со средним коэффициентом преломления 1,5 голубой свет с длиной волны в 0,45 *мкм* имеет показатель преломления на 0,01 больше, чем красный свет с длиной волны в 0,65 *мкм*. Поэтому голубой свет отклонится больше, чем красный, на величину 0,01 $\alpha$. При $\alpha = 30°$ зеленый свет отклоняется на 0,3°, или примерно на 1/200 радиана, больше, чем красный. На экране, расположенном в метре за призмой, голубая полоса будет отделена от красной на 0,5 *см*. Этот дисперсионный эффект стеклянной призмы используется в призменном спектрометре.

В оптических инструментах со стеклянными линзами дисперсия приводит к появлению хроматических аберраций: лучи различного цвета не фокусируются в одном и том же месте. В телескопе можно избежать хроматической аберрации, используя вместо линзы параболическое зеркало для фокусирования света. (Закон зеркального отражения справедлив для всех цветов.) Хроматическую аберрацию можно исключить, используя также два типа стекла с различной дисперсией. (См. задачу 9.53.)

*Фокусировка параксиальных лучей тонкой линзой.* Предположим, что мы имеем стеклянную линзу в воздухе с двумя выпуклыми сферическими поверхностями, перпендикулярными общей оси симметрии $\hat{z}$. Луч света падает слева, распространяясь параллельно оси симметрии линзы, на расстоянии $y = h$ от оси. Если линза тонкая, то мы пренебрегаем (по определению) изменением ординаты $y$ при прохождении луча через линзу. Пренебрегаем также толщиной линзы по сравнению с ее фокусным расстоянием. Мы ограничиваемся рассмотрением параксиальных лучей, т. е. таких лучей, для которых ординаты малы по сравнению с радиусом кривизны обеих поверхностей. В этих условиях для всех интересующих нас углов справедливо приближение малого угла.

Найдем фокус линзы $F$, т. е. точку на оси симметрии линзы, в которой лучи, падающие на линзу параллельно этой оси, пересекут ее после отклонения линзой (рис. 9.26). Если падающий луч фокусируется в $F$, то он отклонен на малый угол

$$\delta = h/f. \tag{90}$$

*Необходимое условие существования фокуса.* Необходимым условием существования общей фокальной точки (фокуса) для всех параллельных и параксиальных лучей, падающих на линзу, является *линейная пропорциональность отклонения луча его смещению* $h$ от оси. Если уравнение (90) удовлетворяется для всех $h$ (при условии малых угловых отклонений), то все параллельные лучи будут



фокусироваться на одинаковом расстоянии $f$ за линзой. *Это условие справедливо для любых подобных задач фокусирования*, например для фокусирования магнитной линзой пучка заряженных частиц. Нам осталось показать, что тонкая линза со сферическими поверхностями удовлетворяет уравнению (90) с $f$, не зависящими от $h$. Это можно сделать следующим образом. Рассмотрим луч на рис. 9.26.

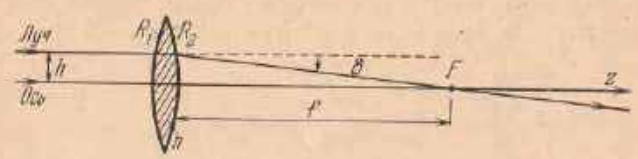



Рис. 9.26. Тонкая линза. Приходящий луч параллелен оси.

Этот луч может быть отклонен на тот же угол $\delta$ эквивалентной тонкой призмой. Первая поверхность этой призмы составляет угол $h/R_1$ с вертикалью, вторая — угол $h/R_2$ (но отсчитанный в другую сторону). Поэтому угол $\alpha$ у вершины нашей воображаемой призмы равен $hR_1^{-1} + hR_2^{-1}$. Угол отклонения луча такой призмой равен $(n-1)\alpha$, т. е.

$$\delta = (n-1)h(R_1^{-1} + R_2^{-1}). \tag{91}$$

*Формула линзы.* Уравнение (91) удовлетворяет условию образования фокуса, заключающемуся в том, что $\delta$ пропорционально $h$. Положение фокуса (фокусное расстояние) следует из формулы (90):

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{92}$$

Уравнение (92) называется *формулой линзы*.

*Фокальная плоскость.* Теперь рассмотрим пучок параллельных лучей, образующий угол $\theta$ с осью симметрии. Отклонение пучка тонкой призмой не зависит от угла падения (для малых углов).

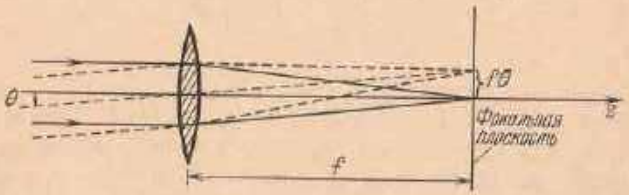



Рис. 9.27. Фокальная плоскость.

Поэтому *луч, падающий на призму на расстоянии* $h$ *от ее центра, отклоняется на угол* $\delta = h/f$ *независимо от угла падения*. Это значит, что любой параллельный пучок фокусируется в точку, которая находится в плоскости, называемой *фокальной плоскостью*, расположенной на расстоянии $f$ за линзой. Боковое смещение относительно оси точки в фокальной плоскости равно $f\theta$ (рис. 9.27).

*Действительное точечное изображение точечного объекта.* Мы нашли точечное изображение параллельного пучка, т. е. пучка, образованного реальным точечным источником, находящимся бесконечно далеко слева от линзы. Рассмотрим теперь точечный объект $o$, расположенный на расстоянии $p$ слева от собирающей линзы, и найдем его изображение $I$ на расстоянии $q$ справа от линзы. Пусть $o$ лежит на оси симметрии, тогда $I$ также будет лежать на этой оси. Теперь обратимся к рис. 9.28. Из этого рисунка следует, что если

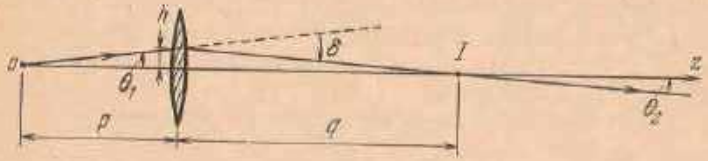



Рис. 9.28. Реальное изображение точечного объекта.

единичный вектор $+\hat{\mathbf{z}}$ с началом в точке $o$ совершает повороты на углы $+\theta_1$, $-\delta$ и $+\theta_2$, то в результате он опять будет направлен вдоль оси $+\hat{\mathbf{z}}$:

$$\theta_1 - \delta + \theta_2 = 0. \tag{93}$$

*Формула тонкой линзы.* Справедливы следующие соотношения:

$$\theta_1 = \frac{h}{p}, \quad \theta_2 = \frac{h}{q} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{h}{f}.$$

(Отклонение всегда равно $h/f$ независимо от угла падения.) Подставляя эти значения углов в уравнение (93), получим

$$\frac{h}{f} = \frac{h}{p} + \frac{h}{q},$$

т. е.

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}}. \tag{94}$$

Уравнение (94) называется *формулой тонкой линзы.*

*Продольное увеличение.* Углы отклонения лучей тонкой линзой не изменятся, если линзу слегка повернуть относительно оси, проходящей через ее центр перпендикулярно плоскости рис. 9.28. Луч от точечного объекта, проходящий через центр линзы, останется неотклоненным, а луч, входящий в линзу на расстоянии $h$ от центра, отклонится на величину $h/f$. Поэтому положения точечного объекта и его изображения на рис. 9.28 не изменятся, если линзу слегка повернуть относительно ее центра. (С другой стороны, если линза получает небольшое перемещение относительно оси, лежащей в плоскости чертежа и перпендикулярной оси линзы, то изображение точечного объекта переместится. Новое положение изображения получится, если учесть, что луч, проходящий через центр



линзы, не отклоняется.) Вместо того чтобы слегка поворачивать линзу относительно ее центра, предположим, что положение линзы фиксировано, и переместим точечный объект на небольшое расстояние вверх перпендикулярно оси линзы. Вся лучевая диаграмма может быть затем повернута относительно центра линзы (потому что для углов падения, близких к нормальным, отклонения не зависят от углов падения). Таким образом, мы видим, что если точечный объект перемещен вверх на величину $y$, то изображение этого объекта переместится вниз на величину, большую чем $y$ в число раз, равное отношению $q$ к $p$. В этом случае говорят, что

$$\text{Продольное увеличение} = -\frac{q}{p}. \tag{95}$$

Знак минус указывает на то, что, когда точечный объект поднимается вверх (относительно оси), его изображение опускается вниз. Если объектом служит не отдельная точка, а протяженный предмет, например небольшая стрелка с острием и оперением, то его изображение будет перевернуто.

*Собирающая линза.* Линза, показанная на рис. 9.28, называется *собирающей линзой.* Изображение предмета, находящегося от тонкой собирающей линзы на расстоянии, большем фокусного расстояния $f$, является *реальным перевернутым изображением.* Прилагательное «реальный» означает, что в месте, где присутствует изображение, есть свет. Для сравнения скажем, что изображение в обычном плоском зеркале не является реальным, поскольку за зеркалом нет света.

*Мнимое изображение.* Если точечный объект на рис. 9.28 находится на расстоянии $f$ слева от тонкой собирающей линзы, то

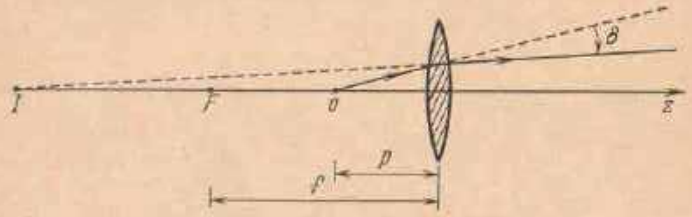



Рис. 9.29. Мнимое изображение точечного объекта ($p<f$).

отклонение $h/f$ лучей на расстоянии $h$ от центра линзы будет таким, чтобы справа образовался параллельный пучок. Если точечный объект находится на расстоянии, меньшем чем $f$, то отклонение будет недостаточно для того, чтобы направить луч, прошедший через линзу, обратно к оси. Такой луч никогда не пересечет ось, и можно сказать, что реального изображения нет. Наблюдателю кажется, что этот луч пришел от мнимого источника, расположенного слева от линзы. Можно говорить, что в этом случае линза образует *мнимое изображение* (рис. 9.29). Легко показать (предоставляем вам сделать это), что положение мнимого изображения определяется по

формуле тонкой линзы [уравнение (94)] при условии, что через отрицательное $q$ мы обозначим расстояние, измеряемое влево от линзы.

*Рассеивающая линза.* Линзу, толщина которой возрастает от центра к периферии, называют *рассеивающей* (при условии, что это — стеклянная линза и находится она в воздухе). Если представлять себе линзу составленной из тонких призм (как мы делали для собирающей линзы), то вершина каждой мысленной призмы будет ближе к оси, чем основание, и лучи будут отклоняться от оси линзы (а не к оси, как это было в случае собирающей линзы). Параллельный пучок, пройдя через линзу, станет расходящимся, причем будет казаться, что он выходит из *мнимого фокуса F* (рис. 9.30). Легко

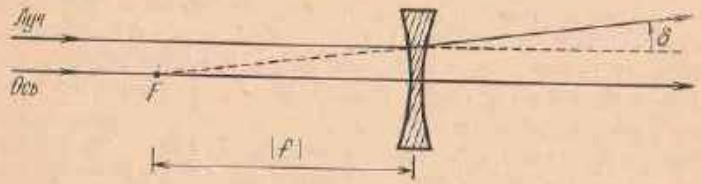



Рис. 9.30. Рассеивающая линза.

показать (предоставляем вам сделать это), что все формулы, полученные для тонкой собирающей линзы, справедливы и для рассеивающей, при условии, что мы введем в формулы отрицательные величины. Так, если принять, что у рассеивающей линзы фокусное расстояние отрицательно: $f = -|f|$, то мы сможем использовать формулу тонкой линзы, чтобы получить соотношение между расстояниями до предмета и его изображения. Например, рис. 9.30 соответствует $p = +\infty$, $q = -|f|$ и $f = -|f|$ в формуле

$$p^{-1} + q^{-1} = f^{-1}.$$

*Сила линзы. Диоптрия.* Величина, обратная фокусному расстоянию (ее размерность [$м^{-1}$]), называется *силой линзы в диоптриях*. Так, сила собирающей линзы с фокусным расстоянием 50 *см* равна +2 диоптрии (+2D). Сила рассеивающей линзы с фокусным расстоянием — 50 *см* равна —2D. Величина, обратная фокусному расстоянию (сила линзы), обладает замечательным свойством, заключающимся в том, что она *линейна* в следующем смысле. Если одна тонкая линза следует непосредственно за другой, то *полная сила двух тонких соприкасающихся линз равна сумме сил каждой линзы*. Это легко показать из следующих соображений. Первая линза отклоняет луч по направлению к оси на угол $h/f_1$, где $f_1$ отрицательно для рассеивающей линзы и положительно для собирающей. Если вторая линза расположена «на выходном конце» первой линзы, то у луча не будет возможности изменить свое расстояние $h$ относительно общей оси двух линз. Поэтому луч войдет во вторую линзу на том же расстоянии $h$ от оси и отклонение луча, даваемое второй линзой, будет равно $h/f_2$. Полное отклонение луча двумя



линзами равно $h/f_1 + h/f_2$. Такое же отклонение можно получить, заменив две линзы одной эквивалентной линзой с фокусным расстоянием, определяемым из условия $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$. Таким образом, полная сила обеих линз (или эквивалентная величина обратного фокусного расстояния) равна сумме сил отдельных линз. Конечно, если обе линзы находятся на некотором расстоянии, то во вторую линзу луч входит не на той же высоте $h$ относительно оси, как в первую линзу. Поэтому сила последовательных линз складывается линейно лишь в том случае, если можно пренебречь расстоянием между линзами.

Если вы носите очки, то можете определить (грубо) силу каждой линзы как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскости. Для этой цели используйте удаленный точечный источник (или солнце). Если сила линзы положительна, то вы сможете образовать изображение источника на стене или на белой бумаге. Является ли фокусное расстояние линзы одинаковым в обеих плоскостях? (Если фокусные расстояния различны, то говорят, что линза астигматична, а ваш глаз имеет астигматизм, т. е. хрусталик глаза асимметричен относительно оси. Это ненормальный хрусталик.) Расстояние $q$ от линзы глаза (хрусталика) до сетчатки равно примерно 3 *см*. В обратных метрах ($м^{-1}$) имеем $q^{-1} = (0{,}03\ м)^{-1} \approx 33\ м^{-1}$, т. е. $q^{-1}$ равно примерно 33 обратным метрам. Глаз, рассматривающий удаленный предмет на расстоянии $p = \infty$, имеет силу линзы (хрусталика) $f^{-1}$, равную $f^{-1} = p^{-1} + q^{-1} = 0 + 33\ м^{-1} = 33$ D. Чтобы сфокусировать на сетчатку объект на расстоянии $p = 25$ *см* от глаза, аккомодационный мускул глаза должен увеличить силу линзы глаза (хрусталика) на величину $p^{-1} = (0{,}25\ м)^{-1} = 4м^{-1} = 4$ D. В этом случае полная сила равна 37 D. Если аккомодационный мускул глаза достаточно хорош, то вы можете увеличить силу хрусталика даже на величину 10 D, и предмет, рассматриваемый вами на расстоянии $p = (10\ \text{D})^{-1} = 0{,}1\ м = 10\ см$, будет находиться в фокусе хрусталика. В этом случае предмет выглядит больше и вам лучше видны его детали. Если на расстоянии одного сантиметра от глаза вы сможете сфокусировать изображение предмета на сетчатке, то предмет будет выглядеть в 25 раз больше, чем на расстоянии в 25 *см*, соответственно вы сможете увидеть детали, в 25 раз более мелкие. Однако мускулы, вызывающие аккомодацию, не имеют такой силы.

*Простое увеличительное стекло.* При нормальном зрении можно рассматривать без утомления небольшой предмет, находящийся на расстоянии примерно 25 *см* от невооруженного глаза. Если размер предмета $h$ *см*, то он стягивает дугу в $h/25$ *рад*, и эта величина определяет размер изображения на сетчатке. Если вы можете поднести предмет ближе (сохранив фокусировку), то он даст на сетчатке изображение большего размера. Чтобы при этом сохранить ясность изображения (т. е. фокусировку), аккомодационный мускул должен увеличить силу линзы. Это трудно и утомительно для глаза. Попробуем использовать линзу с фокусным расстоянием $f$ (в *см*).

Расположите линзу прямо перед глазом. Поднесите предмет ближе. Когда предмет будет находиться в фокальной плоскости линзы, каждая точка предмета будет давать за линзой параллельный пучок лучей, падающий на глаз. Такой пучок вам уже легко сфокусировать, поскольку в этом случае аккомодационный мускул расслаблен. Предоставляем вам показать, что при использовании линзы угловой размер предмета возрастает в $25/f$ раз, где $f$ — фокусное расстояние линзы (считаем, что углы малы, так что можно пользоваться приближением малого угла). (См. рис. 9.31.)

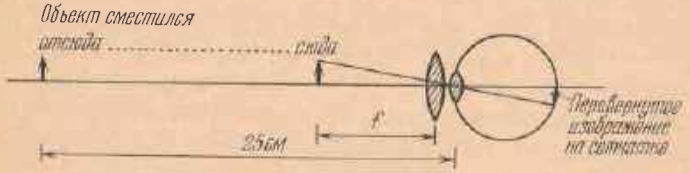



Рис. 9.31. Простое увеличительное стекло.
Сила главной линзы хрусталика складывается с силой увеличительного стекла. Объект может быть приближен к глазу, что увеличивает размер изображения на сетчатке.

*Увеличение с помощью маленького отверстия.* Возьмите кусок алюминиевой фольги и проделайте в нем небольшое отверстие диаметром 0,5 *мм* или меньше. Поднесите фольгу близко к глазу и смотрите через отверстие на источник света. Вы увидите дифракционную картину. Теперь посмотрите через отверстие на хорошо освещенную печатную страницу. (Если вы носите очки, снимите их. Для этого опыта они не нужны и от них не будет проку.) Поднесите страницу ближе и ближе к глазу. Обратите внимание, что слово, на которое вы смотрите, остается в фокусе и увеличивается по мере приближения! (В конце концов оно расплывается, потому что ваше отверстие недостаточно мало.) Увеличение, получаемое в этом случае, легко вычислить, сделав чертеж, подобный рис. 9.31, и заменив в нем линзу на маленькое отверстие.

*Действительно ли мы видим перевернутые изображения предметов?* Вот способ, с помощью которого можно убедиться, что изображение на сетчатке перевернуто. Посмотрите через небольшое булавочное отверстие на широкий источник света. Расположите конец карандаша (или булавку) перед экраном с отверстием и смотрите на него. Вы увидите прямое изображение конца карандаша (или булавки). Теперь *измените порядок* расположения предметов, поместив конец карандаша между отверстием (держите его на расстоянии 7—10 *см* от глаза) и глазом. Держите карандаш близко от глаза и, перемещая карандаш вверх и вниз, наблюдайте за направлением движения тени. Куда обращено острие карандаша — вверх или вниз? Теперь сделайте чертеж и объясните, что происходит.

*Изучение поведения глаза.* Глядя через маленькое отверстие на широкий источник (например, небо), вы видите яркий круг. Этот круг представляет собой проекцию зрачка на сетчатку. Вы можете



изучить расширение и сокращение вашего зрачка, открывая и закрывая другой глаз, т. е. глаз, которым вы не смотрите через отверстие! Когда глаз открыт, т. е. свет проходит, зрачок сжат. *То же происходит и со зрачком глаза, которым вы смотрите через отверстие!* Эти «симпатические» сокращения зрачка легко наблюдать. Обратите внимание на то, что для сжатия или расширения зрачка требуется около 0,5 *сек* при неожиданном изменении интенсивности.

*Телескоп.* Телескоп состоит из двух линз. Первая линза — объектив — образует реальное изображение удаленного объекта. С хорошей степенью точности можно считать, что это изображение расположено в фокальной плоскости первой линзы (объектива). Если

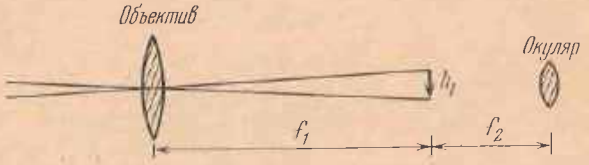



Рис. 9.32. Телескоп.

$\theta_0$ — угловой размер удаленного объекта и $f_1$ — фокусное расстояние объектива, то высота изображения $h_1$, созданного объективом, равна $h_1 = f_1\theta_0$. Вторая линза телескопа называется *окуляром.* Она представляет собой, в принципе, простое увеличительное стекло, которое используется для рассмотрения реального изображения, образованного объективом. Если окуляр расположен так, что изображение, образованное объективом, находится в фокальной плоскости окуляра, то точки изображения дают параллельный пучок, падающий на глаз. В этом случае глаз расслаблен (аккомодационный мускул расслаблен) точно так же, как если бы вы смотрели на удаленный объект без телескопа. Угловой размер, «стягиваемый» окуляром при высоте изображения $h_1$, равен $h_1/f_2$, где $f_2$ — фокусное расстояние окуляра (второй линзы). Это больше, чем угловой размер $\theta_0$, в $(h_1/f_2)/\theta_0 = (f_1\theta_0/f_2)/\theta_0 = f_1/f_2$ раз. Таким образом, угловое увеличение равно $f_1/f_2$ (рис. 9.32).

*Микроскоп.* Микроскоп, подобно телескопу, имеет одну линзу (объектив) для формирования реального изображения объекта и вторую линзу (окуляр) для исследования этого изображения. Объект, который нужно рассмотреть, помещают близко к фокальной плоскости объектива (но не точно в ней). Изображение образуется на большом расстоянии $L$ от объектива — положим, что оно равно $\approx 20$ *см*. Это расстояние практически определяет размер микроскопа. Объект шириной $x$, расположенный на расстоянии от объектива, близком к $f_1$, имеет реальное изображение шириной $h_1 = (L/f_1)\,x$. Это изображение удалено от окуляра на расстояние $f_2$ и стягивает угол относительно окуляра $h_1/f_2$. Если предмет рассматривают невооруженным глазом с расстояния 25 *см*, он образует

угол, равный $x/25$ *см*. Таким образом, увеличение, даваемое микроскопом, равно $(h_1/f_2)/(x/25) = 25\,L/(f_1 f_2)$ (рис. 9.33).

*Толстые сферическая и цилиндрическая линзы.* Небольшая стеклянная бутылка или банка может служить хорошей цилиндрической линзой. (Наполните чистую банку водой или любой другой

Рис. 9.33. Микроскоп.

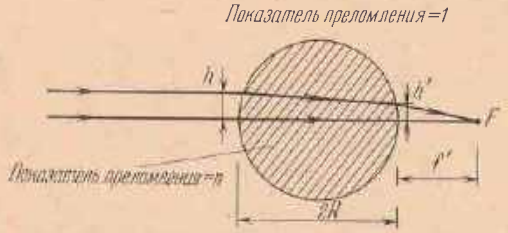



Рис. 9.34. Пример «толстой линзы».
Фокус $F$ находится на расстоянии $f'$ от задней поверхности. Показатель преломления воздуха=1, линзы=$n$.

прозрачной жидкостью.) На рис. 9.34 показано образование такой линзой изображения от параллельного пучка света.

*Отклонение, вызываемое одиночной сферической поверхностью.* Пропустим через нашу цилиндрическую линзу пучок света. Проходящий через центр сферы или круга луч не отклонится. Луч, проходящий на расстоянии $h$ от центра, падает на сферическую поверхность под углом $\theta_1 = h/R$ (для $h/R \ll 1$). Отклонение этого луча на первой поверхности равно углу падения $\theta_1$ минус угол преломления $\theta_2$. Для малых углов закон Снеллиуса $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ примет вид $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$. Тогда *отклонение луча по направлению к оси* равно

$$\delta = \theta_1 - \theta_2 = \theta_1\left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right) = \theta_1\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right). \qquad (96)$$

Уравнение (96) является общим (для малых углов) и используется для лучей, проходящих через сложные системы. В нашем примере отклонение на первой поверхности равно

$$\delta = \frac{h}{R}\left(1 - \frac{1}{n}\right). \qquad (97)$$

Теперь последуем за лучом к задней поверхности. Луч станет ближе к оси на величину $2R\delta$, и на задней поверхности расстояние $h'$ от оси будет равно (см. рис. 9.34)

$$h' = h - 2R\delta = h - 2h\left(1 - \frac{1}{n}\right) = h\left(\frac{2}{n} - 1\right). \qquad (98)$$



На задней поверхности луч опять отклонится по направлению к оси. Из симметрии луча относительно хорды (т. е. той части луча, которая внутри круга) следует, что отклонение при выходе будет таким же, как и при входе. Таким образом, луч выходит под углом $2\delta$ к оси на расстоянии $h'$ от оси. Поэтому он пересечет ось на расстоянии $f'$ за задней поверхностью. Для величины $f'$ справедливо равенство

$$2\delta = \frac{h'}{f'}. \qquad (99)$$

Выражения (97), (98) и (99) дают

$$f' = \frac{h'}{2\delta} = \frac{h\left(\frac{2}{n} - 1\right)}{\frac{2h}{R}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{R}{2}\,\frac{(2-n)}{(n-1)}. \qquad (100)$$

С помощью уравнения (100) вы можете (имея банку или бутылку) определить показатель преломления воды или (например) минерального масла. (Уравнение (100) справедливо как для цилиндра, так и для сферы.) См. домашний опыт 9.42.

*Микроскоп Левенгука.* Первый в мире микроскоп представлял собой просто небольшую стеклянную сферу. Вы можете сделать такой микроскоп сами. Для этого нужен лишь прозрачный стеклянный шарик. Микроскоп работает следующим образом. Поместите сферу прямо перед глазом. Положите «насекомое» (которое вы хотите рассмотреть) в фокус $F$ (см. рис. 9.34). Данная точка на «насекомом» даст параллельный пучок света, входящий в глаз. Поскольку пучок параллельный, то вы можете ослабить аккомодационный мускул, и пучок будет фокусироваться на сетчатке в точку. Другая точка «насекомого» будет фокусироваться в другую точку на сетчатке. Вычислим увеличение, которое дает такая линза. Положим, что продольный размер «насекомого» равен $x$. Лучи, идущие с крайних точек «насекомого» и проходящие через центр линзы, не отклоняются. Это значит, что угловой размер «насекомого» равен $x$, деленному на расстояние от $F$ до центра сферы:

$$\theta = \frac{x}{R + f'}. \qquad (101)$$

Это — угол между параллельными пучками, соответствующими изображениям крайних точек «насекомого» на вашей сетчатке, и поэтому является угловым размером, который вы видите, используя микроскоп. Если рассматривать «насекомое» без микроскопа, то, чтобы иметь на сетчатке максимально большое хорошо сфокусированное изображение, вы должны расположить «насекомое» на расстоянии 25 *см* от глаза. Угловой размер «насекомого» будет равен $x/25$ *см*. Угловое увеличение $M$ поэтому равно

$$M = \frac{25}{R + f'} = \frac{25}{R\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2-n}{n-1}\right)\right]}. \qquad (102)$$

Так, например, если $R = 1$ *мм* и $n = {}^3/_2$ (стекло), то $M = 167$.

*Отражатель типа скотчлайт.* Если $n = 2$, то, в соответствии с уравнением (98), луч, параллельный оси и входящий в сферическую линзу на расстоянии $h$ от оси, пересекает эту ось на задней поверхности ($h' = 0$). Таким образом, параллельный пучок фокусируется точно на задней поверхности сферы. Здесь пучок частично отражается и частично проходит. Отраженная часть пучка распространяется в направлении, обратном направлению падающего пучка (рис. 9.35). Прошедший через заднюю поверхность свет может быть в значительной степени отражен обратно в стекло, если накрыть заднюю поверхность серебряным отражателем. Этот принцип используется в отражающем материале, называемом Scotchlite. Он, кстати, используется для устройства ярких дорожных знаков. Исследуйте его (знак) с помощью увеличительного стекла. Вы увидите, что он состоит из многих маленьких стеклянных сфер, вставленных в липкую посеребренную поверхность, выкрашенную чистым красным шеллаком (для красного Scotchlite). Оказывается, что наибольший коэффициент преломления, который можно получить, используя стекло, равен $n = 1{,}9$. Это достаточно близко к 2 и дает довольно хорошие результаты.

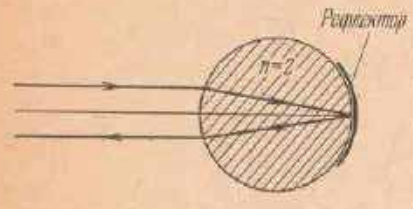


Рис. 9.35. Обратный ход лучей в идеальном отражателе типа скотчлайт с показателем преломления $n=2$.

Следующее поколение самых больших в мире жидководородных пузырьковых камер, которые теперь (1968 г.) разрабатываются, будет (по крайней мере некоторые из них) использовать покрытие из Scotchlite на дне камеры для того, чтобы направить лучи света, освещающего камеру, обратно к их источнику.

### Задачи и домашние опыты

**9.1.** *Ближнее и дальнее поля.* Экран с двумя щелями, разделенными расстоянием 0,1 *мм*, облучен красным светом. Для какого расстояния от экрана справедливо приближение далекого поля? Рассмотрим две антенны, испускающие 3-*см* радиоволны. Расстояние между антеннами 10 *см*. На каком расстоянии от антенн справедливо приближение далекого поля?

**9.2.** Двойная щель (расстояние между щелями 0,5 *мм*) облучается параллельным пучком света от газового лазера (он работает на смеси гелия и неона), который дает монохроматическое излучение с длиной волны 6328 Å. Каково расстояние между интерференционными полосами на экране, находящемся на расстоянии 5 *м* от щели?

**9.3.** Какова «средняя длина» классического волнового пакета для света, испущенного атомом со средним временем высвечивания $10^{-8}$ *сек*? В обычном газоразрядном источнике из-за эффекта Доплера и столкновений между атомами эффективное время когерентности уменьшается до $10^{-9}$ *сек*. Какова в этих условиях длина волнового пакета?

**9.4.** Реальный «линейный» источник видимого света имеет ширину 1 *мм*. Как далеко от экрана с двумя щелями (расстояние между щелями 0,5 *мм*) его нужно поместить, чтобы две щели можно было считать когерентными источниками?

**9.5.** На каком расстоянии от автомобиля вы начинаете различать глазами обе светящиеся фары?



**9.6.** Диаметр Венеры около 13 000 *км*. Когда мы видим ее как «вечернюю» или «утреннюю» звезду, она находится на расстоянии 150 млн. *км* (приблизительно равном расстоянию до Солнца). Невооруженному глазу она кажется «большей, чем точка». Видите ли вы истинный размер Венеры?

**9.7.** Опыт. *Разрешающая сила глаза.* Возьмите две осветительные лампы одинаковой мощности (скажем, 150 *вт*), одну с прозрачным баллоном и не очень большой нитью ($\approx$2,5 *см*), а другую с матовым баллоном диаметром около 8 *см*. На каком расстоянии от ламп их кажущиеся размеры будут одинаковы? Найдя это расстояние, сравните кажущиеся размеры двух ламп, имеющих одинаковые реальные размеры, но различающихся по мощности в два или три раза. Объясните полученный результат. Почему Венера кажется большей, чем точка? (См. задачу 9.6.)

**9.8.** Опыт. Для опыта нужны линейный источник белого света и две идентичные дифракционные решетки. Ориентируйте лампу так, чтобы нить была вертикальной, и посмотрите на нее через решетку (она должна быть близкой к глазу), ориентированную так, чтобы спектр был развернут по горизонтали. Теперь совместите с первой решеткой вторую и осторожно поворачивайте ее до тех пор, пока спектры первого порядка обеих решеток не совместятся. Действуя очень тщательно, вы сумеете обнаружить «черные полосы», пересекающие окрашенное изображение первого порядка. Часть объяснения заключается в следующем. Расстояние между штрихами равно $d$. Обозначим через $s$ расстояние между параллельными плоскостями обеих решеток. Их можно считать двумя заборами или частоколами, стоящими друг перед другом. При некоторых углах отражения штрихи обеих решеток будут лежать на одной линии, а при других углах проекции штрихов одной решетки могут лежать посередине между смежными штрихами другой. В последнем случае эффективное число штрихов на единицу длины $d^{-1}$ удваивается. Теперь начинается физика. Почему вы получаете черные полосы? Соответствуют ли они первому или второму случаю наложения штрихов? Можете ли вы найти расстояние $s$, зная $d^{-1}$, или $d^{-1}$, зная $s$?

**9.9.** Опыт. *Дифракционная картина от шелкового чулка.* Вам нужен тонкий шелковый (или нейлоновый) чулок и точечный источник белого света. Для этой цели вполне подойдет далекий уличный фонарь, но еще лучше 6-*в* лампочка карманного фонаря с нитью длиной около 0,5 *мм*. Чтобы получить хороший точечный источник, удалите линзу фонаря, а параболический рефлектор закройте куском черной материи или бумаги (оставив щель для лампы). Еще проще — смотрите на лампу со стороны, чтобы не мешал пучок, отраженный рефлектором.

Посмотрите на источник света через чулок. Наблюдаемая вами картина позволяет оценить среднее расстояние между нитями и число нитей на 1 *мм*. Сложите чулок в несколько слоев и снова посмотрите на источник. Вы увидите концентрические окружности, очень похожие на картину дифракции рентгеновских лучей от «порошка».

**9.10.** Опыт. *Долгоиграющая пластинка как дифракционная решетка.* Посмотрите на отражение источника белого света (при почти скользящем падении) от пластинки на 33 *об/мин*. Поверхность пластинки с нанесенными на ней углублениями является хорошей отражающей решеткой. Определите, хотя бы грубо, длину волны красного и синего света, пользуясь этой решеткой. Опишите ваш метод. Как можно определить положение максимума нулевого порядка, соответствующего зеркальному отражению?

**9.11.** Опыт. *На какой стороне решетки находятся царапины?* Чтобы решить этот вопрос, смажьте одну ее поверхность маслом и посмотрите на белый источник света. Вытрите эту и смажьте маслом вторую поверхность. Посмотрите через решетку на источник света. Дайте объяснение наблюдаемому.

**9.12.** Рассмотрим касающиеся сферическое и параболическое зеркала, показанные на рис. 9.24. Направим ось $z$ вправо по оси симметрии системы, а ось $x$ перпендикулярно $z$. Пусть в вершине касающихся зеркал $x = y = z = 0$.

а) Покажите, что для параболической поверхности

$$z = \frac{x^2}{4f}.$$

б) Покажите, что для сферической поверхности (если $x \ll f$)

$$z = \frac{x^2}{4f} + \frac{x^4}{64f^3} + \ldots$$

в) Сравните сферическое зеркало с апертурой диаметром $D$ и с фокусным расстоянием $f$ с параболическим зеркалом с теми же параметрами. Рассмотрите для сферического зеркала угловое отклонение $\delta\theta$ «плохих» лучей (проходящих вблизи края апертуры), вызванное сферической аберрацией (угол $\delta\theta$ равен отклонению от направления $z$ для лучей от точечного источника). Покажите, что $\delta\theta$ меньше дифракционной угловой ширины $\Delta\theta \approx \lambda/D$, если

$$D < 4f\left(\frac{\lambda}{4f}\right)^{1/4}.$$

Таким образом, (например) для видимого света при фокусном расстоянии $f \approx 125$ *см* сферическое зеркало столь же хорошо, как и параболическое, если диаметр $D$ меньше, чем $\sim 10$ *см*.

**9.13.** Поместим между глазом и точечным источником света пластину стекла толщиной $t$. Покажите, используя приближение малых углов, что точечный источник кажется смещенным к наблюдателю на расстояние, близкое к $[(n-1)/n]t$ ($n$—показатель преломления стекла).

**9.14.** «Угловой отражатель» состоит из трех плоских зеркал, соединенных под прямыми углами таким образом, чтобы образовать внутренний угол ящика. Покажите, что луч света, попавший в такой отражатель, выходит из него под углом 180° к первоначальному направлению, независимо от угла входа, если он отражается от всех трех зеркал.

**9.15.** Покажите, что плоская волна, падающая *нормально* к поверхности V-образной призмы с углом $A$, отклоняется на угол $\theta$, определяемый из равенства

$$n \sin A = \sin (A + \theta).$$

**9.16.** Лазерный пучок света (диаметром 1 *см*), расходимость которого определяется дифракцией, направлен на Луну. Каков диаметр освещаемой на Луне поверхности? (Расстояние до Луны равно $\sim 384\,000$ *км*, длина волны лазера 6328 Å, рассеянием в атмосфере Земли пренебрегаем.)

**9.17.** Опыт. *Дифракционная картина от одной щели.* Прикрепите кусок алюминиевой фольги к предметному стеклу. (Это удобно сделать с помощью ленты скотча.) Острым ножом или лезвием бритвы проделайте в фольге узкую щель. Держа ее близко к глазу, посмотрите на линейный источник белого света. Оцените полную угловую ширину центрального максимума.

Оцените отношение длин волн красного и зеленого света, воспользовавшись соответствующими фильтрами. С помощью красного фильтра и выполненной выше оценки угловой ширины дифракционной картины оцените ширину щели (длина волны равна 6500 Å). Имея увеличительное стекло, вы можете непосредственно измерить ширину щели, воспользовавшись миллиметровой шкалой. Сравните оба результата.

**9.18.** Опыт. *Интерференция и дифракция от двух щелей.* С помощью метода, описанного в опыте 9.17, сделайте две параллельные щели, разделенные расстоянием около 0,5 *мм*. Пусть одна из щелей будет длиннее другой на 0,5 *см*. Это позволит быстро переходить от одношелевой к двухщелевой дифракции с помощью простого смещения щелей. Вы сможете увидеть, какая часть двухщелевой картины является «модуляцией одной щелью», возникающей от ненулевой ширины щели. Чтобы понять влияние расстояния $d$ между щелями, процарапайте одну щель под небольшим углом у другой. Советуем сделать много щелей; из них вы сможете выбрать лучшие.

**9.19.** Опыт. *Трехщелевая картина.* Для этого опыта нужно отобрать несколько хороших двойных щелей (опыты 9.17 и 9.18). Проведите третью щель параллельно двум, но пусть она будет короче их, чтобы вы могли быстро переходить от двухщелевой к трехщелевой картине. Важнейшим результатом наблюдения является сужение дифракционных максимумов при добавлении третьей щели.



**9.20.** Опыт. *Когерентность. Размер «точечного» или линейного источника.* Возьмите одиночную щель, ширина которой известна (оценена). Закройте источник света красным фильтром. Находясь достаточно далеко от источника, вы можете наблюдать резкую картину дифракции от одной щели. Теперь приближайтесь к источнику. Найдите расстояние $L$, при котором картина «размоется». («Размытие» возникает на таком расстоянии, когда различные части нити лампы становятся независимыми источниками и перестают быть когерентными для разрешающего времени нашего глаза, см. п. 9.4.) Воспользуйтесь оценками размеров источника и щели, значением $L$ и формулой $d$ (источник) $\times D$ (щель) $\approx L\lambda$ для определения длины волны света.

**9.21.** Опыт. *Когерентность; зеркало Ллойда, «двойная щель, обеспечивающая когерентность».* Глядя на небо или на матовую лампу через обычную двойную щель, помещенную перед глазом, вы не увидите интерференционных полос. Почему? Мы хотим создать двойную щель, которая позволяла бы наблюдать интерференционную картину даже с такими источниками света. Начнем с обычной одиночной щели, способ изготовления которой описан в опыте 9.17. Теперь возьмем второе предметное стекло микроскопа и прислоним его к ребру первого стекла (со щелью) так, чтобы зеркальное изображение щели во втором стекле было параллельно первой щели. Соедините второе стекло с первым комком пластилина или какой-нибудь невысыхающей замазки так, чтобы можно было регулировать относительное положение стекол. Добейтесь такого их положения, чтобы расстояние между щелью и ее изображением было как можно меньше, скажем 0,5 *мм*. Сделайте это, когда все устройство находится на расстоянии $\sim 30$ *см* от глаз, чтобы вы могли сфокусировать глаза на «двойной» щели, когда вы держите ее около яркого источника. Получив таким образом хорошую двойную щель, поместите ее перед глазом и сфокусируйте глаз на большое расстояние (т. е. на источник света). Заметьте три или четыре «черные полосы», параллельные «двойной когерентной щели». Это места деструктивной интерференции (нулевая интенсивность) между пучком света от реальной щели и пучком от ее изображения. Изображение щели всегда полностью когерентно реальной щели. (Почему?) Благодаря изменению фазы при отражении потоки от щели и от ее изображения сдвинуты по фазе на 180°.

Ответьте на следующие вопросы (исходя из опыта и теории): будут ли «яркие» линии так же ярки, как яркий фон, который вы видите с одной щелью? ярче? темнее?

**9.22.** Опыт. *Зажим для бумаг и зеркало Ллойда.* (См. опыт 9.21.) Зажим для бумаг, освещенный лампой, является узким линейным источником света. Поместите параллельно щели предметное стекло микроскопа, используя его как зеркало (см. опыт. 9.21). Получив хорошую «когерентную двойную щель» с расстоянием между щелями $\sim 0{,}5$ *мм*, поднесите ее к глазу и постарайтесь рассмотреть темные интерференционные полосы, о которых говорилось в опыте 9.21. Этот опыт требует больших усилий, чем опыт 9.21. Падение света на зеркало должно быть возможно более скользящим, а источник света не должен ослеплять.

**9.23.** Опыт. *Двухмерная дифракционная картина.*

а) Посмотрите на удаленный источник уличного света через обычную оконную штору. Поверните ее так, чтобы проекция расстояния между нитями материи была возможно меньшей. Как далеко должна находиться лампа диаметром 20 *см* (с матовой поверхностью), чтобы дать когерентное освещение двух соседних нитей экрана?

б) Посмотрите на уличный фонарь или на точечный источник (лампа карманного фонаря, см. опыт 9.9) через различные материалы: шелковый носовой платок, нейлоновые носки, зонтик и т. д.

в) Посмотрите на точечный источник света через две дифракционные решетки. Поворачивайте одну из них до тех пор, пока щели обеих решеток не станут перпендикулярны друг другу. Заметьте появление нескольких ярких «точек» под углом в 45° к двум взаимно перпендикулярным спектрам. Это новое явление, которое нельзя объяснить простым наложением интенсивностей от двух решеток. Оно возникло от суперпозиции амплитуд света, рассеянного обеими решетками. Объясните с помощью схемы происхождение этих дополнительных «точек». Дифракционная картина от двух скрещенных решеток аналогична дифракционной картине при отражении рентгеновских лучей от одиночного кристалла.

**9.24.** Опыт. *Дифракционная решетка и полоса пропускания фильтров.* Воспользуйтесь дифракционной решеткой для измерения длины волны красного и зеленого света, проходящего через ваши фильтры. Поместите точечный или линейный источник вблизи стены (или двери) и сделайте на ней метку на расстоянии 30 *см* от источника. Смотрите на источник через решетку, держа фильтр перед решеткой (или перед источником). Придвигайтесь и удаляйтесь от источника, пока интересующий вас цвет не покажется совпавшим с меткой на стене или двери. Измерьте расстояния и вычислите длину волны. Этот опыт дает возможность прокалибровать ваши фильтры. Запомните результат. (Теперь с помощью фильтров и решетки вы сможете, не прибегая к геометрическим измерениям, определить длину волны для других цветов.)

**9.25.** Опыт. *Спектральные линии.* Наберите немного соли на мокрую поверхность ножа (или ложки, или гвоздя и т. п.) и поместите нож в пламя газовой горелки. Смотрите на желтое пламя через решетку (этот опыт лучше делать ночью в темной кухне). Заметьте, что изображение желтого пламени в первом и более высоких порядках оказывается столь же резким и ясным, как и «прямое» изображение нулевого порядка. Это объясняется тем, что желтый цвет образован спектральной «линией», ширина которой очень мала. (В действительности желтый цвет натрия представляет собой «дублет» из двух линий с длинами волн 5890 и 5896 Å.) Теперь посмотрите на пламя свечи. В нулевом порядке ее пламя мало отличается от пламени натрия: они оба кажутся желтыми. Но уже в дифракционном изображении первого порядка пламя свечи сильно размыто, тогда как спектр натрия сохраняет свою резкость. «Желтизна» свечи, обязанная излучению атомов углерода, имеет спектр, распространяющийся в обе стороны от видимого спектра.

Мы перечислим некоторые источники света, дающие резкие спектральные линии. Советуем понаблюдать за ними с помощью решетки.

*Пары ртути*: флюоресцентные лампы, лампы уличного света, лампы дневного света.

*Неон*: трубки, используемые для рекламы. Неон дает большое число линий.

*Стронций*. Растворите в воде немного хлористого стронция и, смочив в растворе кончик ножа, внесите его в пламя горелки. Длина волны красной линии стронция является известным стандартом частоты.

*Медь*. Воспользуйтесь медным купоросом, его можно использовать так же, как хлористый стронций. Медный купорос дает прекрасный зеленый цвет.

*Углеводород*. Посмотрите на спектр первого порядка пламени газовой горелки. Вы увидите резкое и ясное изображение в синем и зеленом свете. «Синий» цвет пламени связан с одной или несколькими почти монохроматическими спектральными линиями.

**9.26.** Опыт. *Полосы Фабри — Перо.* Простым источником почти монохроматического света является пламя горелки, в которую внесен кончик ножа, смоченный в растворе соли. Воспользуйтесь этим источником для наблюдения полос Фабри—Перо. Посмотрите через пламя на его изображение в куске стекла (покровное стекло или даже стекло, покрывающее картину или снимок). Вы увидите полосы, напоминающие отпечатки пальцев. Если стекло оптически плоское, полосы представляют собой окружности, центрированные вокруг вашего глаза, но в любом случае они ясно видны. Газовая горелка и нож, смоченный в растворе соли, являются яркими источниками монохроматического света и вы сможете сделать этот опыт даже при дневном свете. В качестве простого, стабильного и широкого источника монохроматического света можно рекомендовать неоновую лампу.

**9.27.** Опыт. *Трубка в качестве спектрометра, линии Фраунгофера.* Возьмите картонную трубку длиной от 45 до 60 *см*. На одном конце трубки смонтируйте одиночную щель. Ее лучше всего сделать из двух бритвенных лезвий. Одно из них закрепите неподвижно с помощью ленты скотча, другое закрепите с помощью пластилина или замазки, чтобы иметь возможность менять ширину щели (узкая щель — лучшее разрешение, широкая щель — больше света). Наблюдайте с помощью такого спектрометра за источниками света, перечисленными в опыте 9.25.

В о п р о с. Можно ли таким спектрометром разрешить дублет в спектре натрия ($\lambda_1=5890$ Å и $\lambda_2=5896$ Å)?

О т в е т. Нельзя; чтобы улучшить разрешение, можно взять решетку с меньшим расстоянием $d$ между линиями или увеличить число используемых линий.



Последний способ означает увеличение ширины $D$ решетки. В нашем приборе $D$— диаметр вашего зрачка, близкий к 2 *мм*. Добавив телескоп с диаметром объектива, близким к 2 *см*, вы можете улучшить угловое разрешение $\lambda/D$ в 10 раз, если все лучи, прошедшие через объектив, попадут в ваш зрачок и дифракционная решетка будет лежать на самой линзе.

С помощью такого спектрометра можно увидеть линии Фраунгофера в спектре Солнца. Выберите для этого солнечный день. Положите на землю несколько слоев белой бумаги (больше одного для того, чтобы она была «очень белой») и посмотрите на ее поверхность через ваш спектрометр. Используйте плотную ткань или одеяло, чтобы защитить глаза от рассеянного света. Воспользуйтесь так же краем трубки, чтобы «спрятать» ослепляюще яркий свет нулевого порядка. Ширину щели сделайте равной $\sim$0,5 *мм*. Заметьте, что непрерывный спектр Солнца пересечен несколькими темными линиями. Если вы их не видите, попытайтесь подрегулировать ширину щели, чтобы добиться лучшей освещенности. Другой метод заключается в том, чтобы покрыть очень узкую щель несколькими слоями вощеной бумаги (или кальки) и смотреть на небо вблизи Солнца, меняя интенсивность света степенью приближения к направлению на Солнце.

Темные линии являются линиями поглощения. Горячее Солнце испускает непрерывный спектр излучения, которое возбуждает атомы относительно холодной внешней газовой оболочки Солнца. Атомы оболочки излучают свет, соответствующий их характеристическим частотам. Оболочка для таких частот почти непрозрачна, и этим объясняются черные линии, возникающие в областях спектра, отвечающих характеристическим частотам. Легче всего наблюдать близко расположенные линии в желтой части спектра, связанные с излучением атомов железа, кальция и магния, линию водорода в зелено-синей части спектра и несколько тесно расположенных углеводородных линий в синей части спектра. Они аналогичны линиям испускания, которые вы наблюдали в спектре пламени газовой горелки. Может быть, вам удастся заметить линию поглощения натрия, хотя автору это удается с трудом. Чтобы знать, где искать эти линии, посмотрите на линии испускания натрия, кидая крупицы соли в пламя горелки. Именно эти линии будут «потеряны» во фраунгоферовском спектре. (См. цветную вклейку после стр. 480.)

**9.28.** Опыт. *Дифракция водяных волн.* Осветите ванну сверху лампой с небольшой нитью в прозрачном баллоне (нам нужны резкие тени). Теперь создайте бегущие «прямые волны» — двухмерный аналог плоских волн,— покачивая доску у края ванны.

Пусть кофейная чашка будет непрозрачным препятствием. Оцените расстояние $L$, за которым «тень» от чашки размывается. Предположим, что диаметр чашки вам неизвестен. Оцените его экспериментально: для этого нужно извлечь квадратный корень из произведения $L$ на длину волны водяных волн. (Происхождение этой формулы см. в п. 9.6.) Заметим, что этим методом определяется диаметр атомных ядер — по измерениям их дифракционного поперечного сечения. (З а м е ч а н и е. В этом опыте довольно трудно измерить длину волны. Проще колебать доску в определенном темпе (как можно быстрее), чтобы знать частоту. По частоте и дисперсионному соотношению для волн в воде (п. 4.2) можно определить длину волны.) Как согласуется ваша оценка размеров чашки с ее действительными размерами?

**9.29.** *Каковы поперечные размеры «плоской волны» от далекого точечного источника?* Мы часто утверждаем, что бегущая волна от далекого точечного источника может считаться «плоской» в пределах ограниченной части пространства, перпендикулярной линии, соединяющей источник с точкой поля. Чем ограничена величина этой области? Пусть $L$ — расстояние до источника, а рассматриваемая область представляет собой круг радиусом $R$. Сколь большим может быть радиус $R$, чтобы разность фаз колебаний в центре круга и по его периферии не превосходила $\Delta\varphi$ радиан?

О т в е т. Фаза в центре круга опережает фазу по его периферии на величину $\Delta\varphi=\pi R^2/L\lambda$. Таким образом, фаза «почти не меняется» по всей площади круга, если площадь круга мала по сравнению с $L\lambda$.

**9.30.** Самая большая из существующих параболических антенн находится в Национальной радиоастрономической обсерватории (Западная Вирджиния) и представляет собой параболическую «тарелку» диаметром около 100 *м*. Чему равно

угловое разрешение этой антенны в радианах и в минутах дуги (эту единицу используют астрономы) для знаменитой 21-*см* линии водорода?

Ответ. Точечный источник, удаленный на 100 *м*, будет иметь размер мяча для волейбола.

**9.31.** *«Выходной зрачок» телескопа.* Рассмотрим простой телескоп, состоящий из линзы-объектива и окуляра. Угловое увеличение телескопа равно $f_1/f_2$, где $f_1$ и $f_2$ — фокусные расстояния объектива и окуляра соответственно. Покажите, что не все лучи от далекого объекта, падающие на линзу-объектив (ее диаметр велик), попадают в ваш глаз и что «используемый диаметр» линзы-объектива равен произведению $f_1/f_2$ на диаметр зрачка глаза. Пусть наш телескоп дает восьмикратное увеличение, а свет, выходящий из телескопа, образует параллельный пучок диаметром 4 *мм* (это в два раза больше диаметра зрачка, что удобно для работы с телескопом). При этих условиях диаметр линзы-объектива должен быть равен 32 *мм*. Больший диаметр не будет использован.

**9.32.** Опыт. *Дифракция на непрозрачных препятствиях.* Этот опыт хорошо получается с белым источником света, который можно сделать из сильного ручного фонарика с 6-*в* лампой, если удалить линзу, а рефлектор закрыть черной материей. (Размер нити у лампы должен быть около 0,5 *мм*.) Расстояние между источником и препятствием должен быть не менее 3 *м*. При этих условиях волну в области препятствия размером в булавку можно считать «когерентной плоской волной». В качестве экрана можно взять предметное стекло микроскопа, к которому приклеен слой полупрозрачной ленты скотча. Пусть тень от препятствия падает на этот экран, расположенный на расстоянии около 30 *см* от глаза (подберите это расстояние по вашему глазу, чтобы вам было удобно смотреть на экран). Ваш глаз должен быть почти на линии источник света — тень на экране, так как полупрозрачный экран рассеивает свет под малым углом (в направлении вперед). Целью нашего опыта (кроме наблюдения за прекрасными дифракционными картинами) является грубая проверка представления о «длине тени» $L_0$, которая определяется уравнением $L_0\lambda \approx D^2$, где $D$ — ширина препятствия. Среди различных препятствий используйте булавку (если ее ширина 0,5 *мм*, то $L_0 \approx 50$ *см* для видимого света) и волос (при толщине волоса 0,05 *мм* $L_0 \approx 0{,}5$ *см*).

Начнем с булавки. Расположим экран на расстоянии 5—6 *м* от булавки. При этом дифракционная картина достаточно велика, так что увеличительное стекло не нужно. Чтобы избавиться от влияния неоднородностей полупрозрачной ленты скотча, можно слегка покачать экран. Обратите внимание на яркое пятно в центре тени от булавочной головки и на яркую линию по оси самой булавки. Что ярче: пятно от головки и яркая линия или сам светящийся экран вблизи изображения? Теперь рассмотрите изображение булавки, приблизив экран на расстояние 5 *см* от булавки. (Может понадобиться увеличительное стекло, если у вас недостаточно сильное зрение.) Заметьте, что в этом случае тень совершенно темная, без ярких мест в центре. Объяснение в том, что вы приблизились на расстояние, гораздо меньшее $L_0$. На краях тени видны полосы. Этого следует ожидать (см. п. 9.6).

Теперь рассмотрим изображение волоса. Расположим экран непосредственно за волосом (на расстоянии $\sim 1$ *мм*) и будем смотреть на тень через увеличительное стекло. Она покажется резкой и черной, так как $L$ мало по сравнению с $L_0$. Увеличим расстояние до нескольких сантиметров. Вы увидите красивые полосы. Отодвиньте экран на 5—6 *м* — это расстояние в несколько сот раз больше $L_0$. Из наших рассуждений следует, что теперь тень должна быть практически размазана и на фоне света от источника ее будет трудно рассмотреть. Глаз является весьма чувствительным детектором контрастов, и, возможно, вам удастся кое-что увидеть. Рассмотрите другие препятствия, например острие ножа, отверстия в алюминиевой фольге и т. п.

**9.33.** Опыт. *Скотчлайт.* Достаньте кусок красной ленты скотчлайта. Ее применяют для декораций, для устройства отражателей, связанных с техникой безопасности, для освещения пузырьковых камер и т. п. Рассмотрите ее поверхность через увеличительное стекло. Укрепите полоску скотчлайта на стене и направьте на нее свет карманного фонаря. Держите фонарь вблизи носа, чтобы наблюдать свет, отраженный под углами, близкими к 180°. Отодвиньте фонарь в сторону, но так, чтобы пучок света еще остался на скотчлайте. Этим методом вы можете оценить угловую ширину пучка света, отраженного от скотчлайта. Почему вообще отраженный пучок имеет конечную ширину, т. е. почему отражение не происходит точно на 180°?



**9.34.** *Когерентность и поляризация.* Свет неполяризованного источника проходит через поляроид, ось которого составляет 45° с осями $x$ и $y$, и падает на экран с двойной щелью. Каждая щель покрыта поляроидом, ось которого направлена для одной щели по оси $x$, а для другой — по оси $y$.

а) Вы смотрите невооруженным глазом на интерференционную картину. Видите ли вы обычную картину дифракции от двух щелей? Что вы ожидаете увидеть?

б) Вы смотрите на интерференционную картину, держа у глаз поляроид. Что вы должны увидеть? Что будет происходить при вращении поляроида?

в) Вы смотрите на интерференционную картину через круговой поляризатор. Что вы увидите?

Эта задача имеет много интересных вариантов.

1. Поместите у щелей левый и правый поляризаторы и повторите рассмотренные выше мысленные опыты.

2. Поместите сразу за щелями пластинки $^1/_4\lambda$ и $^1/_2\lambda$ и т. д.

**9.35.** *Интерферометр с двойной щелью.* Одна щель покрыта предметным стеклом толщиной 1 *мм*, другая щель открыта. Покажите, что монохроматический свет с длиной волны 5000 Å, проходящий через первую щель, испытывает запаздывание относительно непокрытой щели, близкое к 1000 длин волн. Если при этом дифракционная картина не размазана, свет в высокой степени монохроматичен. Сколь узкой должна быть полоса частот (в Å), чтобы относительный сдвиг фаз от двух щелей менялся меньше чем на 180° от одного края полосы частот до другого? Можете ли вы использовать этот факт для измерения ширины спектральной линии? (Что следует измерить, какой график построить и как из этого графика получить ширину полосы?)

**9.36.** Опыт. *Очень маленькое отверстие как увеличитель.* Получите формулу для увеличения, которое дает небольшое отверстие. Проверьте ее следующим образом. На одном куске бумаги нанесите две метки на расстоянии 2 *см* друг от друга, а на другом — две метки на расстоянии 2 *мм*. К одному глазу поднесите экран с отверстием. Оба куска бумаги удобнее всего осветить сзади. Смотрите на 2-*мм* метки через отверстие, а на 2-*см* метки — невооруженным глазом. Приближая бумагу с 2-*мм* метками, добейтесь того, чтобы их изображение в одном глазу совместилось с изображением 2-*см* меток в другом. Измерьте соответствующие расстояния.

**9.37.** Опыт. *Шарики.* Возьмите стеклянные шарики. Их можно использовать в качестве микроскопа Ливенгука. Поместите точечный источник света на расстоянии метра и сфокусируйте его с помощью шарика в «точку». На каком расстоянии от шарика находится фокус? Чему равен показатель преломления стекла? (Чтобы проверить эту величину, посмотрите, согласуется ли измеренное вами фокусное расстояние с результатом, полученным в п. 9.7, если предположить, что $n=1{,}5$.) Посмотрите через шарик на небольшой предмет. Используя метод, описанный в опыте 9.36, измерьте увеличение шарика.

**9.38.** *Плоско-выпуклая линза.* Это линза — плоская с одной стороны и обладающая сферической (или цилиндрической) поверхностью — с другой. Получите выражение для положения фокальной плоскости такой линзы, если свет падает на ее плоскую поверхность.

**9.39.** Опыт. *Измерение показателя преломления жидкости.* Возьмите пустую стеклянную бутылку. Подойдет также баллон от лампы накаливания. Наполним бутылку доверху прозрачной жидкостью. Мы получим толстую цилиндрическую линзу, рассмотренную в п. 9.7. Наполнив бутылку наполовину и положив ее горизонтально, мы будем иметь плоско-выпуклую линзу. Осветите ее сверху точечным или линейным источником. Измерьте расстояние до фокальной плоскости. Воспользовавшись соответствующей формулой, найдите показатель преломления жидкостей: воды, спирта, минерального масла.

**9.40.** *Камера для спутника.* Вы читали в газетах, что на спутниках имеются фотокамеры, позволяющие разрешить объекты диаметром в 30 *см*. Каков должен быть диаметр линзы, если спутник находится на высоте 250 *км*?

**9.41.** Опыт. *«Вывернутые линзы».* Пустая бутылка из-под молока, погруженная в воду, является рассеивающей линзой. Воспользуйтесь аквариумом или большой кастрюлей, в которую можно опустить зеркало, чтобы превратить вертикальный

пучок света в горизонтальный. Несколько капель молока, добавленных в воду, позволят видеть пучок. Хороший «карандашный» пучок можно получить, закрыв линзу ручного фонарика куском картона с центральным отверстием. (Лампы для ручных фонариков обычно имеют наплывы вверху баллона. Но вы используйте не прямой свет от лампы, который уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния, а параллельный пучок от параболического зеркала.) С помощью воды, слегка замутненной молоком (для наблюдения за пучком), вы можете исследовать воздушные линзы или линзы из масла или стекла.

**9.42.** Опыт. *Смешивание цветов.* Наш глаз (и мозг) не производит фурье-анализа света (ухо выполняет эту операцию для звука). Имея некоторый навык, вы, однако, будете в состоянии различить цвет монохроматического излучения и цвет, возникший от смешения излучений с различными длинами волн. Психологически мы различаем «белый» цвет. Дифракционная решетка говорит нам, что это смесь всех длин волн видимого спектра.

а) Посмотрите через ваш красный фильтр. Он пропускает красный и голубой цвет, но задерживает зеленый.

б) Взгляните через дифракционную решетку на два разделенных источника белого света (линейные источники или осветительные лампы). Меняйте расстояние между источниками, пока левый спектр первого порядка правой лампы не перекроется с правым спектром первого порядка левой лампы. Это дает вам возможность смешать две длины волн и рассмотреть «психологический» эффект такого смешения. Для этого опыта лучше всего использовать линейные источники света.

**9.43.** Точечный объект находится на расстоянии 2 *м* от положительной линзы силой в 1 диоптрию, на оси линзы. Где находится изображение?

**9.44.** Тонкая линза, используемая как увеличительное стекло, дает пятикратное увеличение. Вторая линза дает семикратное увеличение. Сложим обе линзы. Чему равно увеличение от составной линзы: 35, 12 или 2?

**9.45.** *Продольное увеличение.* Пусть точечный объект на оси тонкой положительной линзы смещается вдоль оси на величину $dp$. При этом изображение сместится на $dq$. Покажите, что

$$dq = dp\,\frac{q^2}{p^2}.$$

**9.46.** *Глубина фокуса.* Тонкая линза диаметром $D$ фокусирует удаленный от нее на расстояние $p$ точечный объект на фотопленку, расположенную на расстоянии $q$ от линзы. Изображение другого объекта находится на расстоянии $p+dp$ и будет не в фокусе. Оно пройдет через свой фокус до или после пленки и даст на пленке «круг ошибки».

а) Покажите, что диаметр $d$ «круга ошибки» равен $d \approx D(q/p^2)\Delta p$. Таким образом, для данной «допустимой» величины «круга ошибки» (т. е. для данного значения $d$ и для определенных значений $q$ и $p$) «глубина фокуса» $\Delta p$ обратно пропорциональна диаметру линзы $D$. Малые $D$ обеспечивают большую глубину фокуса. Частное от деления фокусного расстояния на диаметр называется «$f$-числом»*). Большое значение $f$-числа означает малый диаметр апертурного ограничения линзы и большую глубину фокуса. Для $D$, равного нулю, мы имеем «камеру-обскуру»; в этом случае из формулы следует бесконечная глубина фокуса. Вы можете проверить этот вывод: в такой камере предметы, находящиеся на расстояниях от 1 *см* до бесконечности, будут в фокусе, и, чтобы рассмотреть их, вам не нужно напрягать аккомодирующие мышцы глаза.

б) Если $D$ становится слишком малым, мы не можем пренебречь дифракцией. Покажите, что она создает «круг ошибки» диаметром $d \approx q\lambda/D$. Теперь допустим, что мы не ограничены «плотностью зерен» фотопленки и вообще ничем, связанным с пленкой, а также пусть нас не беспокоит вопрос интенсивности (малая интенсивность требует больших $D$). Введем величину $d_{\text{ср}}^2$, равную сумме квадратов диаметров «круга ошибки», возникающих из-за конечной глубины фокуса и из-за дифракции. Найдите минимум $d_{\text{ср}}^2$ по переменной $D$, фиксировав другие переменные.

*) Обратное отношение называют *относительным отверстием*; квадрат относительного отверстия называют *светосилой линзы*. (*Прим. ред.*)



Покажите, что при данных $\lambda$, $p$ и $\Delta p$ наименее размытое изображение соответствует $D^2 = \lambda p^2/\Delta p$.

в) Забудем о дифракции. Предположим, что мы фотографируем двух людей, находящихся от нас на расстояниях 4,5 и 7,5 *м*. Фокусное расстояние линзы равно 10 *см*. Вы хотите, чтобы диаметр «круга ошибки» для *обоих* людей был меньше 1 *мм* «в пространстве объекта». Найдите необходимое $f$-число. (Используйте грубые приближения, например, возьмите среднее значение $p \approx 6$ *м*.)

г) Можно ли в условиях в) заметить влияние дифракции на изображение?

Ответ. $f$-число$\approx$50. Размытость изображения в равной степени вызвана глубиной фокуса и дифракцией.

**9.47.** Опыт. *Диаграмма излучения камертона*; *квадрупольное излучение.* Поднесите к уху ножку звучащего камертона. Вращая его вокруг оси (ось рукоятки камертона), прислушайтесь к максимумам и минимумам интенсивности. Поднесите камертон к концу трубы, настроенной в резонанс с камертоном, и медленно вращайте его вокруг своей оси. При вращении на 360° вы обнаружите четыре угла нулевой и четыре угла максимальной интенсивности. Держите камертон в положении нулевой интенсивности. Не нарушая относительного положения камертона и трубы, поместите между камертоном и концом трубы кусок картона таким образом, чтобы он закрыл половину входного отверстия трубы. При этом одна ножка камертона должна остаться у открытой половины входного отверстия. Что произошло? Почему? Теперь поместите у противоположных концов трубы два камертона и слушайте биения. Установив ритм биений, поверните один камертон на 90° вокруг оси. При этом вы перейдете от одного угла максимальной интенсивности к следующему. Биения не будут продолжаться. Сразу после поворота вы услышите два биения вместо одного, а затем биения будут продолжаться в обычном ритме, но максимумы сменятся минимумами. Если у вас недостаточно острый слух, вам будет трудно заметить эту смену, но вы всегда заметите «дополнительное» биение, возникшее при повороте камертона. (Вам поможет, если вы будете считать: «1 и 2 и 3 и...», произнося цифру на максимуме, а «и» на минимуме биений; при этом не сбейтесь со счета при поворачивании камертона.)

В чем объяснение этих явлений? Подумайте о том, как ножки камертона действуют на окружающий воздух. Когда они удаляются друг от друга, они отталкивают от себя воздух с внешней стороны, сообщая ему направленную наружу скорость. Благодаря тому, что пространство между ножками увеличивается, в нем возникает небольшой недостаток воздуха. Воздух с боков устремляется в это пространство. Таким образом, скорость воздуха направлена наружу в плоскости ножек и внутрь области между ножками в перпендикулярной плоскости. В следующую половину цикла ножки сближаются; воздух устремляется к наружным поверхностям ножек и выталкивается из области между ними. Где-то между этими направлениями должны быть направления, для которых индуцированная скорость воздуха равна нулю, т. е. направления, где скорость имеет узлы. В этом объяснение четырех максимумов и четырех минимумов, возникающих при полном обороте камертона вокруг длинной оси. Картина излучения, показанная на рисунке *а*), отвечает первой половине периода, когда ножки движутся наружу. Соответствующее излучение носит название *квадрупольного излучения*. Если вы имеете лишь одну ножку, диаграмма излучения, показывающая положение максимумов и минимумов и относительные фазы колебания, соответствует *дипольному излучению*. Если вы имеете два идентичных осциллирующих диполя (в нашем примере речь идет о звуке, но с равным успехом мы можем говорить о радиоволнах или о других волнах), смещенных в пространстве и колеблющихся с фазами, отличающимися на 180°, вы получите квадрупольное излучение. В зависимости от направления смещения по отношению к направлению колебаний одного диполя, вы получите различные диаграммы квадрупольного излучения. Однако все они имеют общие свойства: четыре «лепестка» интенсивных колебаний, соответствующих «конструктивной» интерференции вкладов от обоих диполей. Фазы в соседних лепестках отличаются на 180°. Между лепестками расположены узлы колебаний. (Диаграмма диполя имеет два лепестка и две линии узлов.) На рисунках показаны диаграммы дипольных и двух типов квадрупольных колебаний. Рисунок *б*) представляет собой волновую функцию дипольного излучения в полярных координатах (для данного момента времени). Диаграмма *в*) дает суперпозицию волновых функций

двух диполей, сдвинутых относительно друг друга в направлении лепестков диполя и колеблющихся со сдвигом фаз в 180°. Эта диаграмма соответствует колебаниям камертона. Диаграмма *е)* отвечает суперпозиции двух диполей, смещенных по линии узлов и колеблющихся с тем же сдвигом фаз в 180°.

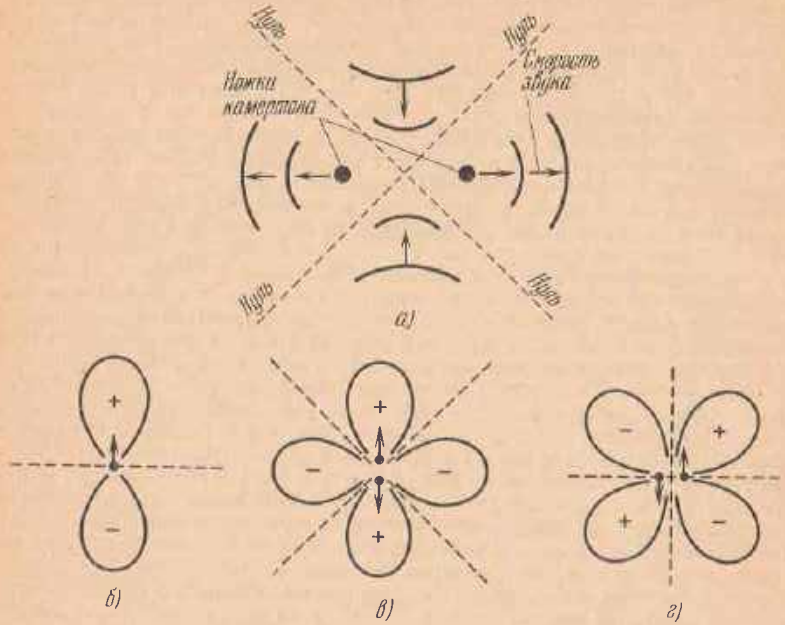



Рис. К задаче 9.47. Диаграмма излучения камертона.
*а)* Квадруполь; *б)* диполь; *в)* квадруполь; *г)* квадруполь.

**9.48.** Плоская антенна, поверхность которой имеет площадь $A_T$, излучает радиоволны. Они принимаются плоской антенной с площадью $A_R$, находящейся на большом расстоянии $D$ от передатчика. Покажите, что излученная мощность $P_T$ и принятая мощность $P_R$ связаны приближенным соотношением

$$\frac{P_R}{P_T}=\frac{A_R A_T}{\lambda^2 D^2}\,.$$

Предположим, что передающая и принимающая антенны представляют собой суживающийся микроволновый «горн», апертура которого имеет форму квадрата со стороной в 3 *м*. Пусть частота микроволнового излучения равна 1000 *Мгц*, а расстояние между приемником и передатчиком 30 *км*. Чему равно отношение $P_R/P_T$?

**9.49.** *Интерференционная картина от N идентичных щелей.* Амплитуда для этого случая выражается формулой (54), п. 9.6. Получите с помощью векторной диаграммы сумму соответствующих комплексных амплитуд для произвольного значения $\Delta\varphi$ (сдвиг фаз колебаний в соседних щелях). Получите графическое представление для первого нуля, примыкающего к главному максимуму; оно получается из условия, что $\Delta\varphi=2\pi/N$. Покажите на векторной диаграмме, что фазовая постоянная суперпозиции равна среднему из фазовых постоянных первого и последнего вкладов.

**9.50.** *Исправление хроматической аберрации.* С помощью сложной линзы из стекол двух разных сортов можно в значительной степени избавиться от хроматической аберрации. Вместо линзы рассмотрим более простой случай тонкой призмы. Из двух тонких призм с углами при вершинах $\alpha_1$ и $\alpha_2$ образуем сложную призму,



которая отклоняет свет с длиной волны $\lambda=5500$ Å на заданный угол $\theta_0$ и имеет нулевое значение $d\theta_0/d\lambda$. Стекло первой призмы имеет показатель преломления $n_1(\lambda)$, второй — $n_2(\lambda)$. Эти функции нам известны.

Ответ.

$$\alpha_1\frac{dn_1}{d\lambda}=\alpha_2\frac{dn_2}{d\lambda}\,.$$

Теперь разложите величину $\theta$ для длины волны $\lambda$ в ряд Тейлора по переменной $\lambda-\lambda_0$. Остановитесь на члене, пропорциональном $(\lambda-\lambda_0)^2$. Как произвести дальнейшее уменьшение хроматической аберрации? Что для этого нужно?

**9.51.** Опыт. *Подводное видение.* Рассмотрите различные предметы под водой, используя маску для подводной охоты. Объясните, почему предметы кажутся удаленными на три четверти действительного расстояния. Особенно яркой демонстрацией является наблюдение за человеком, чья голова находится над водой. Погрузите нижнюю половину маски в воду так, чтобы вода была на уровне глаз. Тогда вы сможете видеть голову человека, глядя в воздух над водой, и его тело, глядя в воду.

**9.52.** Опыт. *Стекла для подводного видения.* Если вы смотрите под водой без маски, все кажется вам очень размытым. Это объясняется тем, что показатели преломления воды и глаза мало отличаются. Для простоты положим, что они одинаковы. Предположим также, что влияние глазной линзы невелико, т. е. что вся фокусировка происходит вследствие преломления света на первой поверхности воздух — глаз. (Это грубое приближение. Ведь все-таки мы видим под водой.) Пусть фокусное расстояние для первой поверхности равно 3 *см* и при этом параллельный пучок света из воздуха фокусируется на сетчатке. Под водой фокусирующее действие исчезает. Мы хотим сделать такие стекла, чтобы с их помощью можно было ясно видеть под водой. Воспользуемся стеклом с показателем преломления 1,5. Пусть фокусное расстояние сделанной из этого стекла линзы равно 3 *см*. Покажите, что в воздухе это расстояние будет равно 1 *см*. Каково увеличение, даваемое такой линзой, если ее использовать как обычное увеличительное стекло? Предположим, что вы используете в качестве линзы стеклянный шарик и хотите сформировать изображение (для параллельного пучка в воде), находящееся на расстоянии 3 *см* от задней поверхности шарика. Каков должен быть его диаметр?

Ответ. Около 1,7 *см*. Проверьте это, достав подходящий шарик. (Держите его близко к глазу.)

**9.53.** Опыт. *Интерференция в рассеянном свете.* Мы опишем простой способ получения красивых цветных интерференционных полос. Покройте обычное зеркало тонким слоем тальковой пудры (годится также мука, порошок, пыль, наконец, можно просто подышать на зеркало, чтобы образовать капельки влаги). Станьте на расстоянии 1—2 *м* от зеркала. Направьте на него узкий пучок света от ручного фонарика и смотрите на отражение баллона лампы. (Можно взять любой фонарик, закрыв рукой большую часть рефлектора, с тем чтобы размер источника света не превышал 1 *см*; можно воспользоваться пламенем свечи, если вы работаете в темной комнате.)

Наблюдайте за полосами! Попробуйте различные положения источника света, передвигая и удаляя его от зеркала. Полосы созданы интерференцией между следующими двумя группами лучей. Первая группа — это лучи, прошедшие через зерно тальковой пудры, рассеявшиеся и отразившиеся от зеркала к вашему глазу. После отражения от зеркала они не испытывают рассеяния. Вторая группа лучей проходит через зерна пудры без рассеяния, отражается от зеркала и рассеивается в ваш глаз на том же зерне пудры.

Каждый из лучей рассеивается очень близко к первоначальному направлению. Поэтому каждый из двух интерферирующих лучей проходит одну и ту же толщину вещества зерна пудры. Объясните, почему центральная полоса (та, которая кажется проходящей через изображение точечного источника) отвечает интерференционному максимуму. Для белого света она белая. Полосы приобретают окраску только на расстоянии в несколько полос по обе стороны от центральной полосы. Расчет этого явления довольно сложен *).

*) См. A. J. de Witte, Interference in Scattered Light (Интерференция в рассеянном свете), Am. J. Phys. **35**, 301 (1967).

**9.54.** *Звездные интерферометры.*

а) Двойная щель, за которой следует линза и фотопластинка, может дать угловое разрешение $\delta\theta \approx \lambda/d$, где $\lambda$ — длина волны, а $d$ — расстояние между щелями. Это позволяет исследовать структуру астрономических объектов, испускающих видимый свет.

б) В земной атмосфере имеются связанные с турбулентностью «пузырьки» воздуха, показатель преломления которых отличается от среднего показателя преломления воздуха. При $d \sim 30$ *см* эти «пузырьки» создают сдвиг фаз порядка $\pi$ для двух лучей от астрономического объекта к обеим щелям. Покажите, что предел углового разрешения составляет $\sim 2$ микрорадиана для видимого света на поверхности Земли.

в) Заменим две оптические щели двумя радиоантеннами, регистрирующими радиоволны с $\lambda = 30$ *см*. Вместо линз, собирающих в одну область световые волны от обеих щелей (в этой области происходит интерференция), используем для передачи сигналов от наших антенн к центральной приемной станции коаксиальные кабели или будем транслировать эти сигналы по воздуху. Приемная станция в данном случае играет роль фотопленки. Покажите, что для получения того же углового разрешения, что и в случае видимого света при расстоянии $d = 30$ *см*, радиоантенны должны быть разведены на расстояние в 180 *км*.

г) Протяженность турбулентных «пузырьков» воздуха порядка метра. Так как лучи в воздухе разведены на гораздо большее расстояние, случайный сдвиг фаз, набираемый соответствующими лучами, проходящими через обе щели, не зависит от расстояния между лучами. В первом приближении можно предположить, что действие атмосферы на две антенны, разнесенные на 180 *км*, аналогично ее действию на видимый свет, проходящий через две щели, разделенные расстоянием $d \approx 30$ *см*. Таким образом, атмосферные флуктуации коэффициента преломления будут ограничивать угловое разрешение интерферометра с двумя радиоантеннами. Показатель преломления воздуха для радиоволн в самом деле мало отличается от показателя преломления для видимого света. Однако соответствующий сдвиг фаз для 30-*см* волн во много тысяч раз меньше, чем для световых волн. Почему?

д) Атмосферные флуктуации показателя преломления не влияют на работу радиоинтерферометра. Поэтому расстояние между антеннами может быть значительно больше 180 *км*, и с помощью радиоволн можно получить лучшее разрешение, чем с видимым светом. (Разумеется, астрономические объекты должны излучать 30-*см* радиоволны, чтобы мы могли использовать метод радиоинтерференции.) Поэтому можно представить себе радиоинтерферометр, одна антенна которого находится в Нью-Йорке, а другая — в Калифорнии. Этим точкам соответствует база в 3000 *км* и угловое разрешение порядка $10^{-7}$ *рад*. К сожалению, при этом возникают такие проблемы, как сдвиг фаз радиоволн при их передаче по кабелю (вариации температуры) или по радио к центральной станции, где происходит интерференция. Слой воздуха в атмосфере над нами эквивалентен 8-*км* слою с равномерной плотностью, равной плотности воздуха на уровне моря. Масса воздуха между Нью-Йорком или Калифорнией и центральной станцией, расположенной где-нибудь на Среднем Западе, в несколько сот раз больше массы этого 8-*км* слоя, что является серьезным препятствием для радиоинтерферометра. Существует остроумное решение этой проблемы, данное Бротеном*). На каждой станции нужно иметь атомные часы, например водородный лазерный генератор на частоте 1000 *Мгц* ($10^9$ циклов в 1 *сек*). Стабильность таких часов достигает 1 цикла на $10^{14}$ циклов. Покажите, что такие часы стабильны в течение суток (сдвиг за сутки меньше 1 цикла).

е) Предположим, что мы хотим измерить радиоизлучение звезд на частоте $\nu_0 = 1000$ *Мгц* (это 30-*см* радиоволны) при ширине полосы $\Delta\nu = 1$ *Мгц*. Местные генераторы каждой приемной станции работают на частоте 1000 *Мгц*. На каждой станции сигнал местного генератора смешивается с сигналом, поступающим из антенны. Пусть токи генератора и антенны равны соответственно $\cos \omega_0 t$ и $A \cos(\omega t + \varphi)$. Тогда среднее (по одному циклу быстрых колебаний) значение квадрата суперпозиции обоих токов дает мощность $P = I^2 R$. Величина мощности

*) N. Broten et al, Lond Base-line Interferometery Using Atomic Clocks and Tape Recorders, Science **156**, 1592 (1967).



пропорциональна

$$P = 1 + A^2 + 2A \cos[(\omega_0 - \omega) t - \varphi].$$

Получите эту формулу.

ж) Если $\nu_0 t$ известно с точностью 1 цикла за $t = 1$ сутки, то точность, с которой мы знаем $P$, составляет 1 цикл на величину $(\nu_0 - \nu)t$. Пусть частота $\nu_0$ находится в центре полосы $\Delta\nu$, тогда среднее значение $\nu_0 - \nu$ в полосе равно нулю. Ширина полосы равна 1 *Мгц*. Сигнал $P$, частотный спектр которого простирается от нуля до частот порядка 1 *Мгц*, записывается на каждой станции магнитофоном. (Для этой записи подходят видеомагнитофоны телевидения.) Пленки с записью (которая длится меньше суток) могут быть доставлены в лабораторию, удаленную от обеих станций. Здесь, после синхронизации магнитофонной записи, можно произвести сложение сигналов. Чтобы не потерять информацию о фазе, необходимо, чтобы была выдержана точность синхронизации в 1 цикл (1 цикл на частоту колебаний сигнала $P$ в каждом магнитофоне). Этот сигнал имеет частотные компоненты в интервале от 0 до 1 *Мгц* в соответствии с шириной полосы. Все это означает, что синхронизация обеих записей должна быть лучше 1 *мксек*. При записи сигналов от местных антенн на ленты были нанесены марки времени. Точность их нанесения должна быть лучше 1 *мксек*. Это обычная точность синхронизации видеомагнитофонов телевидения. Таким способом можно создать звездный интерферометр, состоящий из расположенной в Нью-Йорке антенны, сигналы которой смешиваются с сигналами водородного лазера и записываются магнитофоном аналогичного устройства в Калифорнии. При вращении Земли интерферометр сканирует небо. Фазовая «постоянная» $\varphi$ тока каждой антенны равна величине $kr$, где $r$ — расстояние от антенны до звезды. Таким образом, ток от данной звезды в нью-йоркской антенне равен $A_1 \cos(\omega t + kr_1)$, а в калифорнийской равен $A_2 \cos(\omega t + kr_2)$ для одной и той же частотной компоненты сигнала. Положим для простоты, что $A_1 = -A_2 = A$. Покажите, что ток, возникающий при суперпозиции обеих магнитофонных записей $P_1$ и $P_2$, пропорционален $1 + A^2 + 2A \cos \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega) t \cos \frac{1}{2} k (r_1 - r_2)$. Возведем этот ток в квадрат и усредним по циклу колебаний с частотой $\nu_0 - \nu$. Покажите, что полученное в результате этой операции среднее значение мощности пропорционально $(1 + A^2)^2 + A^2[1 + \cos k(r_1 - r_2)]$. Член $\cos k(r_1 - r_2)$ совершает цикл изменений каждый раз, когда калифорнийская станция приближается на 15 *см* к звезде, а нью-йоркская удаляется от нее на такое же расстояние (предполагаем, что $\lambda = 30$ *см*). Если мы имеем другую звезду, она будет разрешена, если ее значение $k(r_1 - r_2)$ отличается от значения этой величины для первой звезды на величину $\pi$, т. е. если ее угловое расстояние от первой звезды будет порядка $\lambda/d$.

з) Мы ничего не сказали о других технических проблемах. Так, например, существует много радиозвезд, а мы хотели бы, чтобы данный телескоп рассматривал лишь небольшую часть неба, наблюдая за определенной звездой. Как это сделать? (Предположим, что диаметр каждого телескопа 50 *м*.)

и) Рассмотрим другую проблему. Нам необходимо знать положение «центральной» полосы в интерференционной картине, так как именно эта полоса дает точное направление на звезду. (Замечание. Вы наблюдаете за точечным источником света с помощью двойной щели. Если вы работаете, например, с зеленым или красным фильтром, то обнаружить центральную полосу трудно. Но если вы используете белый свет, это легко сделать.) Почему? Покажите, как использовать в каждой антенне две полосы частот (они аналогичны красному и зеленому свету), смешав каждую с сигналом местного генератора. Рассмотренный здесь интерферометр для радиозвезд можно использовать для точных измерений флуктуаций периода вращения Земли *).

**9.55.** *Преобразование амплитудной модуляции в фазовую для радиоволн.* (Эта задача тесно связана с задачей 9.56.)

а) Амплитудно-модулированное напряжение имеет вид

$$V(t) = V_0[1 + a(t)] \cos \omega_0 t.$$

Здесь $\omega_0$ — несущая частота, $a(t)$ — относительная амплитудная модуляция. При

*) См. T. Gold, Science **157**, 302 (1967) и G. J. F. MacDonald, Science **157**, 304 (1967).

фазовой модуляции напряжение имеет форму

$$V(t) = V_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

где $\varphi(t)$ — модулированная (т. е. зависящая от времени) фазовая «постоянная». Покажите, что мгновенная угловая частота в такой волне равна $\omega(t) = \omega_0 + d\varphi(t)/dt$. Таким образом, вместо фазовой модуляции мы можем говорить о частотной модуляции (ЧМ).

б) Величина относительной амплитудной модуляции $a(t)$ или модулированная фаза $\varphi(t)$ содержит в себе передаваемую информацию, например речь, музыку и т. п. Произведем фурье-анализ передаваемой музыки и рассмотрим одну из фурье-компонент с частотой $\omega_m$ (индекс $m$ означает модуляцию). Заменим $a(t)$ на $a_m \cos \omega_m t$ (можно было бы рассмотреть и член с $\sin \omega_m t$, но мы не будем этого делать). Амплитудно-модулированное напряжение приобретает вид

$$V(t) = V_0 [1 + a_m \cos \omega_m t] \cos \omega_0 t = V_0 \cos \omega_0 t + V_0 a_m \cos \omega_m t \cos \omega_0 t.$$

Оно эквивалентно суперпозиции чисто гармонических колебаний с несущей частотой $\omega_0$, колебаний верхней боковой полосы $\omega_0 + \omega_m$ и нижней боковой полосы $\omega_0 - \omega_m$. Докажите это утверждение, преобразовав написанное выражение для $V(t)$.

При АМ-радиовещании эти частоты излучаются и их принимает наша радиоантенна. Всякого рода помехи, например помехи от электрической бритвы или от освещения, также излучают на этих частотах, и их вклад в амплитудную модуляцию заключается во внезапном возрастании или уменьшении амплитуды для данной частоты. Эти помехи можно в большой степени убрать, если преобразовать АМ-напряжение в ЧМ-напряжение. Действительно, «освещение» производит внезапное изменение амплитуды, а ЧМ-приемник «знает», что это изменение не может быть частью музыки, так как музыка передается на постоянной амплитуде. Приемник с ЧМ может быть устроен так, чтобы отфильтровать внезапные изменения амплитуды.

Вопрос в том, как преобразовать АМ-колебания в ЧМ. АМ-напряжение подается на вход полосового фильтра, который пропускает узкую полосу частот, включающую частоту $\omega_0$, но частоты $\omega_0 \pm \omega_m$ находятся за пределами полосы пропускания фильтра. После того, как несущая частота изолирована от боковых полос, она получает сдвиг по фазе на четверть периода ($+90°$ или $-90°$) и снова смешивается с боковыми частотами, которые остались без изменений. (Мы можем также уменьшить или увеличить амплитуду несущей частоты, но эту возможность мы не рассматриваем.) Это означает, что в выражении $V_0 \cos \omega_0 t$ мы должны заменить $\cos \omega_0 t$ на $\sin \omega_0 t$. Получаем

$$V'(t) = V_0 \sin \omega_0 t + V_0 a_m \cos \omega_m t \cos \omega_0 t.$$

Обозначим теперь через $\varphi(t)$ величину $a_m \cos \omega_m t$, которая является относительной амплитудой модуляции $a(t)$ для данной модуляционной частоты. Для простоты положим, что величина $a(t)$, т. е. $\varphi(t)$, мала по сравнению с единицей. Тогда $\cos \varphi\ (t) \approx 1$, $\sin \varphi\ (t) \approx \varphi(t)$.

в) )Покажите, что написанное выше выражение можно преобразовать к виду

$$V'(t) = V_0 \sin[\omega_0 t + \varphi(t)], \qquad \varphi(t) = a_m \cos \omega_m t.$$

Итак, мы нашли способ преобразования АМ в ЧМ (и наоборот): фазу несущей волны нужно сдвинуть на $\pm 90°$ относительно боковой полосы. Это открытие Армстронга в 1936 г. сделало возможным коммерческое радио на ЧМ.

**9.56.** *Преобразование модулированного по фазе света в свет, модулированный по частоте.*

а) Начнем с обыкновенного микроскопа. Нас не интересует проблема увеличения, и мы положим, что увеличение микроскопа равно единице. Пусть предметное стекло микроскопа лежит в плоскости $xy$ в точке $z=0$. Поместим в $z=2f$ простую линзу ($f$ — фокусное расстояние этой линзы), а в $z=4f$ экран или фотопластинку. Тогда стекло микроскопа изобразится на экране, а увеличение будет равно единице.

б) Теперь в каплю воды, лежащую на предметном стекле, поместим амебу и образуем ее изображение на экране. К сожалению, мы не сможем увидеть это изображение, так как показатели преломления амебы и воды очень близки и амеба



прозрачна. Чтобы увидеть амебу, нам придется погрузить ее в краситель, который убьет ее, а мы хотим изучать живую амебу. Роль красителя сводится к модуляции амплитуды света, испущенного «точкой амебы с координатой $+z$».

В отсутствие красителя амплитуда на конце амебы $+z$ при данном значении поперечной координаты $x$ такая же, как если бы амебы не было. Фазы для этих двух случаев различны, потому что свет проходит через разные толщи амебы, зависящие от $x$, а показатель преломления амебы все же отличается от показателя преломления воды. Предположим, что предметное стекло микроскопа освещено плоской волной монохроматического света от источника $S$, помещенного в фокальной плоскости линзы (см. рисунок к задаче). Предположим, что в точке $z=0$ электрическое поле в отсутствие амебы одинаково для всех $x$ и равно

$$E(x,\ z,\ t) = E_0 \sin \omega t.$$

При наличии амебы существует сдвиг фаз, зависящий от $x$, и электрическое поле в плоскости $z=0$ равно

$$E(x,\ z,\ t) = E_0 [\omega t + \varphi(x)].$$

Итак, свет, прошедший через амебу, модулирован по фазе. Линза в $z=2f$ образует

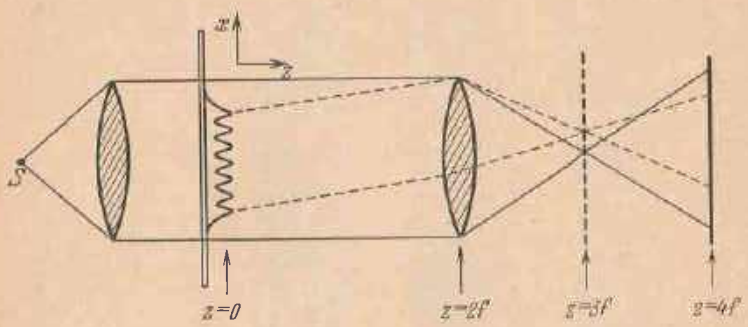



Рис. к задаче 9.56. Фазово-контрастный микроскоп.
В этом примере увеличение, для простоты, равно единице. Объект находится в плоскости $z=0$. Плоскость изображения $z=4f$. Фокальная плоскость объектива $z=3f$.

изображение амебы на экране в плоскости $z=4f$. Электрическое поле в этой плоскости определяется тем же выражением, что и в плоскости $z=0$ (если пренебречь потерями света и не заботиться о том, что изображение перевернуто, т. е. $x$ заменено на $-x$). Среднее по времени значение квадрата электрического поля равно $E_0^2/2$ независимо от $x$, и мы не видим никакого изображения.

в) Окрашивание модулирует амплитуду $E_0$, но убивает амебу. Поэтому нам нужно преобразовать модулированный по фазе свет в свет, модулированный по амплитуде. Чтобы понять, как это делается, воспользуемся аналогией между этой задачей и проблемой преобразования АМ-напряжения в ЧМ-напряжение. Нам нужно обратить эту задачу и осуществить преобразование ЧМ-света в АМ-свет. [Заметим, что здесь мы имеем дело с модуляцией в пространстве $\varphi(x)$, а не с модуляцией во времени $\varphi(t)$. Это не должно, однако, беспокоить нас.] Возвращаясь к задаче 9.55, мы видим, что начав с амплитудной модуляции $a(t) = a_m \cos \omega_m t$, мы кончим фазовой модуляцией $\varphi(t) = a_m \cos \omega_m t$. Здесь мы начинаем с фазовой модуляции $\varphi(x)$. Предположим, что для любых $x$ величина $\varphi(x)$ мала по сравнению с радианом. Покажите, что фазово-модулированный свет в плоскости $z=4f$ может быть записан (если $\varphi < 1$) следующим образом:

$$E(x,\ z,\ t) = E_0 \sin \omega t + E_0 \varphi(x) \cos \omega t.$$

Теперь произведем фурье-анализ функции $\varphi(x)$ и рассмотрим единственную фурье-компоненту с волновым числом $k_m$, т. е. положим $\varphi(x) = a_m \cos k_m x$. В этом случае выражение для фазово-модулированного света в плоскости $z=0$ или $z=4f$ принимает вид

$$E(x,\ z,\ t) = E_0 \sin \omega t + E_0 a_m \cos k_m x \cos \omega t.$$

Это все еще фазово-модулированный свет и изображение в плоскости $z=4f$ невидимо. Но обратимся снова к задаче 9.55. Назовем по аналогии член $E_0 \sin \omega t$ «несущей световой волной». Мы видим, что, если бы нам удалось сдвинуть на 90° фазу несущей волны по отношению к фазе модулированного члена (с амплитудой $a_m$), мы получили бы АМ-свет. Не беспокоясь о том, как это можно сделать, заменим в первом члене написанного выше выражения $\sin \omega t$ на $\cos \omega t$. Тогда для света на экране в $z=4f$ получим

$$E'(x, z, t) = E_0 \cos \omega t + E_0 a_m \cos k_m x \cos \omega t = \\ = E_0 [1 + a_m \cos k_m x] \cos \omega t = E_0 [1 + a(x)] \cos \omega t.$$

Интенсивность АМ-света пропорциональна среднему по времени значению $E'^2$, т. е. $^1/_2 E_0^2 [1+a(x)]^2$, которое зависит от $x$. Таким образом, мы получили амплитуду, зависящую от толщины амебы. Теперь мы можем «видеть» амебу.

г) Остается последняя проблема: как можно изолировать несущую световую волну от второй части волны и осуществить 90°-ный сдвиг фазы и последующую суперпозицию обеих частей волны на экране? Все это должно быть сделано между $z=0$ и $z=4f$. В случае преобразования АМ-напряжения в ЧМ-напряжение ключ к решению проблемы — в полосовом фильтре, который разделяет несущую частоту $\omega_0$ от боковых полос $\omega = \omega_0 \pm \omega_m$. По аналогии нам нужен полосовой фильтр волновых чисел, который разделил бы волновое число $k_x = k_0 = 0$ от боковых полос $k_x = k_0 \pm k_m$. Последнее утверждение станет яснее, если мы запишем модулированное по фазе электрическое поле в плоскости $z=0$ в виде

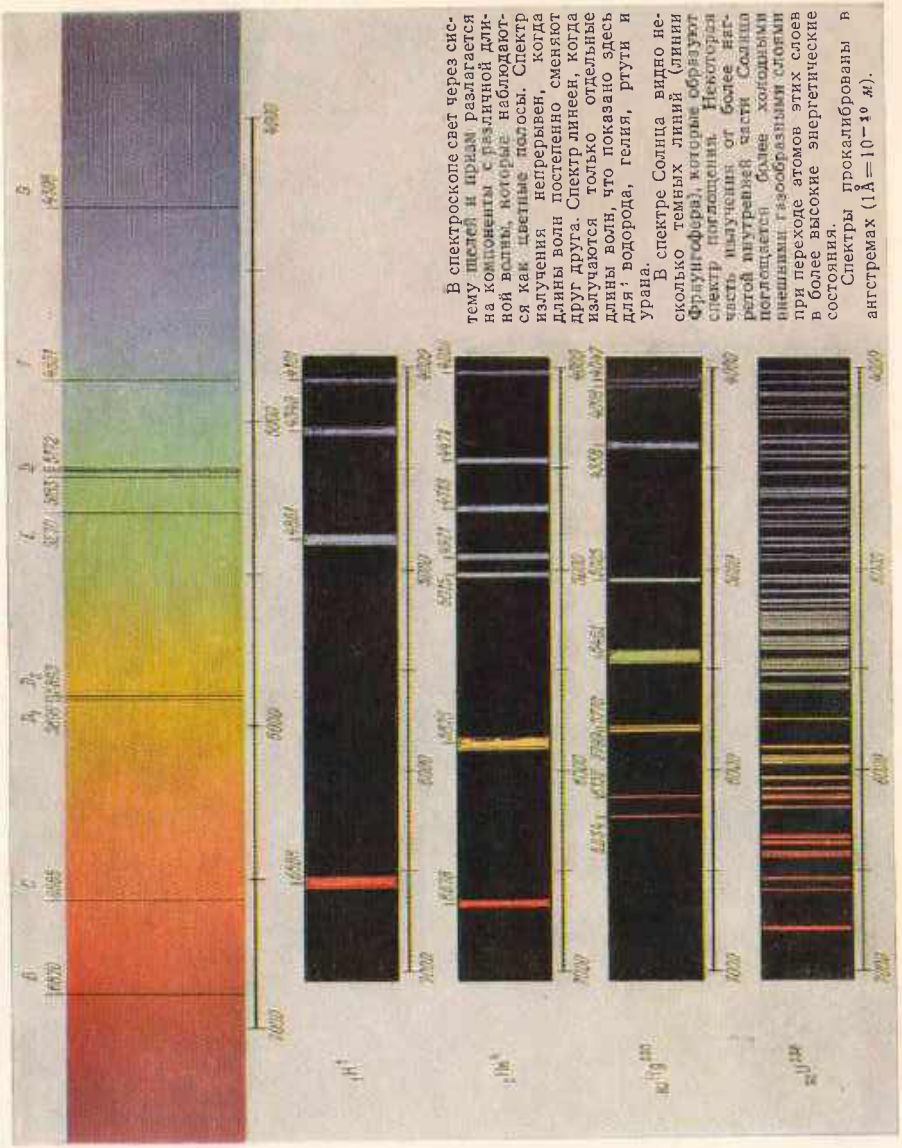
$$E(x, z, t) = E_0 \sin [\omega t - k_0 x] + \frac{1}{2} E_0 a_m \cos [\omega t - (k_0 + k_m) x] + \\ + \frac{1}{2} E_0 a_m \cos [\omega t - (k_0 - k_m) x],$$

где $k_0 = 0$ и стоячая волна $\cos k_m t \cos \omega t$ представлена суперпозицией двух бегущих волн с $k_x = +k_m$ и $k_x = -k_m$. Обсудим это выражение. Мы видим, что модулированное по фазе колебание в плоскости $z=0$ состоит из трех волн: несущей волны с $k_x = 0$, модуляция добавляет две волны с $k_x = +k_m$ и $k_x = -k_m$. У всех трех бегущих волн почти одна и та же величина $k_z$, равная $\omega/c$, так как мы полагаем, что $k_x$ мало по сравнению с $k_z$, т. е. что волны распространяются главным образом в направлении $z$, и поэтому величина $\omega/c = \sqrt{k_z^2 + k_x^2}$ вектора распространения мало отличается от $k_z$ для всех трех волн. (В этом рассуждении мы не принимаем во внимание $k_y$.)

д) На рисунке показано предметное стекло микроскопа и $k_m$-компонента зависимости толщины амебы от $x$. Несущая волна создается точечным источником $S$. Ее траектория показана сплошными линиями. Лучи для верхней полосы частот ($k_x = +k_m$) показаны штриховыми линиями, а ход лучей для нижней полосы ($k_x = -k_m$) на рисунке не показан. Каждая из этих волн является почти плоской волной, и линза фокусирует их. В фокальной плоскости при $z=3f$, как видно из чертежа, происходит пространственное разделение всех трех волн. Лучи проходят дальше, к экрану, где происходит их суперпозиция. Заметьте, что *в фокальной плоскости при $z=3f$ три компоненты волны полностью разделены в пространстве*. В этом месте можем воздействовать на несущую волну, не возмущая боковые волны. Здесь мы должны иметь пространственный фильтр, чтобы выделить данное $k_x$, аналогично временному фильтру (схема, осуществляющая фурье-анализ) предыдущей задачи, выделявшему данное значение $\omega$. Выделив несущую волну в точке $z=3f$, мы сможем изменить ее фазу на 90°, не трогая боковые полосы. Предложите способ сдвинуть фазу несущей волны на 90°. Фазово-контрастный микроскоп был предложен Ф. Цернике в 1934 г.

Теперь мы можем в более общем виде описать рассмотренные нами методы. В плоскости $z=0$ существует некоторая функциональная зависимость от координаты $x$ амплитуды и фазы колебаний $A(x) \cos [\omega t + \varphi(x)]$. (В нашем примере амплитудной модуляции в $z=0$ не было, т. е. $A(x) = \text{const}$.) Мы производим фурье-анализ зависимости от $x$ и получаем при $z=0$ стоячие волны, которые действуют как суперпозиция бегущих волн с известными значениями $k_x$ и $k_z$. Затем с помощью линзы мы преобразуем зависимость от $k_x$ (при $z=0$) в зависимость от $x$ (в фокаль-





В спектроскопе свет через систему щелей и призм разлагается на компоненты с различной длиной волны, которые наблюдаются как цветные полосы. Спектр излучения непрерывен, когда длины волн постепенно сменяют друг друга. Спектр линеен, когда излучаются только отдельные длины волн, что показано здесь для водорода, гелия, ртути и урана.

В спектре Солнца видно несколько темных линий (линии Фраунгофера), которые образуют спектр поглощения. Некоторая часть излучения от более нагретой внутренней части Солнца поглощается более холодными внешними газообразными слоями при переходе атомов этих слоев в более высокие энергетические состояния.

Спектры прокалиброваны в ангстремах ($1\text{Å} = 10^{-10}$ м).

ной плоскости линзы при $z=3f$). При этом волны с различными значениями $k_x$ фиксируются при различных значениях $x$. Таким образом, создается однозначное соответствие между $k_x$ и $x$ и зависимость *от $x$ в фокальной плоскости* равна (с точностью до множителя) *фурье-преобразованию* зависимости от $x$ объекта при $z=0$. На оси $z$ нет другой плоскости, для которой это было бы верно. Когда волны достигают экрана (плоскость изображения), у них опять та же зависимость от $x$, что и в плоскости $z=0$ (если пренебречь заменой $x$ на $-x$ и отличием коэффициента усиления от единицы). Таким образом, проходя от плоскости предмета до фокальной плоскости за линзами и затем до экрана, волны оказываются функциями $x$ в плоскости предмета, функциями $k_x$ в фокальной плоскости и опять функциями $x$ в плоскости изображения. Последний переход (от $k_x$-зависимости в плоскости $z=3f$ до $x$-зависимости в плоскости изображения) отвечает *обратному преобразованию Фурье*. Таким образом, можно сказать, что в фазово-контрастном микроскопе мы начинаем с функции от $x$, совершаем над ней фурье-преобразование и работаем с ним (сдвигаем фазу у одной части преобразованной волны и меняем ее амплитуду), а затем совершаем обратное фурье-преобразование. Этим методом можно получить много замечательных явлений. Сам метод получил название «спектроскопии фурье-преобразования» или «спектроскопии фокальной плоскости».

е) Опишите преобразование АМ-напряжения в ЧМ-напряжение с помощью тех же понятий, которые мы применили для описания фазово-контрастной микроскопии.

ж) В наших рассуждениях мы не учитывали полной ширины амебы и самого пучка света в $x$-направлении. Предположим, что эти ширины равны, соответственно, $w$ и $W$. Как повлияют эти ширины на зависимость интенсивности от $x$ (при $z=3f$) и изменит ли это последующий результат?

з) Предположим, что вместо сдвига фаз мы полностью убрали бы несущую волну, поместив на соответствующем месте в фокальной плоскости непрозрачный экран. Какой была бы в этом случае зависимость интенсивности изображения от $x$?

**9.57.** *Две тонкие линзы, расположенные одна за другой.* Расположим одну за другой вдоль общей оси на расстоянии $s$ друг от друга две тонкие линзы, сила которых равна $f_1^{-1}$ и $f_2^{-1}$. Допустим, что обе линзы положительны. Рассмотрим луч, параллельный оси и находящийся от нее на расстоянии $h$, падающий слева на первую линзу. Она отклоняет луч к оси. Пусть луч пройдет через вторую линзу до того, как пересечет ось. Найдите положение фокальной плоскости, т. е. плоскости, в которой луч пересекает ось, пройдя вторую линзу. Покажите, что положение $F$ не зависит от $h$ (в приближении малых углов). Теперь введем плоскость $P$ (мы назовем ее главной плоскостью), положение которой определим следующим образом: продолжим входящий луч вперед (вправо), а выходящий луч (который проходит через $F$) назад (влево) до пересечения. Плоскость, в которой лежит точка пересечения, называется главной плоскостью $P$. Обозначим через $x$ расстояние от плоскости $F$ до правой поверхности второй линзы и через $y$ расстояние от $P$ до левой поверхности второй линзы. Тогда $x+y$ будет расстоянием от фокальной плоскости $F$ до главной плоскости $P$. Это расстояние называется фокусным расстоянием $f$ для нашей системы двух линз, которые можно считать, таким образом, одной линзой, расположенной в главной плоскости $P$. Выразите $x$, $y$ и $f$ через $f_1$, $f_2$ и $s$. Найдя $f$ и $P$ для лучей, идущих слева направо, сделайте то же самое для лучей, идущих в противоположном направлении. Равны ли оба фокусных расстояния? Совпадают ли положения главных плоскостей?

Ответ. $f^{-1}=f_1^{-1}+f^{-1}{}_2-sf_1^{-1}f_2^{-1}$, $x=(1-sf_1^{-1})f$, $y=sf_1^{-1}f$.

**9.58.** Две линзы, для которых $f_1=+20$ *см* и $f_2=+30$ *см*, находятся на расстоянии 10 *см* друг от друга. Предмет высотой 5 *см* находится на расстоянии 30 *см* от первой линзы. Найдите положение, ориентацию и размеры окончательного изображения. Методом пробных лучей определите положение изображения на графике.

**9.59.** Далекий объект зеленого цвета снимается с помощью камеры-обскуры, у которой расстояние от отверстия до пластинки равно $D$. Каков должен быть диаметр отверстия, чтобы картина была максимально резкой?

## ДОПОЛНЕНИЯ

### Д. 1. Примеры микроскопических слабо связанных идентичных осцилляторов

Начните с п. 1.5 (прочтите о слабо связанных маятниках и «Примеры из квантовой физики»), который является введением в эту тему.

Мы рассмотрим здесь несколько примеров слабо связанных осцилляторов из атомной физики и физики элементарных частиц. В каждом примере система имеет две идентичные степени свободы, которые слабо связаны, так что существуют нормальные моды колебаний с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$. Законы механики Ньютона для микроскопических систем несправедливы, и для понимания их свойств требуется знание квантовой механики. Тем не менее в поведении микроскопических систем имеется большое математическое подобие поведению систем из слабо связанных маятников, хотя физическая интерпретация в обоих случаях различна. Для связанных маятников квадрат амплитуды маятника пропорционален энергии (кинетической плюс потенциальной) маятника. Энергия «перетекает» от одного маятника к другому с частотой биений. Для систем, описываемых квантовой механикой, квадрат амплитуды для определенной степени свободы (амплитуда в квантовой механике — всегда комплексная величина и под квадратом амплитуды подразумевается квадрат ее модуля) дает вероятность того, что степень свободы «возбуждена» (т. е. имеет всю энергию). Вероятность «течет» туда и обратно от одной степени свободы к другой с частотой биений $\nu_1 - \nu_2$. Сама энергия квантована, и мы не можем ввести понятие об ее потоке. В случае маятников полная энергия обоих маятников постоянна. Для микроскопических систем соответствующим фактом является то, что полная вероятность возбуждения либо одной, либо другой степени свободы постоянна. (Эта полная вероятность равна единице при условии, что система не теряет каким-либо образом энергию возбуждения.) Ниже мы приведем два замечательных примера, с которыми вы снова встретитесь при изучении квантовой механики.

*Молекула аммиака.* Молекула аммиака $NH_3$ состоит из одного атома азота и трех атомов водорода (см. том II, стр. 314). Три атома водорода образуют равносторонний треугольник. Назовем плоскость этого треугольника плоскостью $H_3$. Атом N имеет два возможных положения, относительно которых он может колебаться, что соответствует двум маятникам, *a* и *b*. Первое положение (*a*) — с одной стороны от плоскости $H_3$ и второе положение (*b*) — с другой стороны от нее. Атом не может легко переходить из состояния *a* в состояние *b* и обратно, потому что между состояниями *a* и *b* имеется потенциальный барьер. В классической механике (т. е. механике, основанной только на законах Ньютона) *a* и *b* являются положениями устойчивого равновесия и атом азота, колеблющийся в состоянии *a*, *никогда* не сможет попасть в состояние *b*. (В случае двух маятников это соответствует отсутствию связывающей пружины. Тогда, если *a* колеблется, а *b* в покое, такое положение система будет сохранять неограниченно долго, если конечно, пренебречь трением.) Однако в квантовой механике связь между *a* и *b* проявляется в том, что разрешается проникновение атома азота из состояния *a* в *b* или обратно через потенциальный барьер. Предположим, что мы наблюдаем с момента $t=0$ за квантовомеханическим состоянием молекулы, у которой атом азота N определенно находится в состоянии *a*. Тогда начальные вероятности будут равны $|\psi_a|^2=1$, $|\psi_b|^2=0$ (т. е. вероятность того, что атом будет колебаться относительно положения *a*, равна единице и вероятность того, что молекула находится в положении *b*, равна нулю). Однако можно показать, что это условие не сохранится все время. Действительно, решение уравнения Шредингера для этих начальных условий дает следующие значения вероятности нахождения атома азота N в состоянии *a* и в состоянии *b*:

$$|\psi_a|^2 = {}^1/_2\,[1 + \cos(\omega_1 - \omega_2)\,t], \tag{1а}$$

$$|\psi_b|^2 = {}^1/_2\,[1 - \cos(\omega_1 - \omega_2)\,t]. \tag{1б}$$

Здесь $\omega_1$ и $\omega_2$ — частоты нормальных мод. Уравнения (1) удивительно похожи на уравнения (1.99) из п. 1.5. Полная вероятность того, что атом азота N будет находиться в одном из возможных состояний, равна, конечно, единице, что легко показать, сложив уравнения (1а) и (1б).

Как и в случае связанных маятников, молекула аммиака может «стартовать» из состояния с одной нормальной модой. Оказывается, что если состояние молекулы определяется модой с чуть большей частотой (назовем ее мода 2; $\omega_2 > \omega_1$), то молекула нестабильна. Молекула будет стремиться испустить электромагнитное излучение и перейти из состояния, определяемого модой 2 (возбужденное состояние), в состояние, определяемое модой 1 (основное состояние). Это излучение может быть обнаружено. Частота излучения равна частоте биений $\nu_2 - \nu_1$:

$$\nu_б = \nu_2 - \nu_1 \approx 2 \cdot 10^{10}\ гц,$$

что соответствует длине волны ($\lambda = c/\nu$) около 1,5 *см*, находящейся в типичном микроволновом диапазоне радара. Если послать микроволновый пучок с частотой $2 \cdot 10^{10}$ *гц* через газообразный аммиак, то некоторые из микроволновых фотонов вызовут переход молекул из основного состояния (мода 1) в возбужденное состояние (мода 2). Таким образом происходит обмен энергией между микроволновым пучком и молекулами газа. Точно так же возбужденная молекула может «высветиться» в основное состояние, отдав один фотон микроволновому пучку. Такой обмен энергией между микроволновым пучком и аммиаком является основой действия «атомных часов». «Завод» таких часов происходит при поглощении газом энергии микроволнового пучка. «Поток вероятности» из положения *a* в *b* и обратно, определяемый частотой биений, обеспечивает механизм, регулирующий ход часов. Часы, использующие газ аммиак, а также их улучшенные «потомки» обеспечивают самое точное в мире измерение времени.

*Нейтральные* K-*мезоны.* Другой замечательной системой, поведение которой аналогично поведению системы связанных маятников, являются нейтральные K-мезоны. Их называют *странными частицами*. Они *действительно* очень странные, и их поведение еще не понято полностью. Эта система имеет две степени свободы, которые называются $K^0$-мезоном и $\bar{K}^0$-мезоном, аналогично двум маятникам. Эти степени свободы связаны, потому что $K^0$- и $\bar{K}^0$-мезоны могут взаимодействовать с двумя $\pi$-мезонами (наряду с другими возможными взаимодействиями) через «слабые взаимодействия». В этом примере $\pi$-мезон (или пион, для краткости) является аналогом связывающей пружины. Поэтому существуют две нормальные моды, которые называют $K_1^0$-мезон и $K_2^0$-мезон. В отличие от мод, которые мы до сих пор рассматривали, одна из этих мод ($K_1^0$-мода) имеет большее затухание, чем другая мода ($K_2^0$-мода). Системы с затуханием рассмотрены в главе 3. Если система начинает функционировать с момента $t=0$ с единичной вероятностью нахождения в $K_1^0$-моде, то эта вероятность экспоненциально уменьшается со временем по закону $\exp(-t/\tau_1)$. Аналогичное (но меньшее) затухание существует и у $K_2^0$-моды. «Потери вероятности», соответствующие затуханию, являются результатом радиоактивного распада мод на другие частицы. Например, $K_1^0$ распадается в большинстве случаев на два пиона и $\tau_1$ соответствует среднему времени распада для $K_1^0$.

Если система начинает функционировать в момент $t=0$ с единичной вероятностью нахождения в состоянии $K^0$ (обозначим это состояние через *a*) и если нет затухания, то вероятность нахождения системы в этом же состоянии ($K^0$) в более

позднее время будет определяться уравнением (1а). Соответствующая вероятность нахождения системы в состоянии $b$ ($\overline{K^0}$) будет определяться уравнением (1 б). Вследствие затухания эти формулы принимают вид

$$|\psi(K^0)|^2=\frac{1}{4}[e^{-t/\tau_1}+e^{-t/\tau_2}+2e^{-(1/2)(t/\tau_1+t/\tau_2)}\cos(\omega_1-\omega_2)t], \quad (2а)$$

$$|\psi(\overline{K^0})|^2=\frac{1}{4}[e^{-t/\tau_1}+e^{-t/\tau_2}-2e^{-(1/2)(t/\tau_1+t/\tau_2)}\cos(\omega_1-\omega_2)t]. \quad (2б)$$

Заметим, что, когда $\tau_1=\tau_2=\infty$ (затухание отсутствует), уравнения (2) превращаются в уравнения (1).

Интересно придумать механизм затухания, который демпфировал бы только моду 1, и второй механизм, который демпфировал бы только моду 2 для системы слабо связанных маятников. В этом случае уравнения для энергии системы маятников были бы похожи на уравнения (2), а не на уравнения (1).

### Д.2. Дисперсионное соотношение для волн де Бройля

Волна де Бройля, описывающая отдельную частицу с определенной энергией, имеет вид

$$\psi(z,\ t)=Af(z)\,e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Вероятность, что частица находится в координатном интервале от $z$ до $z+dz$, равна $|\psi(z,\ t)|^2\,dz$ и не зависит от $t$. Если потенциальная энергия частицы постоянна, мы имеем «однородную среду» и $f(z)$ в этом случае — синусоидальная функция $kz$:

$$\psi(z,\ t)=[A\sin kz+B\cos kz]\,e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

Дисперсионное соотношение для частицы, находящейся в области постоянной потенциальной энергии $V$, получается подстановкой $E=\hbar\omega$ и $p=\hbar k$ (условие частот Бора и волновое число де Бройля) в классическое выражение для энергии. Например, для нерелятивистских электронов с массой $m$ классическое соотношение между энергией $E$, импульсом $p$ и потенциалом $V$ имеет вид

$$E=\frac{p^2}{2m}+V. \quad (3)$$

Подставляя сюда $E=\hbar\omega$ и $p=\hbar k$, получаем дисперсионное соотношение для волн де Бройля:

$$\hbar\omega=\frac{\hbar^2k^2}{2m}+V. \quad (4)$$

*Электроны в «ящике».* В качестве примера рассмотрим электрон, заключенный в одномерный «ящик», простирающийся от $z=0$ до $z=L$. Пусть внутри ящика потенциальная энергия постоянна, т. е. $V=V_1=\text{const}$. Для $z$, меньших нуля и больших $L$, положим $V(z)$ равным $+\infty$. Если такой «связанный электрон» был бы классической частицей, он мог бы иметь любую кинетическую энергию:

$$\frac{p^2}{2m}=E-V_1. \quad (5)$$

Реальный электрон — не классическая частица. Его возможные состояния в «бесконечной потенциальной яме» являются нормальными модами волн де Бройля, т. е. представляют собой стоячие волны, у которых частота и длина волны связаны уравнением (4).

*Формы стоячей волны аналогичны формам стоячих волн струны.* Что представляет собой последовательность волновых чисел $k$ для стоячих волн? Вероятность нахождения электрона вне интервала $0\leqslant z\leqslant L$ равна нулю. Таким образом, вне ямы $|\psi(z,\ t)|^2$ равно нулю. Но $\psi(z,\ t)$ — непрерывная функция координаты $z$. Поэтому функция $\psi$ должна равняться нулю и $z=0$ и $z=L$. (Это — те же граничные условия однородной струны, закрепленной на концах. Поэтому стоячие волны



де Бройля имеют точно такую же последовательность конфигураций, что и идеальная струна.) Из граничного условия для $z=0$ следует, что в уравнении (2) $B=0$:

$$\psi(z,\ t)=e^{-i\omega t}\,A\sin kz. \quad (6)$$

Из граничного условия для $z=L$ следует, что $\sin kL=0$. Таким образом, возможные стоячие волны соответствуют $L=$ половине длины волны, двум половинам длины волны и т. д.:

$$k_1L=\pi, \qquad k_2L=2\pi, \ \ldots, \ k_nL=n\pi, \ \ldots \quad (7)$$

Если состояние электрона соответствует какой-то отдельной моде, то приходящаяся на единицу длины вероятность нахождения электрона в положении $z$ во время $t$ равна

$$|\psi(z,\ t)|^2=|e^{-i\omega t}\,A\sin kz|^2=|A|^2\sin^2kz. \quad (8)$$

Эта вероятность не зависит от времени, и поэтому говорят, что электрон находится в «стационарном состоянии». Вероятность того, что электрон находится где-то между $z=0$ и $z=L$, равна единице. Отсюда получаем условие нормировки для $|A|^2$:

$$1=\int_0^L|\psi|^2\,dz=|A|^2\int_0^L\sin^2kz\,dz=\frac{1}{2}|A|^2L, \quad (9)$$

которое определяет $|A|$. Таким образом,

$$A=|A|e^{i\alpha}=\sqrt{\frac{2}{L}}e^{i\alpha};$$

тогда

$$\psi(z,\ t)=\sqrt{\frac{2}{L}}\,e^{-i(\omega t-\alpha)}\sin kz, \quad (10)$$

где $\alpha$ — неопределенная фазовая постоянная.

Частоты стоячих волн определяются из дисперсионного соотношения [уравнение (4)]

$$\omega_n=\omega_0+\frac{\hbar k_n^2}{2m}, \qquad \omega_0\equiv\frac{V_1}{\hbar}. \quad (11)$$

Таким образом, энергия электрона $E$ равна

$$E_n=V_1+\frac{\hbar^2k_n^2}{2m}=V_1+\frac{\hbar^2(n\pi/L)^2}{2m} \quad \text{для } n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \quad (12)$$

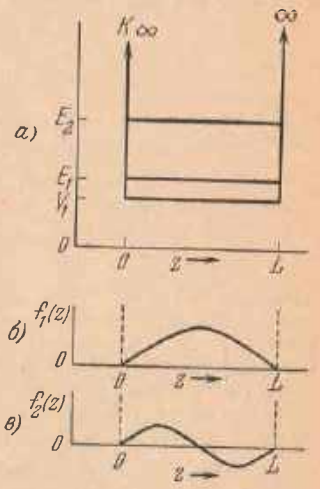



Рис. Д.1. Электрон в бесконечно высокой потенциальной яме.
*а)* График $V(z)$. Горизонтальными линиями $E_1$ и $E_2$ показаны уровни энергии первой и второй моды (основное и первое возбужденное состояния). Кинетическая энергия $E_n-V_1$ пропорциональна $n^2$, поэтому на графике $E_2-V_1$ в четыре раза больше, чем $E_1-V_1$. *б)* Волновая функция основного состояния $f_1(z)$. *в)* Волновая функция первого возбужденного состояния.

*Частоты стоячих волн отличаются от частот струны.* Хотя геометрические формы стоячих волн де Бройля подобны тем, которые возникают у закрепленной струны, частоты не являются гармониками частоты самой низкой моды. Это происходит потому, что дисперсионное соотношение для волн де Бройля сильно отличается от дисперсионного соотношения для стоячих волн струны. На рис. Д.1 показана самая низкая мода (так называемое «основное состояние») и вторая мода («первое возбужденное состояние»).

*Неоднородная среда.* Если потенциальная энергия $V(z)$ не постоянна, а зависит от $z$, то формы стоячих волн де Бройля, соответствующие определенным модам (состояние с определенной частотой волны, т. е. с определенной энергией частицы), не синусоидальны в пространстве. В этом случае не существует дисперсионного

соотношения, связывающего $\omega$ и $k$, потому что пространственная зависимость не выражается уже уравнением (2), и не существует определенного волнового числа $k$, соответствующего частоте $\omega$. Теперь для получения волновой функции $f(z)$ нужно решить дифференциальное волновое уравнение Шредингера. Эта ситуация напоминает случай непрерывной струны, рассмотренной в п. 2.3. Там было показано, что моды струны имеют синусоидальную пространственную зависимость только в том случае, если среда (т. е. струна) однородна. Для неоднородной струны пространственная зависимость стоячих волн получается из решения дифференциального уравнения [уравнение (2.59) п. 2.3, мы полагаем натяжение $T_0(z)=T_0=\text{const}$ и плотность $\rho_0(z)$ не постоянной]

$$\frac{d^2f(z)}{dz^2}=-\frac{\omega^2\rho_0(z)}{T_0}f(z). \tag{13}$$

Аналогично для неоднородного потенциала $V(z)$ пространственная зависимость стоячих волн де Бройля получается из решения уравнения Шредингера, которое в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2f(z)}{dz^2}=\frac{2m}{\hbar^2}[V(z)-\hbar\omega]f(z). \tag{14}$$

### Д.3. Проникновение частицы в область пространства, «запрещенную» классической механикой

Сумма потенциальной и кинетической энергии классической (нерелятивистской) частицы равна

$$E=\frac{p^2}{2m}+V, \tag{1}$$

где $p^2/2m$ — кинетическая энергия, а $V$ — потенциальная энергия. Положим, что при $0\leqslant z\leqslant L$ потенциальная энергия $V=V_1$, а от $z=L$ до $+\infty$ и от $z=0$ до $-\infty$ $V=V_2$ ($V_2>V_1$). Предположим, что классическая частица находится в такой потенциальной яме. Это возможно в том случае, если полная энергия частицы лежит между $V_1$ и $V_2$. Тогда, если классическая частица находится в области между $z=0$ и $z=L$, она никогда «не выберется» из этой ямы. Она «носится» туда и обратно между стенками, имея импульс $p_z=\pm\sqrt{2m(E-V_1)}$ и меняя его знак после соударения со стенкой. Частица не может проникнуть в область, где потенциальная энергия равна $V_2$, потому что тогда кинетическая энергия станет отрицательной:

$$\frac{p^2}{2m}=E-V=E-V_2=-(V_2-E)\quad\text{для}\quad E<V_2. \tag{2}$$

Отрицательное значение кинетической энергии для классической частицы не имеет смысла.

Однако реальные частицы не являются классическими. Реальным частицам наряду со свойствами «твердых» частиц присущи свойства волн. Соотношения де Бройля $p=\hbar k$ и Бора $E=\hbar\omega$ определяют дисперсионное соотношение

$$\omega=\omega_0(z)+\frac{\hbar k^2}{2m}\quad\text{для}\quad\omega>\omega_0, \tag{3}$$

где

$$\omega_0(z)\equiv\frac{V(z)}{\hbar}.$$

*Аналогия со связанными маятниками.* Соотношение (3) можно сравнить с дисперсионным соотношением для связанных маятников (в случае непрерывного приближения, см. п. 3.5)

$$\omega^2=\omega_0^2(z)+\frac{K^2a^2}{M}k^2\quad\text{для}\quad\omega^2>\omega_0^2, \tag{4}$$



где

$$\omega_0^2(z)\equiv\frac{g}{l}. \tag{5}$$

Для связанных маятников, когда $\omega$ меньше $\omega_0$, волны не синусоидальны. Они представляют собой экспоненциальные волны, а среда, в которой такие волны распространяются, называется реактивной. Дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega^2=\omega_0^2-\frac{K^2a^2}{M}\varkappa^2,\quad\omega^2<\omega_0^2. \tag{6}$$

Здесь $\delta=1/\varkappa$ — глубина проникновения. Аналогично для волн де Бройля, когда $\omega$ меньше $\omega_0$, дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega=\omega_0(z)-\frac{\hbar\varkappa^2}{2m},\quad\omega<\omega_0. \tag{7}$$

Кинетическая энергия $E-V_1$ для нашего случая будет равна

$$E-V_1=\frac{\hbar^2k_1^2}{2m}\quad\text{для}\quad 0\leqslant z\leqslant L, \tag{8}$$

$$E-V_1=-\frac{\hbar^2\varkappa_2^2}{2m}\quad\text{для других}\quad z. \tag{9}$$

Таким образом, для частицы с положительной кинетической энергией соответствующие волны де Бройля синусоидальны (для однородной среды) и имеют волновое число $k_1$. Частице с отрицательной кинетической энергией соответствуют экспоненциальные волны де Бройля, характеризуемые коэффициентом ослабления $\varkappa_2$. Волновые функции возможных состояний электрона, перемещения которого ограничены потенциальной ямой, очень похожи по форме на «граничные моды» системы связанных маятников, описанной в п. 3.5. Таким образом, волновая функция $f(z)$, соответствующая основному состоянию, синусоидальна в области положительной кинетической энергии (в дисперсивной области) с таким волновым числом, что $kL$ немного меньше $\pi$. При $z=0$ и $z=L$ синусоидальная волновая функция без скачка (гладко) переходит в экспоненциальную функцию, которая уменьшается до нуля на бесконечном расстоянии от дисперсивной области. (Два самых низких стационарных состояния показаны на рис. Д.2.)

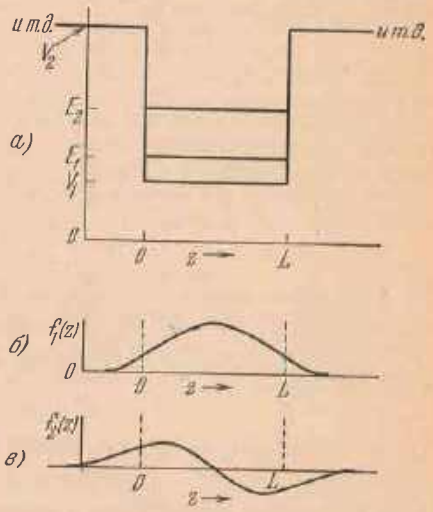



Рис. Д.2. Электрон в конечной потенциальной яме.

*а)* График $V(z)$. Горизонтальными линиями $E_1$ и $E_2$ показаны уровни энергии первой и второй моды (основное и первое возбужденное состояния). *б)* Волновая функция основного состояния $f_1(z)$. *в)* Волновая функция первого возбужденного состояния.

Из этого графика следует, что вероятность нахождения частицы в области координат, запрещенной классической механикой, не равна нулю. Для $z$, меньших нуля, вероятность пропорциональна $|\exp[-\varkappa_2(-z)]|^2$, а для $z$, больших $L$, она пропорциональна $|\exp[-\varkappa_2(z-L)]|^2$.

Заметим, что если $V_2$ стремится к $+\infty$, то в соответствии с уравнением (9) $\varkappa_2$ становится равным бесконечности и глубина проникновения $\delta$ стремится к нулю. Именно этот случай рассматривался в п. Д.2, где мы смогли сразу написать волновые числа разрешенных мод (состояний) и затем получить соответствующие энергии из дисперсионного соотношения. В настоящем примере конечной потенциальной ямы нахождение разрешенных значений $k$ (внутри ямы) и $\varkappa$ (вне ямы) требует большой вычислительной работы.

### Д.4. Фазовая и групповая скорости волн де Бройля

Для нерелятивистского электрона с энергией $E$ и с постоянной потенциальной энергией $V$ дисперсионное соотношение (см. п.Д.2) имеет вид

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} + \frac{V}{\hbar}. \tag{1}$$

Фазовая скорость равна

$$v_\Phi(k) = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} + \frac{V}{\hbar k}. \tag{2}$$

Скорость классической частицы равна $p/m$, т. е. $\hbar k/m$. Таким образом, уравнение (2) может быть записано как

$$v_\Phi(k) = \frac{1}{2} v\ (\text{частицы}) + \frac{V}{p\ (\text{частицы})}, \tag{3}$$

что является специфическим выражением. К счастью, $v_\Phi(k)$ нельзя наблюдать непосредственно. Скорость квантовомеханической частицы определяется скоростью волнового пакета, составленного из нескольких близких значений $k$, а не из одного значения $k$. Скорость же распространения волнового пакета определяется групповой скоростью $v_{\text{гр}}$. Используя уравнение (1), имеем

$$v_{\text{гр}} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 = \left(\frac{\hbar k}{m}\right)_0, \tag{4}$$

где индекс нуль означает, что производная должна вычисляться для $k$, лежащего в центре полосы $\Delta k$, формирующей пакет. Таким образом, мы видим, что $v_{\text{гр}} = v$ (частицы), если взять импульс частицы $(\hbar k)_0$, соответствующий центру пакета.

Для свободных релятивистских частиц энергия, импульс и масса покоя связаны следующим образом:

$$E^2 = (mc^2)^2 + (cp)^2, \tag{5}$$

что дает следующее дисперсионное соотношение (напоминаем, что $E = \hbar\omega$ и $p = \hbar k$):

$$\hbar^2\omega^2 = (mc^2)^2 + (\hbar ck)^2. \tag{6}$$

Фазовая скорость $v_\Phi = \omega/k$ имеет значение $v_\Phi = \omega/k = E/p$, которое равно $c^2/v$ (частицы), т. е. больше, чем $c$. Групповая скорость равна

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2 p}{E} = v\ (\text{частицы}). \tag{7}$$

Соотношение между фазовой скоростью, групповой скоростью и скоростью света такое же, как и для радиоволн в ионосфере, а именно $v_\Phi v_{\text{гр}} = c^2$. Это происходит из-за подобия дисперсионных соотношений.

### Д.5. Волновое уравнение для волн де Бройля

Гармоническая волна де Бройля (т. е. стационарное состояние) в области постоянного потенциала имеет вид

$$\psi(z, t) = e^{-i\omega t}(Ae^{ikz} + Be^{-ikz}). \tag{1}$$

Тогда

$$\frac{\partial\psi(z, t)}{\partial t} = -i\omega\psi(z, t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2\psi(z, t)}{\partial t^2} = -\omega^2\psi(z, t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial\psi(z, t)}{\partial z} = e^{-i\omega t}(ikAe^{ikz} - ikBe^{-ikz}), \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2\psi(z, t)}{\partial z^2} = -k^2\psi(z, t). \tag{5}$$



Для нерелятивистских частиц дисперсионное соотношение (см. п.Д.2) имеет вид

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V. \tag{6}$$

Умножая уравнение (2) на $i\hbar$ и используя уравнения (5) и (6), получаем

$$i\hbar\frac{\partial\psi(z, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(z, t)}{\partial z^2} + V\psi(z, t). \tag{7}$$

Уравнение (7) было выведено с помощью гармонических волн, являющихся его решением для постоянного потенциала. Однако нет причин для того, чтобы это уравнение было несправедливо и в случае, когда **$V = V(z)$, т. е. если потенциал зависит от положения.** Именно Шредингер предположил, что уравнение (7) остается справедливым в случае, когда $V(z)$ не постоянно. Уравнение (7) с $V = V(z)$ называется *уравнением Шредингера* (более точно, одномерным уравнением Шредингера). Оно широко применяется в атомной физике.

Когда нельзя пренебречь релятивистскими эффектами, уравнения (6) и (7) неприменимы. Для свободных релятивистских частиц дисперсионное соотношение имеет вид

$$\hbar^2\omega^2 = \hbar^2c^2k^2 + (mc^2)^2. \tag{8}$$

Умножая уравнение (8) на $-\hbar^2\psi(z, t)$ и используя уравнения (3) и (5), мы получаем

$$\frac{\partial^2\psi(z, t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\psi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{(mc^2)}{\hbar^2}\psi(z, t). \tag{9}$$

Уравнение (9) называется *уравнением Клейна — Гордона*. Обратите внимание, что если мы положим $m = 0$, то получим классическое волновое уравнение для недиспергирующих волн, распространяющихся со скоростью $c$. Это соответствует тому, что фотон имеет нулевую массу покоя.

### Д.6. Электромагнитное излучение одномерного «атома»

Прежде всего снова прочтите пункт Д.2. Рассмотрим установившиеся состояния для электрона в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, координаты которых $z = -L/2$ и $z = +L/2$. Предположим далее, что состояние электрона определяется суперпозицией основного состояния и первого возбужденного состояния:

$$\psi(z, t) = \psi_1(z, t) + \psi_2(z, t), \tag{1}$$

$$\psi_1(z, t) = A_1e^{-i\omega_1 t}\cos k_1 z, \quad k_1L = \pi, \tag{2}$$

$$\psi_2(z, t) = A_2e^{-i\omega_2 t}\sin k_2 z, \quad kL = 2\pi. \tag{3}$$

Вероятность (на единицу длины) нахождения электрона в положении $z$ в момент времени $t$ равна

$$|\psi(z, t)|^2 = |A_1e^{-i\omega_1 t}\cos k_1 z + A_2e^{-i\omega_2 t}\sin k_2 z|^2 =$$
$$= A_1^2\cos^2 k_1 z + A_2^2\sin^2 k_2 z + 2A_1A_2\cos k_1 z\sin k_2 z\cos(\omega_2 - \omega_1)t. \tag{4}$$

Мы видим, что выражение для вероятности имеет член, который совершает гармонические колебания с частотой биений между двумя боровскими частотами $\omega_1$ и $\omega_2$. Взяв написанные ниже интегралы, легко получить выражение для $\bar{z}$ — среднего в пространстве значения $z$:

$$\int_{-L/2}^{+L/2}|\psi|^2\,dz = (A_1^2 + A_2^2)\frac{L}{2}, \qquad \int_{-L/2}^{L/2} z|\psi|^2\,dz = \frac{16L^2}{9\pi^2}A_1A_2\cos(\omega_2 - \omega_1)t,$$

$$\bar{z} = \frac{\int z|\psi|^2\,dz}{\int|\psi|^2\,dz} = \frac{32L}{9\pi^2}\frac{A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2}\cos(\omega_2 - \omega_1)t,$$

т. е.

$$z = (0{,}36L)\frac{A_1 A_2}{A_1^2 + A_2^2}\cos(\omega_2 - \omega_1)\,t. \qquad (5)$$

*Почему частота излучения является частотой биений.* Электрон заряжен ($q = -e$), поэтому он будет испускать электромагнитное излучение той же частоты, с которой он колеблется. Из уравнения (5) мы видим, что среднее положение заряда колеблется с частотой биений $\omega_2 - \omega_1$. Поэтому частота излучения равна частоте биений между двумя стационарными состояниями:

$$\omega_{\text{изл}} = \omega_2 - \omega_1. \qquad (6)$$

### Д.7. Время когерентности и оптические биения

Можно получить интерференцию между волнами различных частот. Это справедливо как для оптических, так и для других явлений. Предположим, что имеем две световые волны 1 и 2, образующие электрические поля $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$. Пусть оба поля поляризованы по $\hat{\mathbf{x}}$ (поэтому можно опустить обозначение вектора.) Полное поле в фиксированной точке пространства $z$ будет суперпозицией $E_1$ и $E_2$. Используя комплексное представление колебаний, напишем следующее выражение для суперпозиции:

$$E_c(t) = E_1 e^{i\omega_1 t} e^{i\varphi_1} + E_2 e^{i\omega_2 t} e^{i\varphi_2}. \qquad (1)$$

Поток энергии, который можно измерить фотоумножителем (выходной ток фотоумножителя пропорционален падающему потоку энергии), пропорционален среднему значению величины $E^2(t)$ за период $T$ «быстрых» колебаний, происходящих со средней частотой:

$$\langle E^2(T)\rangle = \frac{1}{2}|E_c(t)|^2 = \frac{1}{2}\{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)]\}. \qquad (2)$$

Ток фотоумножителя, который меняется с относительно медленной частотой биений $\omega_1 - \omega_2$, можно измерить. Какие требования накладываются на частотный диапазон? Напомним, что наша точка зрения состоит в том, что амплитуды и фазовые постоянные медленно изменяются непредсказуемым образом. Фаза $\varphi_1$, например, дрейфует совершенно произвольно в диапазоне порядка $2\pi$ в течение интервала времени, равного времени когерентности. Это время в свою очередь является величиной, обратной частотному диапазону колебаний 1:

$$t_{1\,(\text{ког})} \approx (\Delta\nu_1)^{-1}, \qquad (3)$$

$$t_{2\,(\text{ког})} \approx (\Delta\nu_2)^{-1}. \qquad (4)$$

Ясно, что если мы наблюдаем биения, то отдельные компоненты должны сохранять свои фазы грубо постоянными в течение периода биений. Поэтому для наблюдения биений необходимо, чтобы оба времени когерентности были больше периода биений, т. е. чтобы полосы частот обоих колебаний были меньше частоты биений:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\nu_1 &< |\nu_1 - \nu_2|,\\ \Delta\nu_2 &< |\nu_1 - \nu_2|\end{aligned}\right\}\ \text{для наблюдаемых биений.} \qquad (5)$$

Мы должны, разумеется, уметь регистрировать ток фотоумножителя, меняющийся с частотой биений. Такой опыт требует большого искусства. Он был выполнен весьма изящным образом *).

### Д.8. Почему небо голубое?

В п. 7.5 мы говорили, что голубой цвет неба определяется рассеянием света отдельными молекулами воздуха. Здесь мы приведем рассуждения, из которых как будто бы следует, что небо должно быть невидимым.

*) См. A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen, P. O. Johnson, Photoelectric Mixing of Incoherent Light (Фотоэлектрическое смешение некогерентного света), Phys. Rev. **99**, 169 (1955).



Рассмотрим одну монохроматическую компоненту солнечного света. Электрическое поле (этой компоненты) действует на молекулу воздуха, и каждый колеблющийся электрон молекулы испускает волны во всех направлениях. Глаз наблюдателя регистрирует часть этих волн. Но для данной молекулы (назовем ее №1) можно найти другую молекулу (№2), которая отстоит от наблюдателя дальше на $^1/_2\lambda$. Если обе молекулы возбуждаются с одинаковой амплитудой и фазовой постоянной, то суперпозиция посланных ими волн у наблюдателя будет давать нуль. Для рассеяния под углом 90° мы, очевидно, можем удовлетворить этим условиям для фаз и амплитуд, если концентрация молекул воздуха достаточно велика, так что практически всегда для каждой молекулы №1 можно найти молекулу № 2. (При рассеянии под углом, близким к нулю, молекулы, находящиеся на расстоянии от наблюдателя, большем на $^1/_2\lambda$, возбуждаются на полпериода раньше. Поэтому они не создадут деструктивной интерференции.) При нормальных условиях концентрация молекул близка к $3 \cdot 10^{19}$ $см^{-3}$. Поэтому куб с ребром $5 \cdot 10^{-5}$ $см$ (длина волны голубого света) содержит около $4 \cdot 10^6$ молекул, т. е. около 100 молекул вдоль каждого ребра куба размером в одну длину волны. Такое число молекул кажется более чем достаточным для создания полностью деструктивной интерференции, даже если учесть экспоненциальное уменьшение плотности воздуха с высотой. Таким образом, мы пришли к заключению, что часть неба, соответствующая рассеянию солнечного света под углом 90°, должна быть «черной», а не ярко голубой!

Очевидно, что этот вывод полностью противоречит действительности. Наблюдаемая интенсивность очень близка к рассчитываемой по сумме интенсивностей рассеяния на отдельных независимых молекулах воздуха. По некоторым причинам предсказываемая деструктивная интерференция не возникает. Почему?

Приведем еще один факт, связанный с этой проблемой. Если вместо воздуха взять стекло или чистую воду, то ожидаемая для рассеяния на 90° деструктивная интерференция, конечно, происходит. Именно поэтому пучок прожектора проходит через чистую воду с ничтожными потерями интенсивности (за исключением рассеяния пучка вследствие дифракции). Заметим, что количество воздуха над поверхностью Земли эквивалентно по весу (и приблизительно по числу молекул) слою воды в 10 $м$. Несмотря на это, рассеяние на 90°, испытываемое пучком прожектора на длине 10 $м$ чистой воды, очень мало по сравнению с рассеянием солнечного света в атмосфере. В случае воды при рассеянии на 90° *амплитуды* складываются так, что ожидаемая деструктивная интерференция действительно происходит. В воздухе такой интерференции нет. Почему?

Различие заключается в *равномерности* пространственного распределения молекул воды по сравнению с молекулами воздуха. Молекулы воды «соприкасаются» и, следовательно, распределены в пространстве очень равномерно. В этом случае всегда найдется молекула № 2, уничтожающая вклад молекулы № 1 (в суперпозиции полей в точке наблюдения). Для воздуха это условие выполняется только *в среднем*. Иногда такая молекула есть, а иногда ее нет. *Флуктуации концентрации молекул нарушают когерентность*, поэтому ожидаемая деструктивная интерференция *амплитуд* при рассеянии на 90° не возникает. Вместо этого (как всегда для некогерентных источников) полная *интенсивность* равна сумме интенсивностей от всех источников (молекул).

Дадим упрощенное доказательство этих рассуждений. Рассмотрим небольшую область пространства. Назовем ее областью 1. Теперь возьмем другую область (область 2) того же размера, расположенную на таком же расстоянии от Солнца, но на полдлины волны дальше от наблюдателя, чем область 1. (Мы рассматриваем монохроматическую компоненту солнечного света.) Предположим далее, что эти области малы по сравнению с длиной волны. Тогда все молекулы в области 1 возбуждаются в фазе. Каждая молекула создает в точке наблюдения поле $\mathbf{E}_1$. Если в данное время в области 1 находится $n_1$ молекул, то поле от них в точке наблюдения равно $n_1\mathbf{E}_1$. Аналогично поле, образованное в точке наблюдения молекулами области 2, равно $n_2\mathbf{E}_2$, а полное поле равно $\mathbf{E} = n_1\mathbf{E}_1 + n_2\mathbf{E}_2$. Области находятся в фазе, а расстояния от них до точки наблюдения отличаются на полдлины волны. Поэтому $\mathbf{E}_2 = -\mathbf{E}_1$. Таким образом, в данный момент времени имеем

$$\mathbf{E} = n_1\mathbf{E}_1 + n_2\mathbf{E}_2 = (n_1 - n_2)\,\mathbf{E}_1. \qquad (1)$$

Поле $\mathbf{E}_1$ — это поле, созданное одной возбужденной молекулой воздуха. Для этого поля мы можем написать (опуская обозначение вектора, поскольку мы не интересуемся поляризацией)

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi). \tag{2}$$

Поэтому вклад от двух областей 1 и 2 равен

$$E = A \cos(\omega t + \varphi), \tag{3}$$

где

$$A = (n_1 - n_2) A_1. \tag{4}$$

Чему равно среднее, или «ожидаемое», значение амплитуды $A$? Иногда $n_1$ больше, чем $n_2$, иногда меньше. В среднем $n_1$ и $n_2$ равны, поэтому в среднем $A$ равно нулю. Если $n_1$ и $n_2$ постоянно имеют свои средние значения, то $E$ всегда равно нулю и рассеяния под углом 90° не будет. Мы увидим, что это не так.

Обратимся к интенсивности рассеянного излучения. Она пропорциональна квадрату электрического поля. Возьмем среднее за один период колебаний. (Период равен примерно $10^{-15}$ *сек*; $n_1$ и $n_2$ не меняются в течение такого короткого интервала.) Тогда рассеянная интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды $A$. Без учета неинтересующих нас констант имеем

$$\text{Интенсивность} = A^2 = (n_1 - n_2)^2 A_1^2. \tag{5}$$

Теперь рассмотрим действие флуктуации величины $n_1 - n_2$. Если мы образуем среднее за достаточно большой интервал времени (чтобы области 1 и 2 имели время «почувствовать» постоянно изменяющуюся плотность), то средняя по времени интенсивность от двух областей будет равна среднему от $(n_1 - n_2)^2$, умноженному на интенсивность от одной молекулы из области 1 или 2. Обозначив среднюю во времени интенсивность от двух областей через $I$, получим

$$I = \overline{(n_1 - n_2)^2}\, I_1, \tag{6}$$

где $I_1$ — интенсивность от одной молекулы из области 1, а черта означает усреднение по времени. Среднее значение $\bar{n}_1$ равно среднему значению $\bar{n}_2$. Поэтому можем записать

$$(n_1 - n_2)^2 = [(n_1 - \bar{n}_1) - (n_2 - \bar{n}_2)]^2 =$$
$$= (n_1 - \bar{n}_1)^2 + (n_2 - \bar{n}_2)^2 - 2(n_1 - \bar{n}_1)(n_2 - \bar{n}_2). \tag{7}$$

Взяв среднее, найдем, что

$$\overline{(n_1 - n_2)^2} = \overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2} - \overline{(n_2 - \bar{n}_2)^2} - 2\,\overline{(n_1 - \bar{n}_1)(n_2 - \bar{n}_2)}. \tag{8}$$

Все, что мы писали до сих пор, применимо как к воздуху, так и к воде. Теперь мы подошли к главному различию между ними. Для воздуха области 1 и 2 полностью независимы в том смысле, что флуктуации $n_1$ (в данный момент) не зависят от флуктуаций $n_2$. Это объясняется тем, что молекулы области 1 никак не влияют на молекулы области 2. (Для воды ситуация иная: молекулы «соприкасаются». Чтобы «втолкнуть» молекулу в область 1, нужно освободить для нее пространство, «вытолкнув» из него другую молекулу. При этом из-за связи между молекулами вы будете влиять на число молекул в области 2). Поэтому *для воздуха* среднее от произведения $(n_1 - \bar{n}_1)$ на $(n_2 - \bar{n}_2)$ равно произведению двух независимых средних значений:

$$\overline{(n_1 - \bar{n}_1)(n_2 - \bar{n}_2)} = \overline{(n_1 - \bar{n}_1)}\;\overline{(n_2 - \bar{n}_2)} = (\bar{n}_1 - \bar{n}_1)(\bar{n}_2 - \bar{n}_2) = 0. \tag{9}$$

(Это обстоятельство является главным пунктом наших рассуждений.) Теперь оценим средние квадратичные флуктуации $n_1$ и $n_2$. В случае воздуха в области 1 (или области 2) имеется «сколько угодно» свободного пространства, т. е. эти области не переполнены молекулами. Появление избыточного числа молекул в области 1 в данный момент времени никак не влияет на ту область, откуда пришли избыточные молекулы. В этом случае оказывается (это будет показано в V томе), что вероятность обнаружить данное число молекул в области 1 (или области 2) определяется функцией, называемой *распределением Пуассона*. Для этой функции средний квадрат отклонения $n_1$ от своего среднего значения равен самому среднему



значению:

$$\overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2} = \bar{n}_1, \quad \overline{(n_2 - \bar{n}_2)^2} = \bar{n}_2. \tag{10}$$

Написанное выражение справедливо для молекул воздуха, но не для молекул воды. В последнем случае существование небольшого избытка молекул сильно препятствует проникновению (в область) дополнительного числа молекул. Это свойство воды выражается следующими неравенствами:

$$\overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2} \ll \bar{n}_1, \quad \overline{(n_2 - \bar{n}_2)^2} \ll \bar{n}_2. \tag{11}$$

Для воздуха средняя во времени интенсивность поля, созданного обеими областями, равна

$$I = \overline{(n_1 - n_2)^2}\, I_1 = \overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2}\, I_1 + \overline{(n_2 - \bar{n}_2)^2}\, I_1 + 0 = \bar{n}_1 I_1 + \bar{n}_2 I_1 = \bar{n}_1 I_1 + \bar{n}_2 I_2. \tag{12}$$

Итак, интенсивность равна *сумме вкладов* от молекул области 1 и от молекул области 2. Для воды имеем

$$I = \overline{(n_1 - n_2)^2}\, I_1 \ll \bar{n}_1 I_1 + \bar{n}_2 I_2. \tag{13}$$

Если бы $n_1$ и $n_2$ были всегда равны, то мы имели бы «совершенно жесткую и однородную воду», которая создала бы нулевую интенсивность.

Роберт Вуд показал с помощью очень простого и искусного опыта, что интенсивность света, рассеянного воздухом под углом 90°, пропорциональна числу молекул, дающих вклад в общую интенсивность [уравнение (12)]. Его опыт легко повторить *).

### Д.9. Электромагнитные волны в материальной среде

Рассуждения, приводимые здесь, имеют более общий характер, чем в основном тексте книги. Мы не будем избегать рассмотрения неупругой части диэлектрической постоянной и будем работать с комплексными числами.

*Уравнения Максвелла.* Напишем уравнения Максвелла в наиболее общем виде (в системе СГСЭ):

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_{\text{полн}} = 4\pi\rho_{\text{своб}} - 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P}, \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{\text{полн}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{\text{своб}} + \left(4\pi\nabla \times \mathbf{M} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{4}$$

[Эти уравнения вы найдете во II томе Берклеевского курса физики «Электричество и магнетизм»: уравнение (1)—стр. 356, уравнение (1); уравнение (2)—стр. 332, уравнение (57); уравнение (3)—стр. 343, уравнение (19) (которое справедливо, когда $\mathbf{M}$ равно нулю) и стр. 385, уравнение (50) (которое справедливо, когда $\partial\mathbf{P}/\partial t$ и $\partial\mathbf{E}/\partial t$ равны нулю); уравнение (4) — стр. 245, уравнение (30).]

Уравнения (1)—(4) можно записать и так:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{5}$$

$$\nabla \cdot \{\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}\} = 4\pi\rho_{\text{своб}}, \tag{6}$$

$$\nabla \times \{\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}\} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\{\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}\} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{\text{своб}}, \tag{7}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{8}$$

Сумма $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ обозначается $\mathbf{D}$. Разность $\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ обозначается $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \equiv \mathbf{D}, \quad \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \equiv \mathbf{H}. \tag{9}$$

Мы, однако, не будем использовать величины $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$.

*) Этот опыт описан в книге М. Миннарта «Свет и цвет в природе», Физматгиз, 1958, §§ 188—193.

*Линейная изотропная среда.* Сила, действующая на точечный заряд $q$ с координатами $x$, $y$, $z$ в момент времени $t$, равна

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}+q\,(\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}, \tag{10}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — мгновенные локальные поля. В случае «непрерывной» среды для определения средних в пространстве значений $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ мы пользуемся понятием средней силы, приходящейся на единицу заряда. Мы считаем, что эти поля действуют на заряд и скорость, усредненные по элементу объема. Таким образом, вводится понятие о плотности заряда и тока.

Силы, действующие на заряды и токи в среде, вызваны полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Эти силы меняют распределение токов и зарядов и влияют на $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$. Говорят, что среда *изотропна*, если вектор поляризации $\mathbf{P}$ коллинеарен вектору $\pm\mathbf{E}$, а вектор намагниченности $\mathbf{M}$ коллинеарен $\pm\mathbf{B}$. Понятие изотропной среды включает в себя частный случай $\mathbf{P}=0$, если $\mathbf{E}=0$, и $\mathbf{M}=0$, если $\mathbf{B}=0$. Далее, если среда изотропна, то компонента поляризации $P_x$ (например) зависит только от соответствующей компоненты поля $E_x$ и не зависит от $E_y$ и $E_z$. (В некоторых кристаллах вектор смещения электрона из положения равновесия не совпадает по направлению с вектором $\mathbf{E}$. Это объясняется тем, что из-за неизотропности кристалла электрон легче смещается в одних направлениях, чем в других). Итак, для изотропной среды имеем

$$P_x=\chi E_x+\alpha E_x^2+\beta E_x^3+\ldots \tag{11}$$

Для слабых полей членами второго и более высоких порядков в уравнении (11) можно пренебречь. Это справедливо для обычных электромагнитных полей в обычных веществах. [Для сильных полей, какие (например) создаются пульсирующим рубиновым лазером, нелинейные члены в $\mathbf{P}$ могут быть существенны.] Среда называется *линейной*, если в уравнении (11) можно пренебречь членами $\alpha E_x^2$, $\beta E_x^3$ и т. д. Мы видим, что «линейность» среды не является ее свойством, а зависит от силы поля.

*Определение $\chi$, $\chi_m$, $\varepsilon$ и $\mu$ для статических полей.* В случае линейной и изотропной среды электрическая восприимчивость $\chi$ и магнитная восприимчивость $\chi_m$ (для полей, не зависящих от времени) определяются следующим образом:

$$P_x(x,\ y,\ z)=\chi(x,\ y,\ z)\,E_x(x,\ y,\ z), \tag{12}$$

$$M_x(x,\ y,\ z)=\frac{\chi_m}{\mu}B_x(x,\ y,\ z). \tag{13}$$

Диэлектрическая постоянная $\varepsilon$ и магнитная проницаемость $\mu$ определяются так:

$$E_x+4\pi P_x=\varepsilon E_x, \tag{14}$$

$$B_x-4\pi M_x=\frac{1}{\mu}B_x. \tag{15}$$

Объединяя эти определения, получим

$$1+4\pi\chi=\varepsilon, \tag{16}$$

$$1-4\pi\frac{\chi_m}{\mu}=\frac{1}{\mu}. \tag{17}$$

[См. II том: уравнение (14) — стр. 323, уравнение (38); уравнение (15) — стр. 388, уравнение (55) для $\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H}$ и стр. 386, уравнение (52) для $\mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}$. Уравнение (15) определяет $\mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu$.]

*Восприимчивости для полей, зависящих от времени.* Мы хотим распространить эти линейные соотношения на случай зависящих от времени полей в линейной изотропной среде. Можно было бы думать, что уравнение (12) будет справедливо и для переменных полей, т. е. что $P(x,\ y,\ z,\ t)=\chi E_x(x,\ y,\ z,\ t)$, где $\chi$ — значение, полученное из статических измерений. Как будет показано, это неверно. В общем случае электрическая и магнитная восприимчивости зависят от частоты, и «общей» для всего спектра восприимчивости не существует. Поскольку восприимчивости зависят от частоты, то можно было бы ожидать, что в общем случае уравнение (12) примет вид

$$P_x(x,\ y,\ z,\ \omega t)=\chi(x,\ y,\ z,\ \omega)\,E_x(x,\ y,\ z,\ \omega t). \tag{18}$$



Аналогичное выражение мы имели бы и для $M_x$. Однако мы найдем, что даже уравнение (18) слишком упрощает дело, поскольку из него следует, что $P_x$ пропорционально $E_x$ в любой момент времени, т. е. что $P_x$ находится *в фазе* с $E_x$ (с точностью до знака). В общем случае нужно предположить существование компоненты $P_x$, сдвинутой по фазе на $\pm 90^\circ$ относительно $E_x$. Мы увидим, что компонента $P_x$, которая находится в фазе с $E_x$, не приводит к поглощению средой электромагнитной энергии. Поэтому будем называть ее «упругой» компонентой или компонентой дисперсии. Другая компонента $P_x$, сдвинутая на $\pm 90^\circ$ относительно внешнего поля $E_x$, обуславливает поглощение энергии. Мы назовем ее «неупругой» компонентой $P_x$ или компонентой поглощения. Величину $P_x(x,\ y,\ z,\ \omega t)$ запишем как сумму обеих компонент. Для линейной однородной среды упругая компонента поляризации пропорциональна $E_x(x,\ y,\ z,\ \omega t)$ с коэффициентом пропорциональности $\chi_{\text{упр}}(x,\ y,\ z,\ \omega)$. Неупругая компонента пропорциональна $E_x(x,\ y,\ z,\ \omega t-{}^1/_2\pi)$ со своим коэффициентом пропорциональности $\chi_{\text{погл}}(x,\ y,\ z,\ \omega)$:

$$P_x(x,\ y,\ z,\ \omega t)=\chi_{\text{упр}}(x,\ y,\ z,\ \omega)\,E_x(x,\ y,\ z,\ \omega t)+ \\ +\chi_{\text{погл}}(x,\ y,\ z,\ \omega)\,E_x(x,\ y,\ z,\ \omega t-{}^1/_2\pi). \tag{19}$$

Рассмотрим данную точку пространства и опустим координаты $x$, $y$, $z$. Предположим, что в этой точке

$$E_x(\omega t)=E_0\cos(\omega t-\varphi). \tag{20}$$

Тогда из уравнения (19) получаем

$$P_x(\omega t)=\chi_{\text{упр}}E_x(\omega t)+\chi_{\text{погл}}E_x(\omega t-{}^1/_2\pi), \tag{21}$$

т. е.

$$P_x(\omega t)=\chi_{\text{упр}}E_0\cos(\omega t-\varphi)+\chi_{\text{погл}}E_0\sin(\omega t-\varphi). \tag{22}$$

*Простая модель линейной изотропной среды.* Предположим, что в небольшой окрестности данной точки среда содержит $N$ нейтральных атомов на единицу объема. Каждый атом состоит из частицы (электрона) с массой $M$ и зарядом $q$ (знак $q$ не оговаривается), связанной упругой силой, пропорциональной смещению, с более тяжелым ядром, заряд которого равен по величине и противоположен по знаку заряду $q$. (Сюда мы включаем и тот случай, когда частота колебаний $\omega_0$ равна нулю, т. е. нейтральную плазму.) Мы пренебрегаем относительно малым смещением ядер и вкладом этого смещения в $\mathbf{P}$. Мы предполагаем, что у атома нет ни постоянного, ни наведенного полями магнитного момента. Поэтому намагничение равно нулю. Далее, мы пренебрегаем флуктуациями и нерегулярностями в движении отдельных частиц и считаем, что каждая частица ведет себя как некая фиктивная средняя частица. Такое предположение означает, что каждая частица находится под действием силы электрического поля $E_x(\omega t)$ в месте нахождения частицы и некоторой средней силы, обуславливающей затухание *). Последняя учитывает потери энергии частицы вследствие соударения с соседними частицами (или вследствие излучения). Пренебрегаем также силой $q(\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}$, действующей на частицы, по сравнению с силой $q\mathbf{E}$. Это пренебрежение справедливо в отсутствие постоянных магнитных полей и при малых значениях отношения $v/c$. (Оно остается справедливым даже в случае сильных электрических полей, образованных пульсирующим рубиновым лазером.) Таким образом, мы имеем следующее уравнение движения для $x$-компоненты заряда:

$$M\ddot{x}=-M\omega_0^2x-M\Gamma\dot{x}+qE_x, \tag{23}$$

где

$$E_x(\omega t)=E_0\cos(\omega t-\varphi). \tag{24}$$

Демпфирующая сила — $M\Gamma\dot{x}$ определяет рассеяние в среде энергии колебаний заряда. Эта рассеянная энергия в конечном счете переходит в *теплоту*.

Уравнение (24) написано в предположении, что амплитуда поля $E_0$ и фаза $\varphi$ определяются положением равновесия заряда $q$ и не зависят от его мгновенного смещения $x(t)$ от положения равновесия. Это означает, что амплитуда колебаний заряда $q$ очень мала по сравнению с длиной волны, характеризующей изменение

*) Для краткости мы будем называть ее демпфирующей силой.

$E_x$ в пространстве и во времени. В противном случае следовало бы учесть зависимость $E_0$ и $\varphi$ от смещения $x$.

Будем считать, что локальное поле $E_x$ в уравнении движения (23) совпадает с усредненным по пространству полем $E_x$ из уравнения (21). Это справедливо для газа и для некоторых кристаллов. (Во многих кристаллах электрическое поле, действующее на заряд, определяется ближайшими соседями. Поэтому в общем случае среднее локальное поле не совпадает со средним полем в пространстве.)

В п.3.2 было показано, что «установившееся» решение уравнения (23) имеет вид $x(t)=A_{\text{упр}}\cos(\omega t-\varphi)+A_{\text{погл}}\sin(\omega t-\varphi)$, где $A_{\text{упр}}\cos(\omega t-\varphi)$ — упругая компонента смещения $x$, т. е. та часть смещения, которая находится в фазе с возмущающей силой, а $A_{\text{погл}}\sin(\omega t-\varphi)$ — неупругая компонента смещения. Она сдвинута по фазе на $\pm 90°$ относительно возмущающей силы. Упругие и неупругие амплитуды*) равны

$$A_{\text{упр}}=\frac{qE_0}{M}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}. \tag{25}$$

$$A_{\text{погл}}=\frac{qE_0}{M}\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}. \tag{26}$$

Поляризация $P_x$ равна концентрации частиц $N$, умноженной на дипольный момент $qx$, соответствующий заряду $q$, смещенному на $x$ от положения равновесия. Таким образом, имеем

$$P_x(t)=Nqx(t), \tag{27}$$

т. е.

$$P_x(t)=NqA_{\text{упр}}\cos(\omega t-\varphi)+NqA_{\text{погл}}\sin(\omega t-\varphi), \tag{28}$$

т. е.

$$P_x(\omega t)=\frac{NqA_{\text{упр}}}{E_0}E_x(\omega t)+\frac{NqA_{\text{погл}}}{E_0}E_x(\omega t-{}^1/_2\pi). \tag{29}$$

Сравнивая уравнения (29 и (21), находим

$$\chi_{\text{упр}}=\frac{NqA_{\text{упр}}}{E_0}=\frac{Nq^2}{M}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{30}$$

$$\chi_{\text{погл}}=\frac{NqA_{\text{погл}}}{E_0}=\frac{Nq^2}{M}\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}. \tag{31}$$

*Комплексные величины в уравнениях Максвелла.* Уравнения Максвелла не содержат квадратного корня из —1. То же можно сказать и о любой из наблюдаемых величин **E**, **B**, **P** или **M**. Однако мы сильно упростим вычисления для электромагнитных волн в среде *с поглощением*, если воспользуемся комплексными величинами.

Если пренебречь поглощением, то уравнение (21) принимает более простую форму: $P_x(\omega t)=\chi(\omega)E_x(\omega t)$, где $\chi(\omega)=\chi_{\text{упр}}$. Оно аналогично уравнению (18), которое в свою очередь подобно (для нашего случая) линейному уравнению (12) для статических полей. В этом случае выражения (12)—(17), определяющие диэлектрическую постоянную и магнитную проницаемость, могут быть использованы и для переменных во времени полей.

Если поглощением пренебречь нельзя, то уравнение (18) следует заменить более сложным уравнением (21). Действительно, мы должны учесть и компоненту, сдвинутую на $\pm 90°$ относительно поля (то же и для **M**). Поэтому следует рассматривать отдельные компоненты $\mathbf{E}(\omega t)$, $\mathbf{E}(\omega t-{}^1/_2\pi)$, $\mathbf{B}(\omega t)$, $\mathbf{B}(\omega t-{}^1/_2\pi)$ и соответствующие им компоненты поляризации и намагниченности.

Удобным способом избавиться от этой «бухгалтерии» является использование комплексных величин, которые мы обозначим **E**, **B**, **P** и **M**, имея в виду, что *физические поля представляют собой вещественные части этих «комплексных полей».* Временная зависимость каждого комплексного поля определяется множителем $\exp(-i\omega t)$, где знак минус является условием, используемым в оптике. [В электронике работают с положительным показателем экспоненты $\exp(+i\omega t)$. В квантовой механике, как и в оптике, показатель экспоненты отрицателен.] Таким образом, $E_x$ в комплексной записи имеет вид

$$E_x(\omega t)=E_0e^{i\varphi}e^{-i\omega t}=E_0\cos(\omega t-\varphi)-iE_0\sin(\omega t-\varphi). \tag{32}$$

Физическое поле, соответствующее комплексному полю $E_x$, равно вещественной части $E_x$, т. е. $E_0\cos(\omega t-\varphi)$. Упрощения, которые появляются при использовании комплексного числа $\exp(-i\omega t)$ для выражения зависимости от времени, связаны с тем, что сдвиг на 90° эквивалентен умножению на $i$: $e^{-i[\omega t-{}^1/_2\pi]}=e^{i{}^1/_2\pi}e^{-i\omega t}=ie^{-i\omega t}$. Таким образом,

$$E_x(\omega t-{}^1/_2\pi)=iE_x(\omega t). \tag{33}$$

*Комплексная восприимчивость.* Вне зависимости от того, используем мы комплексные поля или нет, физическая поляризация связана с физическим электрическим полем линейным соотношением (для линейной изотропной среды)

$$P_x(\omega t)=\chi_{\text{упр}}E_x(\omega t)+\chi_{\text{погл}}E_x(\omega t-{}^1/_2\pi), \tag{34}$$

где все величины вещественные. Введем теперь комплексную величину $E_x(\omega t)$, определяемую уравнением (32), и будем считать $P_x$ и $E_x$ в уравнении (34) комплексными величинами ($\chi_{\text{упр}}$ и $\chi_{\text{погл}}$ — все еще вещественные величины):

$$P_x(\omega t)=\chi_{\text{упр}}E_x(\omega t)+\chi_{\text{погл}}E_x(\omega t-{}^1/_2\pi)=\chi_{\text{упр}}E_x(\omega t)+i\chi_{\text{погл}}E_x(\omega t),$$

т. е.

$$P_x(\omega t)=\chi(\omega)E_x(\omega t), \tag{35}$$

где

$$\chi(\omega)=\chi_{\text{упр}}+i\chi_{\text{погл}}. \tag{36}$$

Физическая поляризация по оси $x$ равна вещественной части комплексной величины $P_x$ [уравнение (35)]. Эта комплексная величина имеет в качестве множителя сумму вещественной и мнимой частей комплексной восприимчивости: $\chi_{\text{упр}}+i\chi_{\text{погл}}$. (Восприимчивости $\chi_{\text{упр}}$ и $\chi_{\text{погл}}$ — вещественные величины.) Например, положив $\varphi=0$ в уравнении (32), имеем

$$E_x=E_0e^{-i\omega t}=E_0\cos\omega t-iE_0\sin\omega t, \tag{37}$$

$$P_x=\chi E_x=(\chi_{\text{упр}}+i\chi_{\text{погл}})(E_0\cos\omega t-iE_0\sin\omega t)=$$
$$=\chi_{\text{упр}}E_0\cos\omega t+\chi_{\text{погл}}E_0\sin\omega t+i\cdot(\text{мнимая часть}). \tag{38}$$

Уравнения (37) и (38) дают нам вещественные части $E_x$ и $P_x$. Вещественные величины $\chi_{\text{упр}}$ и $\chi_{\text{погл}}$ удовлетворяют уравнению (34), которое справедливо для физических (и поэтому вещественных) полей.

*Комплексная диэлектрическая постоянная.* Введя комплексные поля $E_x$ и $P_x$, мы получили очень простое выражение $P_x=\chi E_x$ [уравнение (35)] вместо более сложного выражения (34). Такое упрощение далось ценой появления комплексной восприимчивости $\chi(\omega)$, определяемой уравнением (36). Уравнение (35) по форме похоже на уравнение (12) (которое справедливо для статических полей). Поэтому мы можем распространить уравнения (12)—(17) на поля, зависящие от времени. Это значит, что если нельзя пренебречь поглощением и мы хотим сохранить форму уравнений (12)—(17), то нам следует работать с комплексной диэлектрической постоянной и с комплексной магнитной проницаемостью. В соответствии с уравнениями (16) и (36) имеем

$$\varepsilon=1+4\pi\chi=1+4\pi\chi_{\text{упр}}+i\,4\pi\chi_{\text{погл}}. \tag{39}$$

Таким образом, $\varepsilon=\text{Re}\varepsilon+i\,\text{Im}\varepsilon$, где

$$\text{Re}\varepsilon=1+4\pi\chi_{\text{упр}}, \tag{40}$$

$$\text{Im}\varepsilon=4\pi\chi_{\text{погл}}. \tag{41}$$

Для $\omega=0$ все величины принимают свои статические значения.

*) В главе 3 мы называли их амплитудами дисперсии и поглощения, соответственно. (*Прим. ред.*)

*Комплексная диэлектрическая постоянная для простой модели линейной изотропной среды.* Для нашей простой модели упруго связанного электрона, не имеющего ни постоянного, ни наведенного магнитного момента, величина $\mathbf{M}=0$. Отсюда $\chi_m=0$ и $\mu=1$ в соответствии с уравнениями (13), (15) и (17). Электрическая восприимчивость имеет вещественную (т. е. упругую) и мнимую (т. е. неупругую) составляющие, определяемые уравнениями (30) и (31). Уравнение (39) принимает вид

$$\varepsilon=1+\frac{4\pi Nq^2}{M}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}+i\,\frac{4\pi Nq^2}{M}\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}. \tag{42}$$

Заметим, что комплексные величины позволяют легко решить уравнение (23) движения заряда $q$:

$$\ddot{x}+\Gamma\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{q}{M}E_x=\frac{q}{M}E_0e^{-i\omega t}. \tag{43}$$

Здесь $E_0$ — комплексное число. Положим $x=x_0\exp(-i\omega t)$. Тогда $\dot{x}=-i\omega x$ и $\ddot{x}=-\omega^2x$. Подставляя эти производные в уравнение (43), получим

$$(-\omega^2-i\omega\Gamma+\omega_0^2)\,x=\frac{q}{M}E_x,$$

т. е.

$$x(\omega t)=\frac{q}{M}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\omega\Gamma}E_x(\omega t). \tag{44}$$

Комплексная восприимчивость равна

$$\chi(\omega)=\frac{P_x}{E_x}=\frac{Nqx}{E_x}=\frac{Nq^2}{M}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\omega\Gamma}. \tag{45}$$

Комплексная диэлектрическая постоянная равна

$$\varepsilon=1+4\pi\chi=1+\frac{4\pi Nq^2}{M}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\omega\Gamma}. \tag{46}$$

Легко проверить, что уравнения (46) и (42) эквивалентны. Для этого нужно избавиться от мнимого слагаемого в знаменателе дроби в выражении (46), чтобы величину $\varepsilon$ можно было написать как сумму $\mathrm{Re}\varepsilon+i\mathrm{Im}\varepsilon$. Иногда более удобно оставить $\varepsilon$ в форме (46).

*Уравнения Максвелла для линейной изотропной среды.* Начнем с общих уравнений Максвелла [уравнения (5)—(8)]. Предположим, что между $P_x$ и $E_x$ и между $M_x$ и $B_x$ существует линейная связь [формулы (12)—(17)]. Мы видим, что этим уравнениям можно удовлетворить действительными величинами только при $\omega=0$, но если заменить действительные величины мнимыми, уравнения (12)—(17) будут справедливы для любых частот. Таким образом, мы получаем уравнения Максвелла для комплексных полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$:

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0, \tag{47}$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E})=4\pi\rho_{\text{своб}}, \tag{48}$$

$$\nabla\times(\mathbf{B}/\mu)=\frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{\text{своб}}, \tag{49}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \tag{50}$$

В общем случае, когда $\varepsilon$ и $\mu$ зависят от частоты, эти уравнения относятся к определенной частоте $\omega$. Так как физические величины $\rho_{\text{своб}}$ и $\mathbf{J}_{\text{своб}}$ каждая могут иметь части, пропорциональные как $\cos\omega t$, так и $\sin\omega t$, то они будут вещественными частями комплексных величин, которые входят в приведенные выше уравнения. Конечно, в частном случае среды, для которой $\varepsilon$ и $\mu$ не зависят от частоты, все величины вещественны.

*Уравнения Максвелла для нейтральной, однородной, линейной и изотропной сред.* В уравнениях (48) и (49) диэлектрическая постоянная $\varepsilon$ и магнитная проницаемость $\mu$ — комплексные функции частоты $\omega$. Эти величины также зависят от координат $x$, $y$ и $z$, поскольку свойства среды могут меняться от точки к точке. Например, в нашей простой модели концентрация атомов $N$ может быть функцией координат: $N=N(x, y, z)$.

Рассмотрим простой и важный случай, когда среда *однородна*, т. е. $\mu$ и $\varepsilon$ не зависят от $x$, $y$ и $z$. Тогда $\varepsilon$ и $\mu$ в уравнениях (48) и (49) постоянны. Положим, далее, что среда *нейтральна*; под этим мы подразумеваем, что $\rho_{\text{своб}}$ и $\mathbf{J}_{\text{своб}}$ равны нулю. (Такая простая модель соответствует нейтральному газу или аморфному твердому телу.) Тогда уравнения Максвелла (47)—(50) примут вид

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0, \tag{51}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0, \tag{52}$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \tag{53}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \tag{54}$$

Заметим, что, положив $\mu=1$ и $\varepsilon=1$, мы получим уравнения Максвелла для вакуума. В интересующих нас случаях $\mu$ и $\varepsilon$, как правило, комплексные, поэтому $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ тоже комплексные. Например, для нашей простой модели $\mu=1$ и $\varepsilon$ — комплексное число, а физические поля соответствуют вещественным частям комплексных полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

*Волновое уравнение.* Уравнения (51)—(54) являются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка. Уравнения (53) и (54) не разделены относительно полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$. Из них легко получить разделенные уравнения второго порядка. Образуем ротор уравнения (53) и затем используем уравнение (54):

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B})=\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{E})=-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}. \tag{55}$$

Точно так же возьмем ротор уравнения (54) и используем уравнение (53):

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B})=-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{56}$$

Теперь воспользуемся векторным тождеством [см. приложение I, уравнение (39)]

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{C})\equiv\nabla(\nabla\cdot\mathbf{C})-\nabla^2\mathbf{C} \tag{57}$$

и применим его к левой части уравнения (55) и уравнения (56). Воспользовавшись равенством нулю производных $\nabla\cdot\mathbf{E}$ и $\nabla\cdot\mathbf{B}$, получим

$$\nabla^2\mathbf{B}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=0,\quad \nabla^2\mathbf{E}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0. \tag{58}$$

Уравнения (58) в действительности состоят из шести различных уравнений, каждое из которых имеет следующий вид:

$$\nabla^2\psi(x, y, z, t)-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x, y, z, t)}{\partial t^2}=0, \tag{59}$$

где $\psi(x, y, z, t)$ заменяет одну из шести величин $E_x$, $E_y$, $E_z$, $B_x$, $B_y$, $B_z$.

Для специального случая, когда $\varepsilon$ и $\mu$ вещественны, положительны и не зависят от частоты, уравнение (59) представляет собой классическое волновое уравнение для недиспергирующих волн. Эти условия выполняются в вакууме: $\mu=\varepsilon=1$. Нас интересует более общий случай нейтральной и изотропной линейной среды, где $\varepsilon$ и $\mu$ — комплексные величины, зависящие от частоты. При этом поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ описываются комплексными величинами, зависимость которых от времени определяется множителем $\exp(-i\omega t)$. Таким образом, для всех шести величин, представляемых функцией $\psi(x, y, z, t)$, имеем

$$\psi(x, y, z, t)=\varphi(x, y, z)\,e^{-i\omega t}, \tag{60}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\omega^2\psi. \tag{61}$$

Подставляя уравнение (61) в уравнение (59) и сокращая на $\exp(-i\omega t)$, получим дифференциальное уравнение для функции координат $\varphi(x, y, z)$:

$$\nabla^2\varphi(x, y, z)+k^2\varphi(x, y, z)=0. \tag{62}$$

Здесь комплексная постоянная $k^2$ равна

$$k^2=\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{63}$$

*Комплексный показатель преломления.* Определим комплексную величину $n^2$, называемую *квадратом комплексного показателя преломления*, так:

$$n^2=\mu\varepsilon; \tag{64}$$

тогда

$$k^2=n^2\frac{\omega^2}{c^2}=\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{65}$$

Заметим, что так как $\varepsilon$ и $\mu$ — комплексные числа, то $k^2$ и $n^2$ — тоже комплексные. Мы можем вычислить корень квадратный из $k^2$ и $n^2$. Известно, что квадратный корень из комплексной величины — также комплексная величина. Таким образом, имеем комплексное волновое число $k$ и комплексный показатель преломления $n$.

*Решения в виде плоских волн.* Общее решение уравнения (62) может быть представлено суперпозицией членов вида

$$\varphi(x, y, z)=\exp i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}=\exp i(k_xx+k_yy+k_zz), \tag{66}$$

где

$$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=n^2\frac{\omega^2}{c^2}=\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{67}$$

Тогда общее решение уравнения (59) может быть записано как суперпозиция плоских бегущих волн:

$$\psi(x, y, z, t)=\exp[-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})], \tag{68}$$

где $k^2$ — комплексное число.

*Плоские волны, распространяющиеся вдоль оси z.* В качестве частного случая рассмотрим случай, когда только $k_z$ отлично от нуля. Тогда общее решение представляет собой плоскую волну, распространяющуюся в направлениях $+z$ и $-z$:

$$\psi(z, t)=[A^+e^{+ikz}+A^-e^{-ikz}]e^{-i\omega t}. \tag{69}$$

Здесь $+k$ и $-k$ — два значения квадратного корня из $k^2$, а $A^+$ и $A^-$ — комплексные константы. Мы хотим, чтобы член $\exp[i(kz-\omega t)]$ соответствовал волне, распространяющейся в направлении $+z$; поэтому будем считать, что $k$ соответствует корню квадратному из $k^2$ с положительной вещественной частью (конечно, при условии, что комплексное число $k$ имеет вещественную часть). Если $k$ — чисто мнимая величина, то за $k$ принимаем значение квадратного корня из $k^2$, равное $+i|k|$.

*Связь между* **E** *и* **B** *в плоской волне.* Решение (69) справедливо для каждой из шести величин $E_x$, $E_y$, $E_z$, $B_x$, $B_y$, $B_z$, так как все они удовлетворяют волновому уравнению (59). Для получения этого волнового уравнения второго порядка мы отбросили некоторую информацию, содержащуюся в исходных уравнениях Максвелла первого порядка. Вернемся теперь к ним и соберем потерянную информацию. Из равенств $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ и $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ мы заключаем, что составляющие полей $B_z$ и $E_z$ постоянны (для **k**, направленного по оси $z$). Мы не рассматриваем специальный случай нулевой частоты, поэтому эти постоянные можно положить равными нулю. Таким образом, остались лишь $E_x$, $E_y$, $B_x$ и $B_y$. Для простоты рассмотрим случай линейной поляризации по оси $x$, когда $E_x$ отлично от нуля, а $E_y$ равно нулю. В соответствии с уравнением (69) имеем

$$E_x(z, t)=(E^+e^{ikz}+E^-e^{-ikz})e^{-i\omega t}, \tag{70}$$

где $E^+$ и $E^-$ — комплексные постоянные. Из уравнений Максвелла (53) и (54) находим, что $B_x$ равно нулю, а $B_y$ и $E_x$ связаны следующими уравнениями:

$$\frac{\partial B_y}{\partial z}=-\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t}=-c\frac{\partial E_x}{\partial z}. \tag{71}$$



Используем тот факт, что форма $B_y$ определяется уравнением (69). Тогда уравнения (71) дают

$$B_y(z, t)=n(E^+e^{ikz}-E^-e^{-ikz})e^{-i\omega t}. \tag{72}$$

Таким образом, если задано электрическое поле $E_x$ [см. уравнение (70)], то $B_y$ полностью определено уравнением (72). Рассмотрев ненулевую компоненту $E_y$, мы получили бы аналогичные результаты. В общем случае результаты заключаются в том, что для компонент поля, распространяющихся в направлениях $\pm\hat{z}$, поля **B** и **E** связаны соотношением

$$\mathbf{B}^+=+\hat{\mathbf{z}}\times(n\mathbf{E}^+), \quad \mathbf{B}^-=-\hat{\mathbf{z}}\times(n\mathbf{E}^-), \tag{73}$$

где верхний индекс указывает на распространение по $+\hat{\mathbf{z}}$ или по $-\hat{\mathbf{z}}$. Во всех этих соотношениях $n$ и $k$ — в общем случае комплексные величины.

*Численный пример комплексного показателя преломления.* Предположим, что мы имеем среду с $\mu=1{,}0$ и $\varepsilon=1+i\sqrt{3}$ для частоты $\omega$. Тогда

$$n^2=1+i\sqrt{3}=2\exp\left(i\frac{1}{3}\pi\right), \tag{74}$$

$$n=\sqrt{2}\exp i\frac{\pi}{6}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i\right)=1{,}225+0{,}707i,$$

$$k=n\frac{\omega}{c}=1{,}225\frac{\omega}{c}+0{,}707i\frac{\omega}{c}.$$

Пусть волна линейно поляризована по оси $x$ и распространяется в направлении $+z$. Тогда $E^-=0$. Возьмем $E^+=E_0$, где $E_0$ — вещественное число. Тогда

$$E_x=E_0e^{i(kz-\omega t)}=E_0e^{-0{,}707(\omega/c)z}e^{i\omega[(1{,}225\,z/c)-t]},$$

$$B_y=nE_x=\sqrt{2}E_x\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right).$$

В рассмотренном примере волна распространяется в направлении $+z$. Длина волны в среде (т. е. расстояние, на котором фаза возрастает на $2\pi$) составляет $(1{,}225)^{-1}$ длины волны в вакууме. Амплитуда волны уменьшается с расстоянием по экспоненте. Магнитное поле по величине в $\sqrt{2}$ раз больше электрического и опережает его по фазе на 30°.

*Отражение и преломление плоских волн.* Предположим, что среда 1 и среда 2 представляют собой различные однородные среды, плоскость раздела которых совпадает с плоскостью $z=0$. Среда 1 занимает все пространство отрицательных $z$, а среда 2 — все пространство положительных $z$. Плоская волна создается источником в $z=-\infty$. Такой источник дает волну, распространяющуюся в направлении $+z$. На границе обеих сред возникают отраженная и преломленная волны. Для простоты ограничимся нормальным перпендикулярным падением. Пусть падающая волна линейно поляризована вдоль оси $x$ и имеет комплексную амплитуду $E_x$. Пусть, далее, $R_{12}$ и $T_{12}$ — комплексные амплитуды отраженной и преломленной волн. Имеем

$$E_x(1)=1\cdot e^{i(k_1z-\omega t)}+R_{12}e^{-i(k_1z+\omega t)}, \tag{75}$$

$$E_x(2)=T_{12}e^{i(k_2z-\omega t)}, \tag{76}$$

где $E_x(1)$ — полное поле в среде 1 (т. е. сумма пришедшего из $-z$ и отраженного полей), $E_x(2)$ — полное (т. е. преломленное) поле в среде 2, а $R_{12}$ и $T_{12}$ — неизвестные комплексные постоянные, которые нужно найти.

Если $E_x$ известно, то, чтобы найти $B_y$ в обеих средах, можно использовать уравнение (72):

$$B_y(1)=n_1e^{i(k_1z-\omega t)}-n_1R_{12}e^{-i(k_1z-\omega t)}, \tag{77}$$

$$B_y(2)=n_2T_{12}e^{i(k_2z-\omega t)}. \tag{78}$$

*Граничные условия при z=0.* Так как в плоскости $z=0$ имеется разрыв непрерывности, мы не можем использовать уравнения Максвелла для однородной среды при переходе через эту плоскость раздела. Вместо этого воспользуемся уравнениями Максвелла (47)—(50) для линейной изотропной среды. Предположим, что

обе среды нейтральны и что в плоскости раздела нет поверхностных зарядов или токов. Представляют интерес два уравнения Максвелла, содержащие ротор поля:

$$\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} = -i\frac{\omega}{c}\varepsilon \mathbf{E}, \tag{79}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{B}. \tag{80}$$

В нашей задаче $\mathbf{E}=\hat{\mathbf{x}}E_x$, а $\mathbf{B}=\hat{\mathbf{y}}B_y$. В соответствии с теоремой Стокса для любого вектора $\mathbf{C}$ имеем

$$\int (\nabla \times \mathbf{C})\cdot d\mathbf{A} = \oint \mathbf{C}\cdot d\mathbf{l}, \tag{81}$$

где $d\mathbf{A}$ — элемент площади поверхности, а $d\mathbf{l}$ — элемент длины контура, ограничивающего площадь. Применим теорему (81) к вектору $\mathbf{C}\equiv\hat{\mathbf{y}}\,(B_y/\mu)$. В качестве контура интегрирования возьмем контур, состоящий из двух частей: одна часть контура является отрезком, параллельным направлению $+y$ и расположенным с одной стороны от плоскости $z=0$, а другая часть контура является таким же отрезком, параллельным первому, но расположенным с другой стороны от плоскости. Расстояние между этими отрезками равно небольшой величине $\Delta z$. При стремлении $\Delta z$ к нулю площадь, охватываемая контуром, стремится к нулю; поэтому поверхностный интеграл в левой части уравнения (81) также стремится к нулю, если выражение $\nabla\times\mathbf{C}$ не бесконечно (а оно не бесконечно). Таким образом, контурный интеграл в правой части уравнения (81) равен нулю. Отсюда следует, что компонента $\mathbf{C}$, касательная границе раздела, одинакова с обеих сторон от границы. Следовательно, тангенциальная компонента $\mathbf{B}/\mu$ при переходе через границу не меняется; она непрерывна при $z=0$. Точно так же непрерывна и тангенциальная компонента $\mathbf{E}$ при $z=0$.

Непрерывность $E_x$ при $z=0$ дает [используем уравнения (75) и (76)]

$$1+R_{12}=T_{12}. \tag{82}$$

Непрерывность $H_y=B_y/\mu$ при $z=0$ дает [используем уравнения (77) и (78)]

$$\frac{n_1}{\mu_1}(1-R_{12})=\frac{n_2}{\mu_2}T_{12}. \tag{83}$$

Определим характеристический импеданс (с точностью до коэффициента пропорциональности) следующим образом:

$$Z=\frac{\mu}{n}=\frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \tag{84}$$

Решая уравнения (82) и (83), получим

$$R_{12}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}, \quad T_{12}=1+R_{12}. \tag{85}$$

Для специального случая, когда магнитная проницаемость $\mu$ равна единице, имеем $Z=n^{-1}$. Тогда уравнения (85) примут вид

$$R_{12}=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}, \quad T_{12}=1+R_{12}. \tag{86}$$

Для случая, когда среда 1 — вакуум, а среда 2 обладает комплексным показателем преломления $n=n_R+in_I$, уравнение для $R_{12}$ (86) примет вид

$$R_{12}=\frac{1-n}{1+n}=\frac{(1-n_R)-in_I}{(1+n_R)+in_I}\equiv |R|\exp i\varphi. \tag{87}$$

Амплитуда отраженной волны равна произведению $|R|$ на амплитуду падающей волны. Временная зависимость для отраженной волны принимает вид $\exp(-i\omega t+i\varphi)$, где $\varphi$ — *задержка фазы*, возникающая при отражении. Относительная



интенсивность отраженной волны равна $|R_{12}|^2$, т. е.

$$|R_{12}|^2=\frac{(1-n_R)^2+n_I^2}{(1+n_R)^2+n_I^2}. \tag{88}$$

Пример. *Простая модель дисперсионного соотношения для проводника.* Обратимся к нашей простой модели. Положим, что «коэффициент жесткости» атома $K=M\omega_0^2$ в этой модели равен нулю. Это значит, что движение электронов «в среднем» описывается следующим уравнением движения:

$$\ddot{x}+\Gamma\dot{x}=\frac{q}{M}E_x. \tag{89}$$

Это уравнение движения соответствует свободным электронам, на которые, кроме силы электрического поля $E_x$, действует некоторая средняя сила торможения. Такова наша модель проводника. Рассмотрим постоянное электрическое поле, внезапно возникшее в момент времени $t=0$. Скорость $\dot{x}$ будет экспоненциально возрастать, пока не достигнет «конечной скорости», определяемой из условия $\ddot{x}=0$ [уравнение (89)]:

$$\dot{x}=\frac{qE_x}{\Gamma M}(1-e^{-\Gamma t}); \quad \dot{x}=\frac{qE_x}{\Gamma M}, \quad \text{когда} \quad t\gg\Gamma^{-1}. \tag{90}$$

Величина $\Gamma$, имеющая размерность частоты, т. е. *сек*$^{-1}$, показывает, как быстро достигается «конечная скорость». Обратная величина $\Gamma^{-1}$ соответствует времени релаксации «переходных» токов при внезапном изменении поля.

*Область низких частот: «чисто активная» проводимость.* Если частота $\omega$ поля мала по сравнению с коэффициентом затухания $\Gamma$, то заряды всегда будут обладать конечной скоростью, отвечающей мгновенному значению поля $E_x$, и фазовое соотношение между $\dot{x}$ и $E_x$ будет практически тем же, что и для очень малых частот. В этом случае говорят, что среда обладает *чисто активной* электрической проводимостью. Из уравнения (90) следует:

$$\dot{x}(t)=\frac{qE_x(t)}{\Gamma M}, \quad \text{когда} \quad \omega\ll\Gamma. \tag{91}$$

Умножим это равенство слева и справа на $Nq$, т. е. на величину, которую можно назвать «концентрацией заряда». Тогда слева мы будем иметь плотность тока $Nq\dot{x}$ и формула (91) примет вид

$$\mathbf{J}_x=Nq\dot{x}=Nq\left(\frac{qE_x}{\Gamma M}\right)\equiv\sigma_{DC}E_x. \tag{92}$$

Мы получили, что плотность тока $\mathbf{J}_x$ пропорциональна электрическому полю $E_x$. Это *закон Ома*, и коэффициент перед $E_x$ представляет собой «чисто активную» электрическую проводимость $\sigma_{DC}$. Формула (92) показывает, как величина $\sigma_{DC}$ связана с коэффициентом затухания $\Gamma$:

$$\sigma_{DC}=\frac{Nq^2}{\Gamma M} \quad \text{для} \quad \omega\ll\Gamma. \tag{93}$$

Для больших частот скорость $\dot{x}$ наряду с компонентой, находящейся в фазе с $E_x$, будет иметь компоненту, сдвинутую на $\pm 90°$ относительно $E_x$. В этом случае, чтобы получить установившееся решение уравнения (89), удобно воспользоваться комплексными величинами с зависимостью от времени, определяемой экспонентой $\exp(-i\omega t)$. [Мы получим его, если положим в решении (44) $\omega_0=0$.] Комплексная проводимость определяется следующим образом:

$$\mathbf{J}_x=Nq\dot{x}=Nq(-i\omega x)=-i\omega P_x=-i\omega\chi E_x\equiv\sigma(\omega)E_x. \tag{94}$$

Отсюда

$$\sigma(\omega)=-i\omega\chi=-i\omega(\chi_{\text{упр}}+i\chi_{\text{погл}})=\omega\chi_{\text{погл}}-i\omega\chi_{\text{упр}}. \tag{95}$$

Мы видим, что если проводимость $\sigma(\omega)$ — вещественное число, то скорость $\dot{x}$ находится в фазе с $E_x$ и $\sigma$ пропорциональна неупругой электрической восприимчивости. Величины $\chi(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ можно записать в виде выражения с комплексными

знаменателями, как это сделано в уравнении (45). Если в этом уравнении положить $\omega_0=0$, то

$$\chi(\omega)=\frac{Nq^2}{M}\frac{1}{-\omega^2-i\omega\Gamma}, \tag{96}$$

$$\sigma(\omega)=-i\omega\chi(\omega)=\frac{Nq^2}{M}\frac{i\omega}{\omega^2-i\omega\Gamma}. \tag{97}$$

В приближении $\omega\ll\Gamma$ можно пренебречь $\omega^2$ по сравнению с $\omega\Gamma$ и мы имеем

$$\chi(\omega)=i\frac{Nq^2}{M}\frac{1}{\omega\Gamma}, \quad \omega\ll\Gamma, \tag{98}$$

и

$$\sigma(\omega)=\frac{Nq^2}{M\Gamma}=\sigma(0)=\sigma_{DC}, \quad \omega\ll\Gamma \tag{99}$$

Мы видим, что в низкочастотном приближении $0\leqslant\omega\ll\Gamma$ проводимость $\sigma(\omega)$ вещественна и равна значению $\sigma(0)$, полученному для постоянного поля. Скорость $\dot{x}$ находится в фазе с $E_x$.

Комплексная электрическая восприимчивость $\chi(\omega)$ является чисто мнимой величиной для $\omega\ll\Gamma$, в соответствии с уравнением (98). В этом случае комплексное выражение для квадрата показателя преломления $n^2$ имеет вид

$$n^2=1+4\pi\chi=1+i\frac{4\pi Nq^2}{M}\frac{1}{\omega\Gamma}=1+i\frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma}, \tag{100}$$

где

$$\omega_p^2\equiv\frac{4\pi Nq^2}{M} \tag{101}$$

— так называемая *плазменная частота*.

Мы рассмотрим два предельных случая среды с «чисто активной» проводимостью: разреженную и плотную среды.

Случай 1. *Разреженная среда.* В этом случае $\omega$, $\Gamma$ и $\omega_p$ удовлетворяют неравенствам

$$\omega_p\ll\Gamma, \quad \frac{\omega_p^2}{\Gamma}\ll\omega\ll\Gamma, \tag{102}$$

и в соответствии с уравнением (100), если пренебречь членами более высокого порядка, чем $\omega_p^2/\omega\Gamma$, мы имеем

$$n=\left[1+i\frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma}\right]^{1/2}\approx 1+\frac{1}{2}\,i\,\frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma}. \tag{103}$$

Тогда комплексное волновое число равно

$$k=n\frac{\omega}{c}=\frac{\omega}{c}+i\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{c\Gamma}=\frac{\omega}{c}+\frac{2\pi i}{c}\sigma_{DC}. \tag{104}$$

В последнем равенстве использованы уравнения (101) и (93). Вещественная часть $k$ так же, как и в вакууме, равна $\omega/c$. Мнимая часть волнового числа $k$ определяет экспоненциальное затухание бегущей плоской волны. Она значительно меньше вещественной части, и поэтому средняя длина ослабления велика по сравнению с длиной волны. *Интенсивность* плоской волны пропорциональна квадрату модуля комплексной амплитуды. Она экспоненциально уменьшается с расстоянием, и это уменьшение определяется членом $\exp(-2k_I z)$, где $k_I$ — мнимая часть $k$. Расстояние $d=(2k_I)^{-1}$, на котором интенсивность уменьшается в $e$ раз, определяется из уравнения (104):

$$\frac{1}{d}\equiv 2k_I=\frac{4\pi}{c}\sigma_{DC}, \quad \text{или} \quad \frac{\rho_{DC}}{d}=\frac{4\pi}{c}. \tag{105}$$

Величина $\rho/d$ равна сопротивлению прямоугольного параллелепипеда толщиной



$d$ и с боковыми сторонами длиной $L$: $R=\rho\frac{L}{Ld}=\frac{\rho}{d}$. Из равенства (105) следует, что эта величина равна $4\pi/c=377$ *ом*. Вспомните, что сопротивление в 377 *ом* является характеристическим импедансом (не дающим отражения) для электромагнитной плоской волны (см. главу 5). Конечно, на одной длине $d$ экспонента не дает полного поглощения. Однако отражение практически отсутствует, и на длине в несколько $d$ волна полностью поглощается.

Если говорить более точно, то некоторое отражение все же возникает. Вещественная часть $n_R$ практически равна единице, а мнимая часть $n_I$ мала по сравнению с единицей, и поэтому относительная интенсивность отраженной плоской волны (при нормальном падении из вакуума) равна

$$|R|^2=\frac{(n_R-1)^2+n_I^2}{(n_R+1)^2+n_I^2}\approx\frac{0+n_I^2}{2^2+n_I^2}\approx\frac{n_I^2}{4}\ll 1. \tag{106}$$

Имея в виду уравнения (103) и (105), получим

$$|R|^2\approx\frac{1}{16}\left(\frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma}\right)^2=\left(\frac{\lambda\!\!\!^{-}}{4d}\right)^2\ll 1, \tag{107}$$

где $\lambda\!\!\!^{-}\equiv c/\omega$—«приведенная» длина волны в вакууме.

Случай 2. *Плотная среда.* Этот случай соответствует неравенствам

$$\omega\ll\Gamma, \quad \omega\ll\omega_p, \quad \omega\Gamma\ll\omega_p^2, \tag{108}$$

и из уравнения (100) следует, что $n^2$ — практически чисто мнимая величина. Извлекая корень квадратный из $n^2$, мы помним, что квадратный корень из $i$ равен $[\exp(i^1/_2\pi)]^{1/_2}=\exp(i^1/_4\pi)=2^{-1/_2}(1+i)$. Имеем

$$n=\left[i\frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma}\right]^{1/2}=\left(\frac{\omega_p^2}{2\omega\Gamma}\right)^{1/2}(1+i)=|n|\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}. \tag{109}$$

Отсюда

$$k=n\frac{\omega}{c}=\sqrt{\frac{\omega}{c}}\left(\frac{\omega_p^2}{2c\Gamma}\right)^{1/2}(1+i)=\sqrt{\frac{\omega}{c}}\left(\frac{2\pi\sigma_{DC}}{c}\right)^{1/2}(1+i). \tag{110}$$

Таким образом, для плотной среды вещественная и мнимая части $k$ равны, причем каждая из них больше, чем волновое число $k$ в вакууме. Средняя длина ослабления (для амплитуды) $k_I^{-1}$ мала по сравнению с длиной волны в вакууме. Таким образом, оказывается, что плоская волна, падающая из вакуума в чисто активную среду, отражается практически без поглощения. Действительно, расстояние, на которое поле проникает в среду, настолько мало, что его почувствуют лишь несколько зарядов. Заряды, «чувствующие» поле, будут двигаться со скоростью, находящейся в фазе с $E_x$, и будут поглощать энергию. Однако число таких зарядов столь невелико, что волна отразится практически без потери интенсивности.

Более того, величина отраженной интенсивности равна

$$|R|^2=\frac{(n_R-1)^2+n_I^2}{(n_R+1)^2+n_I^2}\approx\frac{|n|^2-2n_R}{|n|^2+2n_R}=\frac{|n|^2-\sqrt{2}\,|n|}{|n|^2+\sqrt{2}\,|n|}\approx$$

$$\approx 1-\frac{2\sqrt{2}}{|n|}=1-2\sqrt{2}\left(\frac{\omega\Gamma}{\omega_p^2}\right)^{1/2}. \tag{111}$$

Так как $\omega\Gamma\ll\omega_p^2$, то $|R|^2\approx 1$.

Средняя длина ослабления (расстояние, на котором интенсивность уменьшается в $e$ раз) $d=(2k_I)^{-1}$ равна

$$d=\lambda\!\!\!^{-}\sqrt{\frac{\omega\Gamma}{2\omega_p^2}}\ll\lambda\!\!\!^{-}.$$

Эта длина $d$ мала по сравнению с длиной волны, но она все же больше в $\lambda\!\!\!^{-}/2d$ раз толщины пластины, сопротивление которой равно 377 *ом* (для постоянного тока).

Поэтому в этом случае импеданс среды мал по сравнению с импедансом, создающим согласованную нагрузку (первый случай). Вот почему знак амплитуды изменяется при отражении.

Мы видим, что существует большое количественное различие между разреженной и плотной средами с электрической проводимостью. Можно сказать, что разреженная активная среда практически непрозрачна, т. е. она «черная». Такая среда почти полностью поглощает падающее на нее излучение. В противоположность этому плотная активная среда действует как очень малая сосредоточенная нагрузка. Такая среда почти полностью отражает падающее излучение.

И, наконец, следует помнить, что все сказанное заключено в неравенствах (102) и (108). Они дают зависимость свойств проводника от частоты. Например, любой проводник, в соответствии с условием (108), ведет себя как плотная активная среда, если только частота $\omega$ достаточно мала. С другой стороны, проводник не может быть «разреженной активной средой» для любых частот, если не выполняется неравенство $\Gamma \gg \omega_p$. Если это условие удовлетворено, то проводник представляет собой разреженную активную среду в диапазоне частот, определяемом неравенством (102).

*Высокочастотный предел.* Уравнение (89) определяет движение отдельного «среднего» заряда. Если зависимость от времени имеет вид $\exp(-i\omega t)$, это уравнение можно переписать так:

$$-i\omega\dot{x} + \Gamma\dot{x} = \frac{q}{M} E_x. \tag{112}$$

Только что рассмотренный чисто низкочастотный предел соответствует случаю, когда можно пренебречь $\omega$ по сравнению с $\Gamma$. Наоборот, высокочастотный предел осуществляется, когда $\omega$ очень велико по сравнению с $\Gamma$. В этом приближении

$$\dot{x} = \frac{iq}{\omega M} E_x, \quad \omega \gg \Gamma. \tag{113}$$

Множитель $i$ в этой формуле означает, что скорость сдвинута по фазе на 90° относительно силы и поэтому за период работа над зарядом не совершается: поглощение отсутствует*). Комплексная проводимость будет чисто мнимой:

$$J_x = Nq\dot{x} = i\frac{Nq^2}{\omega M} E_x \equiv \sigma(\omega) E_x,$$

$$\sigma(\omega) = i\frac{Nq^2}{\omega M}, \quad \omega \gg \Gamma. \tag{114}$$

[См. уравнение (97), где пренебрегаем $\omega\Gamma$ по сравнению с $\omega^2$.]

Квадрат комплексного показателя преломления $n^2$ равен

$$n^2 = 1 + 4\pi\chi = 1 - \frac{4\pi Nq^2}{M\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega \gg \Gamma. \tag{115}$$

В высокочастотном пределе существуют два качественно различных случая.

С л у ч а й 1. *Дисперсивная полоса частот.* Этот случай определяется неравенствами

$$\Gamma \ll \omega_p \leqslant \omega. \tag{116}$$

В соответствии с уравнением (115) запишем

т. е.
$$0 \leqslant n^2 < 1, \tag{117}$$

$$0 \leqslant n \leqslant 1. \tag{118}$$

Таким образом, для проводника в дисперсивной полосе частот показатель преломления $n$ — вещественное число, принимающее значения между 0 и 1. Среда прозрачна, поглощение отсутствует, и фазовая скорость больше скорости света $c$. Отраженная интенсивность определяется множителем $(n-1)^2/(n+1)^2$.

*) По этой причине рассматриваемый диапазон частот называется также «упругим» диапазоном.



С л у ч а й 2. *Реактивная полоса частот.* Эта полоса определяется неравенством

$$\Gamma \ll \omega \leqslant \omega_p. \tag{119}$$

Тогда из уравнения (115) следует:

$$-\frac{\omega_p^2}{\Gamma^2} \ll n^2 \leqslant 0. \tag{120}$$

В этом случае $n^2$ отрицательно и $n$ — чисто мнимое число:

$$n = i\,|\,n\,| = i\left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1\right]^{1/2}$$

и

$$k = n\frac{\omega}{c} = i\frac{\omega}{c}\,|\,n\,| = i\,|\,k\,|.$$

Плоская волна в реактивной среде имеет вид

$$E_x = [A^+ e^{-|k|z} + A^- e^{+|k|z}]\, e^{-i\omega t}.$$

Если среда простирается до $z = +\infty$, то $A^-$ равно нулю. Таким образом, плоская волна, падающая из вакуума в такую среду, должна быть полностью отражена без поглощения. Более точно отраженная интенсивность будет определяться коэффициентом

$$|\,R\,|^2 = \frac{(n_R-1)^2 + n_I^2}{(n_R+1)^2 + n_I^2} \approx \frac{1+n_I^2}{1+n_I^2} = 1.$$

В основном тексте книги мы избегали рассмотрения комплексного показателя преломления и комплексного волнового числа $k$. Поэтому мы почти не упоминали о поглощающих средах. Для реактивной полосы частот мы использовали символ $\varkappa$, вместо того чтобы писать $|k|$. Для дисперсивной полосы частот мы использовали символ $k$, поскольку здесь $k$ — вещественное число.

*Обзор свойств проводников.* Теперь мы можем описать свойства любого проводника (с точки зрения выбранной модели):

1. Для достаточно низких частот любой проводник является плотной активной средой. В этом случае происходит практически полное отражение и очень малое поглощение.

2. Для достаточно высоких частот любой проводник является дисперсивной средой. Поэтому он прозрачен.

Проводники грубо можно разделить на три класса:

1. Проводник с $\Gamma \gg \omega_p$ имеет полосу частот, в которой он является разреженной активной средой. В этой полосе проводник может поглощать волны, не отражая их. Для такого проводника не существует чисто реактивной полосы частот.

2. Проводник с $\Gamma \ll \omega_p$ имеет полосу частот, в которой он является чисто реактивной средой. В этой полосе отсутствует поглощение. Для такого проводника не существует полосы частот, в которой бы он был разреженной активной средой. Поэтому он никогда не может «поглотить» плоскую волну без отражения.

3. Для проводника с $\Gamma \approx \omega_p$ не существует ни полосы частот, в которой он был бы разреженной активной средой, ни полосы, в которой он был бы чисто реактивной средой. Однако он еще обладает тем общим свойством, что при достаточно низких $\omega$ является плотной средой с электрической проводимостью, а при достаточно высоких $\omega$ он прозрачен.

П р и л о ж е н и е. *Твердое серебро.* Допустим, что твердое серебро можно описать нашей моделью. Движущиеся заряды представляют собой «электроны проводимости», источником которых являются валентные электроны атомов серебра. Валентность серебра равна единице, атомный вес 107,9 *г/моль*, плотность 10,5 *г/см*. Число Авогадро равно $6\cdot10^{23}$ *моль*$^{-1}$. Тогда $N \approx (6\cdot10^{23})\,(10{,}5)/(107{,}9) = 5{,}8\cdot10^{22}$. Полагая, что $M$ и $q$ — масса и заряд свободного электрона, находим

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{M}} = 1{,}36\cdot10^{16}\ \textit{рад/сек}.$$

Удельное сопротивление постоянному току $\rho_{прет}$ равно $1{,}59\cdot10^{-6}$ *ом·см*. Но 30 *ом* равно $c^{-1}$ ед. СГСЭ$_\rho$, где $c=3\cdot10^{10}$ *см/сек*. Поэтому удельное сопротивление равно $1{,}8\cdot10^{-18}$ ед. СГСЭ$_\rho\cdot$*см* и величина $\Gamma$ равна

$$\Gamma=\frac{Ne^2}{M\sigma_{DC}}=\frac{\omega_p^2}{4\pi}\rho_{DC}=2{,}7\cdot10^{13}\ сек^{-1}.$$

Мы видим, что для твердого серебра $\Gamma\ll\omega_p$. Для $\omega\ll2{,}7\cdot10^{13}$ *рад/сек*, в соответствии с нашей моделью, серебро является плотной «активной» средой (например, для микроволн). Для $\omega\gg2{,}7\cdot10^{13}$ *рад/сек* твердое серебро — чисто «упругая» среда, которая при $\omega<1{,}36\cdot10^{16}$ *рад/сек* становится чисто «реактивной». (Этот интервал частот включает видимый свет.) Для чисто «упругой» полосы частот при $\omega>1{,}36\times10^{16}$ *рад/сек* твердое серебро—прозрачная среда (например, для далекого ультрафиолета и рентгеновских лучей). Конечно, реальное серебро не следует точно этой модели. (Из-за одного упрощения: мы пренебрегли вкладами от «связанных» электронов.)

Приложение. *Графит*. Его валентность равна 4, плотность 2 *г/см*$^2$ и атомный вес 12. Тогда для простой модели имеем

$$\omega_p=0{,}36\cdot10^{17}\ рад/сек.$$

Удельное сопротивление постоянному току $\rho_{DC}$ равно $1{,}57\cdot10^{-15}$ ед. СГСЭ$_\rho\cdot$*см*. Это дает

$$\Gamma=1{,}6\cdot10^{17}\ сек^{-1}.$$

Для $\omega\ll1{,}6\cdot10^{17}$ *рад/сек* графит чисто активен в соответствии с моделью. Для $\omega\ll8\cdot10^{15}$ *рад/сек* это—плотная активная среда. Для $8\cdot10^{15}\ll\omega\ll1{,}6\cdot10^{17}$ это—разреженная активная среда. Поскольку отношение крайних частот этой полосы равно всего лишь 20, то оба неравенства не выполняются точно, и поэтому графит не будет совершенно разреженным для любой частоты, т. е. он не будет полностью непрозрачным для любой частоты. У графита нет реактивной полосы. Для $\omega\gg1{,}6\times10^{17}$ он прозрачен в соответствии с моделью.

Найдем, чему пропорциональна интенсивность отражения от графита, т. е. $|R|^2$, для видимого света в случае нашего идеализированного графита. Для зеленого света в вакууме с длиной волны 5500 Å имеем

$$\omega=2\cdot3{,}14\,(3\cdot10^{10})/(5{,}5\cdot10^{-5})=3{,}42\cdot10^{15}\ рад/сек.$$

Эта частота не попадает в область частот «плотной активной среды», для которой $\omega\ll8\cdot10^{15}$. Поэтому мы не можем ожидать ни 100% отражения, ни очень малого отражения. Имеем

$$n^2=\varepsilon=\varepsilon_R+i\varepsilon_I,$$

$$\varepsilon_R=1+\frac{\omega_p^2(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\Gamma^2}=1-\frac{(36)^2}{(3{,}42)^2+(160)^2}=0{,}951,$$

$$\varepsilon_I=\frac{\omega_p^2\Gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}=\frac{\omega_p^2(\Gamma/\omega)}{\omega^2+\Gamma^2}=\frac{160}{3{,}42}\frac{(36)^2}{(3{,}42)^2+(160)^2}=2{,}36,$$

$$n^2=0{,}951+2{,}36i=2{,}55\exp i\varphi,$$

где

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{2{,}36}{0{,}951}\approx68°.$$

Тогда

$$n=\sqrt{2{,}55}\exp\left(i\frac{1}{2}\varphi\right)=1{,}60\,(\cos34°+i\sin34°)=1{,}33+i\,0{,}90$$

и

$$|R|^2=\frac{(n_R-1)^2+n_I^2}{(n_R+1)^2+n_I^2}=\frac{(0{,}33)^2+(0{,}90)^2}{(2{,}33)^2+(0{,}90)^2}=0{,}15.$$

Таким образом, в соответствии с нашей моделью гладкий графит отражает около 15% интенсивности зеленого света при нормальном падении.

## ПРИЛОЖЕНИЕ I

### П.1. Ряды Тейлора

Предположим, что функция $f(x)$ может быть представлена в виде бесконечного ряда

$$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+c_3(x-x_0)^2+\ldots,\qquad(1)$$

где $c$—постоянные. В этом случае говорят, что $f(x)$ разложена в ряд в окрестности точки $x_0$. Чтобы найти первый коэффициент $c_0$, положим $x=x_0$; тогда в правой части все члены, за исключением первого, исчезнут. Таким образом, $c_0=f(x_0)$. Чтобы найти следующий коэффициент $c_1$, продифференцируем уравнение (1) по $x$ и снова положим $x=x_0$. Все члены, за исключением $c_1$, исчезнут, и мы получим $c_1=(df/dx)_0$, где индекс нуль означает, что производная $df/dx$ вычисляется в $x=x_0$. Аналогично

$$(d^mf/dx^m)_0=m!c_m.\qquad(2)$$

Уравнение (1) примет вид

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_0+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0+\frac{(x-x_0)^3}{3!}\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_0+\ldots\qquad(3)$$

### П.2. Часто используемые ряды

*Функции* $\sin x$ и $\cos x$. Чтобы получить с помощью ряда (3) разложения $\sin x$ и $\cos x$, воспользуемся равенствами $d(\sin x)/dx=\cos x$, $d(\cos x)/dx=-\sin x$, $\cos(0)=1$, $\sin(0)=0$ и $x_0=0$. Получаем

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots,\qquad(4)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\qquad(5)$$

*Экспонента* $e^{\alpha x}$. Пользуясь равенствами $d(e^{\alpha x})/dx=\alpha e^{\alpha x}$, $e^0=1$ и $x_0=0$, получим из ряда (3)

$$e^{\alpha x}=1+\alpha x+\frac{\alpha^2x^2}{2!}+\frac{\alpha^3x^3}{3!}+\frac{\alpha^4x^4}{4!}+\ldots\qquad(6)$$

*Функции* $\operatorname{sh}x$ *и* $\operatorname{ch}x$. Для этих функций имеем $d(\operatorname{sh})/dx=\operatorname{ch}x$, $d(\operatorname{ch}x)/dx=\operatorname{sh}x$, $(\operatorname{sh})(0)=0$, $\operatorname{ch}(0)=1$. Ряд (3) при $x_0=0$ дает

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots,\qquad(7)$$

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\qquad(8)$$

*Соотношения, в которые входит экспонента.* Если в уравнении (6) положить $\alpha=+1$ и сравнить его с уравнениями (7) и (8) и сделать то же для $\alpha=-1$, получим

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x, \tag{9}$$

$$e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x. \tag{10}$$

Эти уравнения могут быть решены относительно ch $x$ и sh $x$:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tag{11}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{12}$$

Если в уравнении (6) положить $\alpha = +i = +\sqrt{-1}$, получим

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \tag{13}$$

Аналогично, если в уравнении (6) положить $\alpha=-i$, получим

$$e^{-ix} = 1 - ix - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \tag{14}$$

Складывая и вычитая ряды (13) и (14) и сравнивая результаты с рядами (4) и (5), получим формулы

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x, \tag{15}$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x, \tag{16}$$

из которых следуют равенства

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \tag{17}$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \tag{18}$$

*Функция* tg $x$. Воспользуемся следующими равенствами: $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x$, $d(\sin x)/dx = \cos x$ и $d(\cos x)/dx = -\sin x$; тогда $d(\operatorname{tg} x)/dx = (\cos x)^{-2}$, $d^2(\operatorname{tg} x)/dx^2 = 2\sin x (\cos x)^{-3}$, $d^3(\operatorname{tg} x)/dx^3 = 2(\cos x)^{-2} - 6\sin^2 x (\cos x)^{-4}$.

Подставляя эти значения в ряд (3), получим при $x_0=0$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots \tag{19}$$

*Биномиальный ряд* $(1+x)^n$. Воспользуемся равенствами $d(1+x)^n/dx = n(1+x)^{n-1}$, $d^2(1+x)^n/dx^2 = n(n-1)(1+x)^{n-2}$, $d^3(1+x)^n/dx^3 = n(n-1)(n-2)\times(1+x)^{n-3}$ и т. д.

Подставляя их в ряд (3), получим при $x_0=0$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \ldots \tag{20}$$

Уравнение (20) справедливо для любого положительного или отрицательного $n$ и для любого положительного или отрицательного $x$, удовлетворяющего условию $x^2<1$.

### П.3. Суперпозиция гармонических функций

В волновых явлениях встречаются суперпозиции $N$ гармонических функций вида

$$u(t) = \cos \omega_1 t + \cos(\omega_1 + \alpha) t + \cos(\omega_1 + 2\alpha) t + \ldots + \cos[\omega_1 + (N-1)\alpha] t, \tag{21}$$

$$u(z) = \cos kz + \cos(kz + \beta) + \cos(kz + 2\beta) + \ldots + \cos[\theta_1 + (N-1)\beta]. \tag{22}$$



Обе эти суперпозиции можно записать следующим образом:

$$u = \cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \gamma) + \cos(\theta_1 + 2\gamma) + \ldots + \cos[\theta_1 + (N-1)\gamma]. \tag{23}$$

Мы хотим найти удобное выражение для суммы (23). Заметим, что $u$ является действительной частью следующего выражения:

$$v = e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1+\gamma)} + e^{i(\theta_1+2\gamma)} + \ldots + e^{i[\theta_1+(N-1)\gamma]} = e^{i\theta_1} S, \tag{24}$$

где $S$ — сумма $N$ членов геометрической прогрессии:

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{N-1}, \quad \text{где} \quad a = e^{i\gamma}. \tag{25}$$

Умножим $S$ на $a$. Затем вычтем почленно $S$ из $aS$, получим

$$aS - S = a^N - 1, \tag{26}$$

т. е.

$$S = \frac{a^N - 1}{a - 1} = \frac{e^{iN\gamma} - 1}{e^{i\gamma} - 1} = \frac{e^{1/2\, iN\gamma}}{e^{1/2\, i\gamma}} \frac{(e^{1/2\, iN\gamma} - e^{-1/2\, iN\gamma})}{(e^{1/2\, i\gamma} - e^{-1/2\, i\gamma})} =$$

$$= e^{1/2\, i(N-1)\gamma} \frac{\sin 1/2\, N\gamma}{\sin 1/2\, \gamma} \tag{27}$$

[мы использовали равенство (16)]. Подстановка уравнения (27) в уравнение (24) дает

$$u = \cos[\theta_1 + 1/2\,(N-1)\gamma] \frac{\sin 1/2\, N\gamma}{\sin 1/2\, \gamma}. \tag{28}$$

Взяв действительную часть этого выражения, получим искомый результат:

$$u = \cos[\theta_1 + 1/2\,(N-1)\gamma] \frac{\sin 1/2\, N\gamma}{\sin 1/2\, \gamma}. \tag{29}$$

Он может быть записан в другой, более удобной форме. В выражении (23) $\theta_1$ — аргумент первого члена. Аргумент последнего члена (назовем его $\theta_2$) равен

$$\theta_2 = \theta_1 + (N-1)\gamma. \tag{30}$$

Среднее первого и последнего аргументов равно

$$\theta_{\text{ср}} = 1/2\,(\theta_1 + \theta_2) = 1/2\,\theta_1 + 1/2\,\theta_1 + 1/2\,(N-1)\gamma. \tag{31}$$

Первый член в равенстве (29) равен $\cos\theta_{\text{ср}}$. Кроме того, из равенства (30) следует, что $\gamma = (\theta_2 - \theta_1)/(N-1)$. Подставляя $\cos\theta_{\text{ср}}$ и $\gamma$ в равенство (29), получаем

$$u = \cos\theta_{\text{ср}} \frac{\sin[1/2\, N(\theta_2 - \theta_1)/(N-1)]}{\sin[1/2\,(\theta_2 - \theta_1)/(N-1)]}. \tag{32}$$

Выражение (29) зависит от величины $\gamma$, равной приращению аргументов двух последовательных членов ряда (23). Равенство (32) эквивалентно (29), но выражено через первый и последний аргументы $\theta_1$ и $\theta_2$ и их среднее. Заметим, что $\cos\theta_{\text{ср}}$ — гармоническое колебание той же формы, что и каждый член суперпозиции (23), но вместо единичной амплитуды это колебание имеет амплитуду $A(\theta_1, \theta_2, N)$, равную

$$A(\theta_1, \theta_2, N) = \frac{\sin[1/2\, N(\theta_2 - \theta_1)/(N-1)]}{\sin[1/2\,(\theta_2 - \theta_1)/(N-1)]}. \tag{33}$$

Наиболее компактное выражение для нашего результата имеет вид

$$u = A(\theta_1, \theta_2, N)\cos\theta_{\text{ср}}. \tag{34}$$

Случай $N=2$ для колебаний во времени [уравнение (21)] соответствует биениям, а для колебаний в пространстве [уравнение (22)] — интерференционной картине от двух щелей. Для колебаний во времени большие значения $N$ вызывают «модуляции», что в пределе при $N \to \infty$ приводит к появлению импульсов. Для колебаний в пространстве большие значения $N$ приводят к интерференционной картине от многих щелей, и в пределе при $N \to \infty$ мы получаем дифракционную картину от одной щели шириной в много длин волны.

### П. 4. Векторные тождества

Воспользуемся буквами $A$, $B$, $C$ для обозначения скалярных функций от $x$, $y$ и $z$: $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ и $C(x, y, z)$. Аналогично через $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ будем обозначать векторные функции от $x$, $y$ и $z$. Под функцией $A$ мы понимаем вектор $\hat{\mathbf{x}}A_x(x, y, z)+\hat{\mathbf{y}}A_y(x, y, z)+\hat{\mathbf{z}}A_z(x, y, z)$, где $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, и $\hat{\mathbf{z}}$ — единичные векторы. Нас интересует, как работать с «оператором набла» $\nabla$, который одновременно является вектором и оператором взятия производной. «Фокус» в том, чтобы выражения с оператором $\nabla$ записывать таким образом, чтобы была ясна его «двойная» роль. Например, в выражении

$$\nabla(AB)=(\nabla A)B+A(\nabla B)=B\nabla A+A\nabla B \tag{35}$$

первое равенство следует из правила дифференцирования произведения. Во втором равенстве круглые скобки излишни, потому что по условию оператор $\nabla$ дифференцирует только то, что стоит справа от него. Мы можем временно писать $\nabla_a$, когда $\nabla$ действует только на $\mathbf{A}$ (или $A$), и $\nabla_b$, когда $\nabla$ действует только на $\mathbf{B}$ (или $B$). В этом случае мы должны «позаботиться» о правиле дифференцирования произведения. Затем мы перемещаем операторы и векторы таким образом, чтобы величины, которые не следует дифференцировать, оказались слева от оператора набла. При этом мы не должны забывать о правилах обращения с векторами. В конце индексы $a$ и $b$ можно опустить.

Имеем

$$\nabla(AB)=\nabla_a(AB)+\nabla_b(AB)=B\nabla_a A+A\nabla_b B=B\nabla A+A\nabla B. \tag{36}$$

Аналогично

$$\nabla\times(\mathbf{A}B)=\nabla_a\times(\mathbf{A}B)+\nabla_b\times(\mathbf{A}B)=B\nabla_a\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\nabla_b B=B\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\nabla B. \tag{37}$$

После некоторой практики промежуточные равенства вам не понадобятся.

Теперь мы хотим найти, чему равна величина $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{C})$. Считаем, что вы знакомы с равенствами

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})= \tag{38а}$$

$$=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}. \tag{38б}$$

Мы можем использовать последнее равенство, заменив $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ на оператор $\nabla$. Мы должны оба оператора $\nabla$ иметь слева от $\mathbf{C}$, так как они дифференцируют $\mathbf{C}$. Поэтому мы не можем использовать выражение (38а), а должны работать с (38б). Положим

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{C})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{C})-(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{C}. \tag{39}$$

Для компонент $x$, $y$ и $z$ этого выражения имеем

$$[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{C})]_x=\frac{\partial(\nabla\cdot\mathbf{C})}{\partial x}-\nabla^2 C_x \tag{40}$$

(аналогичные выражения для $y$ и $z$), где

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{41}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ II

### О построении электрических единиц в системе СИ

В большинстве учебников по электротехнике и в ряде учебников физики применяется система электрических единиц, называемая *рационализированной* системой МКС. Эта система представляет собой раздел электромагнитных единиц системы СИ. В нее входят механические единицы, из которых основными являются *метр*, *килограмм* и *секунда*. Единица силы в системе СИ называется *ньютоном* и представляет собой силу, которая сообщает массе в один килограмм ускорение 1 *м/сек*$^2$. Таким образом, ньютон эквивалентен $10^5$ *дин*. Соответствующая единица энергии (ньютон×метр), или *джоуль*, эквивалентна $10^7$ *эрг*.



Электрические единицы системы СИ содержат известные нам «практические» единицы — кулон (*к*), вольт (*в*), ампер (*а*) и *ом* — наряду с некоторыми новыми. Кто-то заметил, что давно известные практические единицы можно объединить в законченную систему, построенную следующим образом. Напишите закон Кулона в виде (1.1):

$$\mathbf{F}_2=k\frac{q_1 q_2\hat{\mathbf{r}}_{21}}{r_{21}^2}. \tag{1}$$

Вместо того, чтобы считать $k=1$, найдите значение $k$, если сила $F_2$ измеряется в ньютонах, $q_1$ и $q_2$ — в кулонах и $r_{21}$ — метрах. Зная соотношение между ньютоном и диной, между кулоном и ед. СГСЭ$_q$ и между метром и сантиметром, вы легко вычислите, что коэффициент $k$ должен быть равен $0{,}8988\cdot10^{10}$. (Два заряда по одному кулону, находящихся на расстоянии в один метр, создают силу около миллиона тонн!) Вместо $k$ мы можем написать $1/(4\pi\varepsilon_0)$, где величина постоянной $\varepsilon_0$ такова, что $1/(4\pi\varepsilon_0)=k=0{,}8988\cdot10^{10}$. Теперь закон Кулона можно записать так:

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{2}$$

где постоянная $\varepsilon_0$ равна

$$\varepsilon_0=8{,}854\cdot10^{-12}\ к^2/(н\cdot м^2). \tag{3}$$

Выделение коэффициента $1/4\pi$ предпринято для исключения величины $4\pi$ в большинстве электрических формул за счет введения этой величины в ряд других формул (как, например, в данном случае и закон Кулона). Это — все, что сделала «рационализированная» система. Постоянная $\varepsilon_0$ называется диэлектрической постоянной (или «диэлектрической проницаемостью») вакуума.

Электрический потенциал измеряется в вольтах, а величина электрического поля $E$ — в вольтах на метр. Сила, действующая на заряд $q$ в поле $\mathbf{E}$, равна

$$\mathbf{F}\ (н)=q\mathbf{E}\ (к\cdot в/м). \tag{4}$$

Один ампер равен, конечно, одному кулону в секунду. Сила, приходящаяся на метр длины каждого из двух параллельных проводов с током $I$ (в амперах), расположенных на расстоянии $r$ метров друг от друга, равна

$$f\ (н/м)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I^2}{r}\frac{(а^2)}{(м)}. \tag{5}$$

Вспомнив эту формулу в системе СГС:

$$f\ (дин/см)=\frac{2I^2}{rc^2}\frac{(\text{ед. СГСЭ}_q/сек)^2}{(см^3/сек^2)}, \tag{6}$$

мы вычислим, что величина $\mu_0/4\pi$ должна быть равна $10^{-7}$. Таким образом, постоянная $\mu_0$, называемая магнитной проницаемостью вакуума, равна

$$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\ н/а^2\ \text{(точно)}. \tag{7}$$

Магнитное поле $\mathbf{B}$ определяется силой Лоренца следующим образом:

$$\mathbf{F}\ (н)=q\mathbf{E}+q\mathbf{v}\times\mathbf{B}, \tag{8}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость частицы в *м/сек*, $q$ — заряд частицы в кулонах. Для $B$ требуется новая единица. Эта единица называется *тесла* или *вебер/м*$^2$, она в точности равна $10^4$ *гс*. В этой системе вспомогательное поле $\mathbf{H}$ выражается в других единицах и связано с $\mathbf{B}$ в вакууме следующим образом:

$$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}\ \text{(в вакууме)}. \tag{9}$$

Соотношение между $\mathbf{H}$ и свободным током следующее:

$$\int\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S}=I_{\text{своб}}, \tag{10}$$

где $I_{\text{своб}}$ — свободный ток (в амперах), охватываемый петлей, по которой против часовой стрелки взят линейный интеграл. Поскольку $d\mathbf{S}$ измерено в метрах,

единица для **H** называется просто *ампер на метр*. Уравнения Максвелла для полей в вакууме в рационализированной системе МКС (т. е. в системе СИ) имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{E}&=\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\ \operatorname{div}\mathbf{B}&=0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mu_0\mathbf{J}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Если вы сравните эти уравнения с теми, которые были написаны в гауссовской системе единиц СГС и в которые входит значение $c$, вы увидите, что уравнения (11) содержат волновую скорость $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ (в *м/сек*, конечно). Иными словами,

$$\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2}. \tag{12}$$

В гауссовской системе единиц СГС единица заряда (ед. $СГСЭ_q$) была установлена законом Кулона при $k=1$. В системе СИ кулон определяется не уравнением (1), а уравнением (5), т. е. силой, действующей между токами, а не силой, действующей между зарядами. В уравнении (5) мы имеем $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$. Другими словами, если бы новые экспериментальные измерения скорости света изменили бы принятое значение $c$, то мы должны были бы исправить величину постоянной $\varepsilon_0$, а не $\mu_0$.

Ниже приводится список некоторых единиц системы СИ и эквивалентных им единиц в гауссовской системе единиц СГС.

| Величина | Обозначение | Единица в СИ | Эквивалент в гауссовской системе СГС |
|---|---|---|---|
| Расстояние | $s$ | метр | $10^2$ *см* |
| Сила | **F** | ньютон | $10^5$ *дин* |
| Работа, энергия | $W$ | джоуль | $10^7$ *эрг* |
| Заряд | $q$ | кулон | $2{,}998\cdot10^9$ ед. $СГСЭ_q$ |
| Ток | $I$ | ампер | $2{,}998\cdot10^9$ ед. $СГСЭ_q$/*сек* |
| Электрический потенциал | φ | вольт | (1/299,8) ед. $СГСЭ_v$ |
| Электрическое поле | **E** | вольт/метр | (1/29980) ед. $СГСЭ_v$/*см* |
| Сопротивление | $R$ | ом | $1{,}139\cdot10^{-12}$ *сек/см* |
| Магнитное поле | **B** | тесла | $10^4$ *гс* (гаусс) |
| Магнитный поток | **Φ** | вебер | $10^8$ *гс·см*$^2$ |
| Вспомогательное поле $H$ | **H** | ампер/метр | $4\pi\cdot10^{-3}$*э* (эрстед) |

Система СИ удобна для инженеров. Для применения в фундаментальной физике полей и вещества она обладает одним большим дефектом. Уравнения Максвелла для полей в вакууме в этой системе симметричны по отношению к электрическому и магнитному полям только в том случае, если **H**, а не **B** выступает в роли магнитного поля. (Обратите внимание, что уравнения (11) не симметричны даже в отсутствие **J**.) С другой стороны, как мы показали, именно **B**, а не **H** является фундаментальным магнитным полем в веществе. Это не является вопросом определения или единиц, а представляет собой факт, отражающий отсутствие магнитного заряда. Следовательно, система СИ, построенная таким образом, затемняет или фундаментальную электромагнитную симметрию вакуума, или существенную асимметрию источников. Это — одна из причин предпочтения гауссовской системы единиц СГС в нашей книге. Другая причина в том, что большинство работающих физиков пользуется еще единицами системы СГС совместно с рядом практических единиц, применяемых в случае необходимости.



**ТАБЛИЦЫ**

**Некоторые величины в гауссовской системе СГС и международной системе СИ**

| Величина | Буквенное обозначение | В системе СГС*): единица измерения | В системе СГС*): связь между величинами | В системе СИ: единица измерения | Связь с единицами системы СГС |
|---|---|---|---|---|---|
| Расстояние | $s$ | *см* } основные | | *м* } основные | 1 *м/сек* = $10^2$ *см/сек* |
| Масса | $m$ | *г* } единицы | | *кг* } единицы | 1 *кг·м/сек* = $10^5$ *г·см/сек* |
| Время | $t$ | *сек* } | | *сек* } | |
| Скорость | $v$ | *см/сек* | $\mathbf{v}=d\mathbf{s}/dt$ | *м/сек* | |
| Количество движения | $p$ | *г·см/сек* | $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ | *кг·м/сек* | |
| Сила | **F** | *дина* [= *г·см/сек*$^2$] | $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ | ньютон (*н*) | 1 *н* = $10^5$ *дин* |
| Работа, энергия | **W** | *эрг* [= *г·см*$^2$/*сек*$^2$] | $W=\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ | джоуль (*дж*) | 1 *дж* = $10^7$ *эрг* |
| Мощность | $P$ | *эрг/сек* | $P=dW/dt$ | ватт (*вт*) | 1 *вт* = $10^7$ *эрг/сек* |
| Заряд | $q$ | ед. $СГСЭ_q$ | $F=q^2/s^2$ (закон Кулона) | кулон (*к*) | 1 *к* = 2,988·$10^9$ ед. $СГСЭ_q$ |
| Плотность заряда | $\rho$ | ед. $СГСЭ_q$/*см*$^3$ | $q=\int\rho\,dV$ ($V$ — объем) | *к/м*$^3$ | 1 *к/м*$^3$ = 2,998·$10^3$ ед. $СГСЭ_q$/*см*$^3$ |
| Ток | $I$ | ед. СГСЭ/*сек* | $I=dq/dt$ | ампер (*а*) | 1 *а* = 2,998·$10^9$ ед. $СГСЭ_q$/*сек* |
| Плотность тока | **J** | (ед. $СГСЭ_q$/*сек*)/*см*$^2$ | $I=\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}$ (а — площадь) | *а/м*$^2$ | 1 *а/м*$^2$ = 2,998·$10^5$ (ед. $СГСЭ_q$/*сек*)/*см*$^2$ |
| Электрический потенциал | φ | ед. $СГСЭ_v$ [= *эрг*/ед. $СГСЭ_q$] | $W=q(\varphi_2-\varphi_1)$ | вольт (*в*) | 1 *в* = (1/299,8) ед. $СГСЭ_v$ |
| Электродвижущая сила | $\mathscr{E}$ | ед. $СГСЭ_v$ | $W=q\mathscr{E}$ | вольт | |
| Электрическое поле | **E** | ед. $СГСЭ_v$/*см* [= *дин*/ед. $СГСЭ_q$] | $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ | *в/м* | 1 *в/м* = (1/29980) ед. $СГСЭ_v$/*см* |
| Магнитное поле | **B** | *гс* [= *дин*/ед. $СГСЭ_q$] | $\mathbf{F}=q(\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}$ | тесла (*тс*) или вебер/*м*$^2$ (*вб*/*м*$^2$) | 1 *тс* = $10^4$ *гс* |

*Продолжение*

| Величина | Буквенное обозначение | В системе СГС*) | | В системе СИ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | единица измерения | связь между величинами | единица измерения | связь с единицами системы СГС |
| Проводимость | $\sigma$ | $сек^{-1}$ | $\mathbf{J}=\mathbf{E}\sigma$ | $(ом\cdot м)^{-1}$ | 1 $(ом\cdot м)^{-1}=$ $=([10^{9}/1,113)\ сек^{-1}$ |
| Удельное сопротивление | $\rho$ | $сек$ | $\mathbf{J}=\mathbf{E}/\rho$ | $ом\cdot м$ | 1 $ом\cdot м=1,113\cdot 10^{-9}\ сек$ |
| Сопротивление | $R$ | $сек/см$ | $I=\mathscr{E}/R$ (закон Ома) | $ом$ | 1 $ом=1,113\cdot 10^{-12}\ сек/см$ |
| Магнитный поток | $\Phi$ | $гс\cdot см^2$ | $\Phi=\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$ (**a** — площадь) | вебер ($вб$) | 1 $вб=10^{8}\ гс\cdot см^2$ |
| Емкость | $C$ | $см$ | $q=C(\varphi_2-\varphi_1)$ | фарада ($ф$) | 1 $ф=0,899\cdot 10^{12}\ см$ |
| Индуктивность | $L, M$ | $сек^2/см$ | $\mathscr{E}=L\,dI/dt$ | генри ($гн$) | 1 $гн=1,113\cdot 10^{-12}\ сек^2/см$ |
| Электрический дипольный момент | $\mathbf{p}$ | ед. $СГСЭ_q\cdot см$ [$=эрг/$ед. $СГСЭ_V/см$] | $\mathbf{p}=q\mathbf{s}$ | $к\cdot м$ | 1 $к\cdot м=$ $=2,998\cdot 10^{11}$ ед. $СГСЭ_q\cdot см$ |
| Магнитный дипольный момент | $\mathbf{m}$ | ед. $СГСЭ_q\cdot см$ [$=эрг/гс$] | $\mathbf{m}=I\mathbf{a}/c$ (**a** — площадь) | $а\cdot м^2$ | 1 $а\cdot м^2=10^{3}\ эрг/гс$ |
| Вспомогательное поле | $\mathbf{H}$ | $э$ [$=гс$] | $\int \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s}=4\pi I/c$ | $а/м$ | 1 $а/м=(4\pi/10^{3})\ э$ |

*) В этой системе соответственные электрические и магнитные величины, как, например, электрический и магнитный дипольные моменты имеют одинаковую размерность, т. е. выражены в одних и тех же основных единицах. Терминологии, к сожалению, стремится сорвать это обстоятельство, применяя специальное название для единицы потенциала (ед. $СГСЭ_V$) в электричестве и специальное название для единицы поля (гаусс) в магнетизме. Единицы без специальных названий часто обозначаются просто как единицы СГС. Например, $\rho$ обозначает удельное сопротивление в единицах СГС.



## Некоторые константы

| | |
|---|---|
| Скорость света в вакууме | $c=2,997925\cdot 10^{10}\ см/сек\approx 3\cdot 10^{10}\ см/сек$ |
| Элементарный заряд | $e=4,8\cdot 10^{-10}$ ед. $СГСЭ_q=1,6\cdot 10^{-19}\ к$ |
| Постоянная Планка | $h=6,6\cdot 10^{-27}\ эрг\cdot сек$ |
| «Приведенная» постоянная Планка | $\hbar=h/2\pi=1,0\cdot 10^{-27}\ эрг\cdot сек$ |
| Масса покоя электрона | $m_e=0,9\cdot 10^{-27}\ г$ |
| Масса покоя протона | $m_p=1,7\cdot 10^{-24}\ г$ |
| Гравитационная постоянная | $G=6,7\cdot 10^{-8}$ ед. СГС |
| Ускорение силы тяжести на уровне моря | $g=980\ см/сек^2$ |
| Боровский радиус | $a_0=0,5\cdot 10^{-8}\ см$ |
| Число Авогадро | $N_0=6,0\cdot 10^{23}\ моль^{-1}$ |
| Постоянная Больцмана | $k=1,4\cdot 10^{-16}\ эрг/град$ K |
| Нормальная температура | $T_0=273$ °K |
| Нормальное давление | $p_0=1\ атм=1,01\cdot 10^{6}\ дин/см^2$ |
| Объем грамм-моля газа при нормальных условиях | $V_0=22,4\cdot 10^{23}\ см^3/моль$ |
| Тепловая энергия при нормальных условиях | $kT_0=3,8\cdot 10^{-14}\ эрг\approx {}^{1}/_{40}\ эв$ |
| Скорость звука в воздухе при нормальных условиях | $v_0=3,32\cdot 10^{4}\ см/сек$ |
| Звуковой импеданс воздуха при нормальных условиях | $Z_0=42,8\ (дин/см^2)/(см/сек)$ |
| Единица интенсивности звука | $I_0=1\ мквт/см^2$ |
| Длина волны фотона с энергией в 1 $эв$ | $\lambda=1,24\cdot 10^{-4}\ см\approx 12\,345$ Å |
| Один ферми | 1 $ферми=10^{-13}\ см$ |
| Один электрон-вольт | 1 $эв=1,6\cdot 10^{-12}\ эрг$ |
| Один ватт | 1 $вт=1\ дж/сек=10^{7}\ эрг/сек$ |

## Некоторые тождества

$$\cos x+\cos y=\left[2\cos\frac{1}{2}(x-y)\right]\cos\frac{1}{2}(x+y)$$

$$\cos x-\cos y=\left[-2\sin\frac{1}{2}(x-y)\right]\sin\frac{1}{2}(x+y)$$

$$\sin x+\sin y=\left[2\cos\frac{1}{2}(x-y)\right]\sin\frac{1}{2}(x+y)$$

$$\sin x-\sin y=\left[2\sin\frac{1}{2}(x-y)\right]\cos\frac{1}{2}(x+y)$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y\qquad \sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\sin y\cos x$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x\qquad \sin 2x=2\sin x\cos x$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\qquad \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\ldots\qquad \cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\ldots$$

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{1}{2}n(n-1)x^2+\ldots;\quad x^2<1$$

$$\cos\theta_1+\cos(\theta_1+\gamma)+\ldots+\cos[\theta_1+(N-1)\gamma]=$$
$$=\cos\left[\theta_1+\frac{1}{2}(N-1)\gamma\right]\frac{\sin{}^{1}/_{2}N\gamma}{\sin{}^{1}/_{2}\gamma}$$

## Электромагнитный спектр

| Вид электромагнитного излучения | Практические единицы*) | | Порядок величины | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\lambda$ | $h\nu$, $\nu$, $\nu/c$ | $\lambda$, *см* | $\nu$, *гц* | $h\nu$, *эв* |
| Тормозное излучение (максимальная энергия) | | | | | |
| Источник: | | | | | |
| Стэнфордский электронный ускоритель | 0,067 *ферми* | 18 *Гэв* | $10^{-14}$ | $10^{24}$ | $10^{10}$ |
| Типичный электронный синхротрон | 4 *ферми* | 300 *Мэв* | $10^{-13}$ | $10^{23}$ | $10^{9}$ |
| Гамма-лучи: | | | | | |
| Распад нейтрального пи-мезона: $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ | 19 *ферми* | 67 *Мэв* | $10^{-12}$ | $10^{22}$ | $10^{8}$ |
| Распад возбужденных ядер | 100 *ферми* | 10 *Мэв* | $10^{-11}$ | $10^{21}$ | $10^{7}$ |
| | 0,1 Å | 100 *кэв* | $10^{-9}$ | $10^{19}$ | $10^{5}$ |
| Рентгеновские лучи (возбужденные атомы или тормозное излучение электрона) | 0,1 Å | 100 *кэв* | $10^{-9}$ | $10^{19}$ | $10^{5}$ |
| | 100 Å | 100 *эв* | $10^{-6}$ | $10^{16}$ | $10^{2}$ |
| Ультрафиолетовый свет (возбужденные атомы) | 100 Å | 100 *кэв* | $10^{-6}$ | $10^{16}$ | $10^{2}$ |
| | 3900 Å | 2,5 *эв* | $10^{-5}$ | $10^{15}$ | $10^{1}$ |
| Видимый свет: | | | | | |
| Темно-синяя граница видимого света | 3900 Å | 2,5 *эв* | $10^{-5}$ | $10^{15}$ | $10^{1}$ |
| Синий свет паров ртути | 4358 Å | 22940 $см^{-1}$ | | | |
| Зеленый свет паров ртути | 5461 Å | 18310 $см^{-1}$ | | | |
| Желтый свет паров ртути | 5770 Å | 17330 $см^{-1}$ | | | |
| Красный свет гелий-неонового лазера | 6328 Å | 15800 $см^{-1}$ | | | |
| Темно-красная граница видимого света | 7600 Å | 1,6 *эв* | $10^{-4}$ | $10^{14}$ | $10^{0}$ |
| Инфракрасное излучение: | | | | | |
| Преобладающее тепловое излучение ($h\nu \approx 3kT$) от источников: | | | | | |
| Поверхность Солнца ($T \approx 6000$ °K) | 1 *мкм* | 1 *эв* | $10^{-4}$ | $10^{14}$ | $10^{0}$ |
| Комнатная температура ($T = 300$ °K) | 20 *мкм* | 15000 *Гц* | $10^{-3}$ | $10^{13}$ | $10^{-1}$ |
| Микроволновое излучение и радиоволны: | | | | | |
| Атомные часы (аммиак) | 1,5 *см* | 20 *Гц* | $10^{0}$ | $10^{10}$ | $10^{-3}$ |
| Радар (*S*-диапазон) | 10 *см* | 3 *Гц* | $10^{1}$ | $10^{9}$ | $10^{-4}$ |
| Линия межзвездного водорода | 21 *см* | 1,5 *Гц* | $10^{1}$ | $10^{9}$ | $10^{-4}$ |
| Ультравысокая несущая частота телевидения | 37 *см* | 800 *Мгц* | $10^{1}$ | $10^{9}$ | $10^{-4}$ |
| | 75 *см* | 400 *Мгц* | $10^{2}$ | $10^{8}$ | $10^{-5}$ |



*Продолжение*

| Вид электромагнитного излучения | Практические единицы *) | | Порядок величины | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\lambda$ | $h\nu$, $\nu$, $\nu/c$ | $\lambda$, *см* | $\nu$, *гц* | $h\nu$, *эв* |
| Обычная несущая частота телевидения | 1,5÷5,5 *м* | 210÷55 *Мгц* | $10^{2}$ | $10^{8}$ | $10^{-5}$ |
| Несущая частота радиопередач с частотной модуляцией (УКВ) | 2,8÷3,4 *м* | 108÷88 *Мгц* | $10^{2}$ | $10^{8}$ | $10^{-5}$ |
| Любительский диапазон | 10 *м* | 30 *Мгц* | $10^{3}$ | $10^{7}$ | $10^{-6}$ |
| | 100 *м* | 3 *Мгц* | $10^{4}$ | $10^{6}$ | $10^{-7}$ |
| Несущая частота радиопередач с амплитудной модуляцией | ~200 *м* | 1500 *кгц* | $10^{4}$ | $10^{6}$ | $10^{-7}$ |
| | ~600 *м* | 500 *кгц* | $10^{5}$ | $10^{5}$ | $10^{-8}$ |
| Радиоволна звуковой частоты | 10 *км* | 30 *кгц* | $10^{6}$ | $10^{4}$ | $10^{-9}$ |
| | $10^4$ *км* | 30 *гц* | $10^{9}$ | $10^{1}$ | $10^{-12}$ |

*) Экспериментаторы чаще всего работают с практической системой единиц. Однако для одного и того же частотного диапазона могут применяться различные единицы. Например, когда рентгеновские лучи детектируются счетчиком фотонов, естественно использовать единицы энергии (*эв*, *кэв*, *Мэв*); когда же их детектируют с помощью кристаллической решетки, обычно используют единицы длины (Å).

Другой пример. Теперь лазеры разрабатываются, как правило, инженерами по электронике, которые привыкли к использованию единиц для частоты (*Мгц*, *Гц* и т. д.), в то время как спектроскописты предпочитают использовать единицы для длины волны (Å, *мкм* и т. д.).

## ЛИТЕРАТУРА


American Institute of Phisics, Selected Reprints, Polarized Light, N. Y., 1963. Книга воспроизводит 18 наиболее важных и интересных работ.

American Institute of Physics, Selected Reprints, Quantum and Statistical Aspects of Light, N. Y., 1963. Здесь приведена, в частности, работа Брауна и Твисса, рассмотренная в настоящем томе БКФ.

А. Н. Бенаде, Horns, Strings and Harmony, Anchor Books, Science Study, Series S11, N. Y., 1960.

Дж. Г. Дарвин, Приливы и родственные им явления в солнечной системе, перев. с англ., «Наука», 1965. Популярная классическая книга, написанная в 1898 г. Увлекательное описание сейш в Женевском озере, приливного «бора», методов гармонического анализа приливов и вопросов космологии, связанных с явлением приливов.

Ю. Д. Костыков, В. Д. Крыжановский, Телевидение (физические основы), «Связь», 1972.

У. Кох, Звуковые и световые волны, перев. с англ., «Мир», 1966.

E. H. Land, Some Aspects of the Development of Sheet Polarizers, J. Opt. Soc. Am. 41, 957 (1951).

М. Миннарт, Свет и цвет в природе, Физматгиз, 1958. Приведено большое число опытов, которые можно выполнить «на пороге дома».

Д. Р. Пирс, Электроны, волны и сообщения, перев. с англ., Физматгиз, 1961.

А. А. Харкевич, Теоретические основы радиосвязи, Гостехиздат, 1957.

Н. Д. Жевандров, Поляризация света, «Наука», 1969.

У. Шерклифф, Поляризованный свет, перев. с англ., «Мир», 1965.

Р. Бишоп, Колебания, перев. с англ., «Наука», 1968. Популярное описание роли колебаний в технике.

Г. С. Горелик, Колебания и волны, Физматгиз, 1959.

Р. В. Поль, Механика, акустика и учение о теплоте, «Наука», 1971.

Р. В. Поль, Оптика, «Наука», 1966.

Г. С. Ландсберг, Оптика, Гостехиздат, 1940.

Н. И. Калитеевский, Волновая оптика, «Наука», 1971.

Сборник статей «Творцы физической оптики», «Наука», 1973.


## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


Аберрация сферическая 453
— хроматическая 454, 474
Абсолютная световая эффективность 197, 207
Адиабатический закон для газа 160
Акустические свойства помещений 245, 246
Аммиака молекула 482
Амплитуда вынужденных колебаний 116
— гармонического колебания 19
— дисперсии (или упругая) 106, 107, 118, 172
— —, зависимость от частоты 111
— звука 188
— модуляции 43, 252, 293
— поглощения 106, 107, 118, 172
— —, связь с амплитудой дисперсии 111
Амплитудная модуляция 248, 293, 477
Амплитудные соотношения 150
Амплитуды комплексные 361
Атома модель 338
«Атомные часы» 483

Барн ($10^{-24}$ *см*$^2$) 342
Бегущие волны 149—201
— — в воде 318
— — в волноводе 307
— — в однородной диспергирующей среде 281
— — гармонические 150, 321
— — — в одномерном пространстве 150
— — линейно-поляризованные 356
— — плоские 193
— —, поляризованные по кругу 327, 356, 357
— — поперечные в непрерывной среде 182
— — — в струне с грузами 156
— — почти синусоидальные 249
— — продольные в пружине 185
Бегущие волны продольные в струне с грузами 157
— — сферические 328
Биения 42, 45, 47
— бесконечные 114, 145
— между нормальными модами 46
— оптические 490
— от двух источников видимого света 45
— — слабосвязанных неидентичных струн гитары 54
— переходные 116, 142, 145
—, созданные двумя камертонами 43, 52
Бойля — Мариотта закон 159
Боковые полосы 253, 294
Боровское условие частот 94
Брауна и Твисса опыт 418, 419
Брейта — Вигнера резонансная кривая 113, 244, 279
Брюстера окно 374, 375
— угол 372, 373, 399

Вектор распространения 299, 300
Векторная диаграмма 257
Векторные тождества 512
Водяные волны 312—318
Волна де Бройля 484
Волновая функция 18
— — комплексная 360
Волновод прямоугольный 304, 305
Волновое уравнение для волн де Бройля 488
— — классическое 62, 283
— — — трехмерное 303, 319
— число 65
— — угловое 65, 66
Волновой пакет 268, 285
— фронт 193, 301
Волны бегущие (см. Бегущие волны)
— в глубокой воде 315
— в неглубокой воде 316
— гравитационные 288

Волны диспергирующие 67, 155
— звуковые 186, 187
— линейно-поляризованные 355
— недиспергирующие 67, 155, 282, 292
— плоские в свободном пространстве 216, 300
— поверхностного натяжения 255, 288, 317, 349
— приливные 286, 292
— прямоугольные 72
— стоячие (см. Стоячие волны)
— экспоненциальные 132, 140
— — в открытой системе 154
— — реактивные 155, 174
— электромагнитные (см. Электромагнитные волны)
Волоконная оптика 342
Время жизни среднее 384
— когерентности 386, 417, 490
— релаксации 177, 178

Гармоники колебания 31, 65, 148
— рояля 95
Гармонические отношения частот 65, 67
— плоские волны 300
Гармонический осциллятор двухмерный 33
— — затухающий 20, 104, 113, 277
— — одномерный 18, 104
Гаусса закон 329
Гельмгольца резонатор 205
Глубина проникновения 135, 315, 387
Граничная частота вынужденных колебаний 123, 176, 177
— — для волновода 305, 306
Граничные условия для закрепленного конца струны 64, 97
— — — свободного конца струны 75, 98, 102
— — — струны с грузами 81
— — и непрерывность 220, 239, 243, 501, 502
— — на стенках аквариума 314
Групповая скорость 162, 250, 251, 269
— — волн в волноводе 307, 308
— — — в глубокой воде 257, 288
— — — де Бройля 488
— — света 288
— — электромагнитных волн в вакууме 254
— — — — в ионосфере 255
Гюйгенса принцип 431

Давление электромагнитного поля 324, 344
Двойное лучепреломление 375
Де Бройля волна 484
— гипотеза 94
Дельта-функция 276
Демодуляция 293, 296
Деполяризация при многократном рассеянии 371
Децибел 187
Диаграмма излучения камертона 473, 474
Динамический диапазон уха 187
Диоптрия 458
Дипольное излучение 473
Диспергирующая среда 79
Дисперсивная область частот 140, 506
— среда 135, 136
Дисперсионное соотношение 66, 67
— — для волн в глубокой воде 102, 256
— — — — в мелкой воде 102
— — — — де Бройля 484
— — — — поверхностного натяжения 349
— — — вынужденных колебаний в ионосфере 136, 161
— — — гравитационных волн в воде 316, 317
— — — колебаний плазмы 92
— — — поперечных колебаний пружины 87
— — — продольных колебаний пружины 87, 209
— — — связанных маятников 90, 91, 121, 141, 154, 162
— — — струны рояля 84
— — — — с грузами 79, 81, 83, 209
— — — цепочки *LC* 88
— — — экспоненциальных волн 135
— — — электромагнитных волн в вакууме 299, 302
Дисперсия 79, 168
— аномальная 173
— в ионосфере 175
— в стекле 170
— воды 204
— нормальная 173
— призмы 454
Дифракционная картина 427
— — двухмерная 467
— — от двух широких щелей 439, 440, 466
— — — одной щели 432, 434, 435, 466
— решетка 444, 468
Дифракция 424, 427
— водяных волн 469
Диэлектрическая постоянная 166, 171, 192, 328
— — воздуха 203
— — комплексная 497
Длина волны 63
— — приведенная 102
Длительность импульса и частотный интервал 260



Емкость погонная передающей линии 164, 165
Естественная ширина линии, испускаемой атомом 338

Задерживающая пластинка 377
— — в половину длины волны 378
— — в четверть длины волны 378
— —, свойства 378—380
Закон Рэлея синего неба 340
Звук, измерение скорости с помощью волновых пакетов 202
—, скорость 157, 205
Звуковая частота 74, 253
Звуковое давление 187, 224
Звуковой импеданс 208
Звуковые волны 186, 187
Зеркало вогнутое параболическое 452
— — сферическое 452, 466
— эллиптическое 451, 452

Излучатель плоский 426
Излучение от тонкого заряженного слоя 346
— точечного ускоренного заряда 328—336, 345
— электрического диполя 337, 345
— электромагнитное одномерного атома 489
Изотропная среда 494, 495
Индуктивность погонная передающей линии 164, 165
Интеграл Фурье 266, 273
Интенсивность звуковых волн 187
— излучения 191, 192, 194, 215
— рассеянного света 492
— света при зеркальном отражении 374
Интерференционная картина 407, 427
— — от двух щелей 413
— — — многих щелей 441—443
Интерференционные полосы Фабри — Перо 234, 235
Интерференция в рассеянном свете 476
— в тонких пленках 233, 234, 236, 242
— деструктивная 406
— конструктивная 406
Интерферометр Майкельсона 297
— с двойной щелью 47
Интерферометры звездные 476
Ионосфера 136, 304

Квадратичный детектор 44, 74, 195
Квадрупольное излучение 473
Кинетическая энергия колебаний 48
Классический точечный источник 420
Классическое волновое уравнение 283
— — — трехмерное 303, 319
Клейна — Гордона уравнение 131, 489
— — — трехмерное 304
*K*-мезоны 483
Когерентности время и оптические биения 490
— условие 422
Когерентность 421, 467, 471
— и голубой цвет неба 491
Когерентные источники 405, 406
Колебания амплитудно-модулированные 161, 248
— вынужденные 103—140
— — двух связанных маятников 118—120, 143
— — замкнутых систем со многими степенями свободы 129
— — одномерного гармонического затухающего осциллятора 104—116
— — системы связанных маятников 121, 130, 139
— гармонические 19, 26
— — ограниченной длительности 261
— линейно-поляризованные 60
— переходные 113
— плазмы 91
— поперечные 23, 26, 59
— — двух связанных масс 39, 55
— — струны с грузами 79
— почти гармонические 43, 48, 249
— продольные 22, 26, 36, 85
— — двух связанных масс 36, 55
— свободные 17, 18, 57
— — затухающие 20, 104
— установившиеся 106
Комбинационные частоты 53
— — и нелинейность уха 52
— — — оптическая нелинейность 54
Комплексная восприимчивость 497
Критическая частота 93
Критический угол полного внутреннего отражения 310, 343
Критическое затухание 105, 145
Коэффициент жесткости 22, 86
— затухания 104, 279
— отражения 219, 222, 351
— поглощения 134, 246
— прохождения 221
Коэффициенты Фурье 71, 266, 271, 273

Лазер 262, 289, 426
Ливенгука микроскоп 463
Линейная плотность 60
— поляризация 60
Линза рассеивающая 458
— собирающая 457

Линза сферическая 462
— тонкая 455
Линзы сила 458
— формула 455, 456
Ллойда зеркало 467
Лоренцевская сила 180
— форма линии 279
Лоренцевский радиус электрона 341

Магнитная восприимчивость 494
— проницаемость 166, 192, 328
Майкельсона интерферометр 297
Максвелла уравнения 318, 319, 493, 498
Малюса закон 369
Маятник 20
— сферический 30, 32
Маятники связанные 46, 51, 54, 90, 119, 121, 130, 134, 146
Микроскоп 461, 462
— фазоконтрастный 479
Миражи на автостраде 350
Метод векторных диаграмм 257
— граничных условий для коэффициентов отражения и прохождения 243, 244
— инфракрасной спектроскопии 297
— плавно меняющегося показателя преломления 232
— плавного изменения импеданса 231
— субчастот 295
Модель молекулы стекла 171, 172
Модуляционная спектроскопия 296
Модуляция 42
— амплитудная 248, 293, 477
— , передача информации 248
— с помощью субчастот 295
—, скорость распространения 249
— фазовая 248, 294, 478
— частотная 248, 293
Моды дискретной системы с $N$ степенями свободы 78
— колебаний 17, 35
— — струны с грузами 58, 80
— — цепочки $LC$ 127
— лазера 290, 291
— маятников 46, 119
— неоднородной струны 77
— нормальные 31, 58, 77, 80,
— «ограниченные» 139
— поверхностного натяжения 102
— поперечных колебаний непрерывной струны 59, 75
Момент импульса в бегущей плоской волне 326, 327, 329, 398
Мощность, излучаемая точечным источником 335, 336
— мгновенная выходная 184
— — затухающего осциллятора 107
Мощность на выходе высококачественного громкоговорителя 188
Мощность, переносимая бегущей волной в пружине 185
—, — — — в струне 185
—, — бегущими плоскими электромагнитными волнами в линии из параллельных пластин 191
— средняя, рассеиваемая осциллятором 108, 112
Музыкальный интервал 96

Навигация викингов 402
Недиспергирующая среда 79
Нелинейность уха 52
Неотражающий слой 229, 242
Непрерывное приближение 82, 86, 131
Непрерывные системы 58
Нормальные координаты 34, 119
— моды колебаний 31, 58, 77, 80

Обертоны камертона 242
— струны рояля 84
Оптическая активность 381, 401
Ортонормированные волновые функции 361
Освещенность 199, 200
Ось быстрая 376
— медленная 376
— свободного пропускания 367
Открытые системы 149
Отражение 210—234
— в передающих линиях 226, 227, 237
— в тонких пленках 233
— видимого света 228, 235
— звуковых волн 224, 225
— зеркальное 447
— многократное 243
— на границе двух дисперсивных сред 220
— плоских волн 501
— полное внутреннее 310

Передающая линия 163, 164
— — из параллельных пластин 191, 227
— — коаксиальная 203
Период гармонических колебаний 19
Плазма 92, 93, 136
Плоскость постоянной фазы 301
Пойнтинга вектор 323
Полное внутреннее отражение 310, 350
Полный набор функций 76
— — — для мод неоднородной струны 77
— — — — — однородной струны 76
Полный набор функций для поляризационных состояний 361
Полоса пропускания фильтра 124
Поляризатор идеальный 369
— круговой 390, 397
Поляризационный проекционный оператор 403
Поляризация 321, 352—393
— голубого неба 369, 370
—, измерение 387, 388
— круговая 327, 356, 357
— линейная 321, 355
— поперечных волн 354
— при зеркальном отражении 372—374
— — избирательном поглощении 365, 366
— — излучении 364, 365
— — рассеянии 369, 370, 398
— радуги 375
— частичная 393
— эллиптическая 359, 360
Поляроид 367, 368
Поперечное сечение рассеяния полное 340
— — — томсоновское 342
Поперечность плоских электромагнитных волн 320
Порог слышимости 187
Потенциальная яма 485, 487
Поток импульса в бегущей волне 324
— фотонов 412
— энергии в бегущей волне 323
— — — — звуковой волне 186
— — в плоской волне 322
— — электромагнитного излучения 195
Преломления показатель 168, 172
— — в дисперсивной полосе частот 178
— — комплексный 500
Приближение длинных волн 82
— малых колебаний 25, 40, 61
— «пружины» 24, 40, 61
Приведенная длина волны 315
Призма обратного хода 309, 342
— — — водяная 342
— тонкая 453
Проникновение света через барьер 311
Пуассона распределение 492
Пучок бегущих волн 423

Равномерно темперированный строй 53, 95, 96
Радиоволны с амплитудной модуляцией 252
Разрешающая способность глаза 436, 465
Распределенная нагрузка 212
Рассеяние света 346
Реактивная полоса частот 507
— среда 135, 136
Резонанс в картонных трубках 240
— в надувных шарах 245
— в приливных волнах 292
— в системе с двумя степенями свободы 120
— в случае вынужденных колебаний 109
— для проходящих волн 244
Резонансная кривая 112, 116
— —, ширина 109, 118
Рояль, дисперсионное соотношение для струны 85
—, звучание аккорда 73
—, измерение частоты 50
— как анализатор Фурье 95, 275
Рэлея критерий 436

Свет неполяризованный 392
Свеча стандартная 197
Связанные уравнения 34, 35, 37
Сейши 56, 292
Система единиц СИ 512
Скорость групповая (см. Групповая скорость)
— света 284
— счета средняя 196
— фазовая (см. Фазовая скорость)
Смита — Парселла источник света 348
Снеллиуса закон преломления 170, 310, 451
Собственные функции 78
Согласование импедансов 211, 212, 221, 229, 242
— — в оптике 231
— — двух прозрачных сред 228
Согласованная нагрузка 210
Солнечная постоянная 195, 207, 344
Солнечный парус 345
Спиральность бегущих волн и условие момента импульса 358
Стоячие волны 62, 302
— — в воде 314
— — гармонические 322
— — де Бройля 485
— — линейно-поляризованные 356
— — пилообразные 101, 147
— —, поляризованные по кругу 357
— — прямоугольные двухмерные 148
Стробоскоп 49, 258
— неоновый 238
Суперпозиции принцип 28, 52, 106
Суперпозиция бегущих волн 223, 242, 302
— гармонических функций 510
— начальных условий 29
— стоячих волн 223, 302

Сферическая аберрация 453
Сферические полярные координаты 335

Тейлора ряды 509
Телевизор как стробоскоп 49, 51
Телескоп 461
Телесный угол 337
Тембр 76
Томсоновское поперечное сечение рассеяния 342
Трехмерные волновые уравнения 303

Угловая расходимость когерентного источника 438
— частота гармонических колебаний 19, 20
— — модуляции 42, 114
— — средняя 42
— —, физический смысл для моды 37
— —, — — — систем с одной степенью свободы 20
— —, — — — струны пианино 30
— ширина главного максимума 442
— — пучка бегущих волн 423, 425, 435
Угловое волновое число 65, 66
— разрешение, критерий Рэлея 436
Угловой отражатель 466
Угол падения 169
— преломления 169
Уравнение непрерывности 313
Усилитель линейный 293
Условие момента импульса 358
Ухо, динамический диапазон 187
—, основная перепонка 74
—, фазовая нечувствительность 74, 240, 241, 276
Ушная улитка 74

Фабри — Перо полосы 234, 235, 237, 238, 243, 468
Фазовая нечувствительность квадратичного детектора 44, 74
— — уха 74, 240, 241
— постоянная 19
— — для мод 32, 78
— скорость 151, 152, 302
— — волн в волноводе 307, 308
— — — в глубокой воде 257, 288
— — — в передающей линии 166, 167, 190
— — — де Бройля 488
— — для волнового пакета 269
— — — системы маятников 162
— — звука. Модель Ньютона 157
— — поперечных волн в струне 181
— — продольных волн в пружине 185

Фазовая скорость света в стекле 288
— — электромагнитных волн в ионосфере 161, 255
— функция 152
Фазовые скорости, превышающие скорость света 161, 173
— соотношения и показатель преломления 178, 179
— — для бегущих волн 150
— — — зеркально отраженного света 373, 400
— — — стоячих волн 63, 241
— — — при вынужденных колебаниях 130
Ферма принцип 450
Фильтр механический 122, 123, 144
— — высоких частот 125
— — низких частот 124
— —, полоса пропускания 124
— — полосовой 124, 144, 146
— электрический широкополосный 127
— — низких частот 127
Фокальная плоскость 455
Фокусное расстояние линзы 409
Фотоумножитель 196, 296, 418
Фраунгофера дифракция 437
— линии 468
Френеля дифракция 438
Фурье-анализ бегущих волновых пакетов 281
— — импульсов 270
— — непериодической функции 267
— — периодической функции времени 72
— — — — координаты 69, 70
— — прямоугольного импульса 100, 288, 289
— — симметричных пилообразных импульсов 102
— — цуга синусоидальных колебаний 288
Фурье интеграл 266, 273

Характеристический импеданс для короткозамкнутой линии 226
— — — линии из параллельных пластин 191, 213, 227
— — — — с открытым концом 226
— — — — с распределенными параметрами 190
— — — поперечных волн в непрерывной струне 181—183
— — — продольных волн в пружине 158
Хроматическая аберрация 474

Частота биений 44
— гармонических колебаний 19



Частота граничная вынужденных колебаний 123
—, измерение 50
— колебаний плазмы 93, 136
— модуляции 42, 114
— несущая 252
— резонансная 110

Ширина полосы частот 253
— — — для АМ-радиоволн 252, 253
— — — — лазера 263
— — — — повторяющихся прямоугольных импульсов 100
— — — — телевидения 262
— — — и когерентность 386, 387, 417
Шредингера уравнение 489

Электрическая восприимчивость 494
Электромагнитные волны 318
— — в вакууме 303
— — в ионосфере 161, 304
— — в однородной диспергирующей среде 303
Электромагнитные волны в передающей линии 189
— — в прямоугольном волноводе 304
— — плоские в вакууме 192, 193, 319
— — — — —, из свойства 193, 194
— — — в прозрачной среде 192
Электромагнитный спектр 519
Энергия биений 115
—, запасенная затухающим осциллятором 108, 109, 112, 115
—, излучаемая точечным зарядом 334
— кинетическая колебаний 48
— классической частицы 283
—, переносимая бегущей волной 184, 185
— слабо затухающих колебаний 105, 112
Эталон силы видимого света 197
Эффективность фотоумножителя 197
Эффективный точечный заряд 354

Яркость 197, 198